第9卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 9, No. 1
1983 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1983

设计最低阶多线性函数观测器的新方法

张钟俊　　陈联淦
（上海交通大学）　　（上海精密机械公司）

摘　　要

本文讨论为连续线性时不变多输入多输出系统设计多线性函数观测器的时域方法. 用此法设计的观测器具有最低动态阶数，且极点可以任意配置. 本文提供的算法不仅可用于设计多输出系统的最低阶多线性函数观测器，而且也可用于设计多输出系统的降阶状态观测器.

一、引　　言

在自动控制理论中，状态反馈得到广泛的应用. 1964 年 Luenberger[1] 提出的渐近状态观测器可以用来实现状态反馈. 在极点配置、最佳化等问题中需要进行状态向量的线性变换，因此，近年来人们致力于研究低阶和最低阶多线性函数观测器. 1966 年 Luenberger[2,3] 首先论述了多输出系统低阶单线性函数观测器的设计问题. 1972 年 Fortmann 和 Williamson[4] 创立了单输出系统的最低阶多线性函数观测器的设计方法. 1975 年 Roman 和 Bullock[5] 利用实现理论首先解决了多输入多输出系统的最低阶多线性函数观测器的设计问题.

本文采用比较简单的数学工具，建立为多变量系统设计具有任意极点的各种观测器(包括最低阶单线性和多线性函数观测器以及降阶状态观测器)的普遍适用的时域方法.

二、观测器的基本理论

设被观测的连续线性时不变系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}. \tag{2.1b}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 状态向量，$\boldsymbol{u}$ 是 $q\times 1$ 输入向量，$\boldsymbol{y}$ 是 $p\times 1$ 输出向量，A, B, C 分别是阶数合适的矩阵.

观测器是用来近似地重建被观测系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 或它的线性变换 $K\boldsymbol{x}(t)$ 的，K 是常数阵. 观测器的方程为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = F\boldsymbol{z} + G\boldsymbol{y} + H\boldsymbol{u}, \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{w} = E\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y}. \tag{2.2b}$$

式中 $\boldsymbol{z}$ 是观测器的 $m\times 1$ 状态向量，$m<n$，m 待定. $\boldsymbol{w}$ 是观测器的输出向量. 当观测器用于状态反馈时，$\boldsymbol{w}$ 与原系统的输入 $\boldsymbol{u}$ 有相同的维数. F, G, H, E, L 分别是

本文于 1981 年 6 月 23 日收到.

阶数合适的矩阵.

定理 2.1.[1,2,3] 设系统 (2.1) 完全可观，系统 (2.2)的输出向量是 $K\boldsymbol{x}$ 的渐近估计值，当且仅当下列条件成立:

1) F 阵是稳定的; (2.3)

2) $H = TB$; (2.4)

3) $TA - FT = GC$; (2.5)

4) $ET + LC = K$. (2.6)

式中 T 是 $m \times n$ 常数阵. 当 A 和 F 没有相同特征值时，T 的解唯一存在.

当条件 (2.3)—(2.5) 得到满足时，观测器的状态向量 $\boldsymbol{z}$ 渐近收敛于系统状态向量的线性变换 $T\boldsymbol{x}$，即

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{z}(t) - T\boldsymbol{x}(t)] = 0. \tag{2.7}$$

三、最低阶多线性函数观测器

1. 多线性函数观测器的方程式

设多输出系统 (2.1) 是完全可观的，利用状态向量变换 $\boldsymbol{x} = Q\bar{\boldsymbol{x}}$，$Q$ 为非奇异矩阵，把给定的系统 (A, B, C) 变换为可观标准形 ($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$) 的等价系统:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{B}\boldsymbol{u}, \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{y} = \bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}. \tag{3.1b}$$

式中，

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = [\boldsymbol{n}_2\cdots\boldsymbol{n}_{\sigma_1}\boldsymbol{a}_1 \vdots \boldsymbol{n}_{\sigma_1+2}\cdots\boldsymbol{n}_{\sigma_2}\boldsymbol{a}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{n}_{\sigma_{p-1}+2}\cdots\boldsymbol{n}_{\sigma_p}a_p], \tag{3.2a}$$

$$\bar{C} = CQ = [0\cdots0\boldsymbol{c}_1 \vdots 0\cdots0\boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots 0\cdots0\boldsymbol{c}_p], \tag{3.2b}$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B. \tag{3.2c}$$

这里 $\boldsymbol{n}_i$ 是 n 阶单位阵的第 i 列向量，即 $\boldsymbol{n}_i^T = [0\cdots0\ 1\ 0\cdots0]$, (3.3)

其中第 i 列元素为 1，其余元素皆为零.

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} d_j, \qquad i = 1, 2, \cdots, p, \quad (\sigma_p = n). \tag{3.4}$$

正整数 $d_j (j = 1, 2, \cdots, p)$ 是系统 (2.1) 的可观性指数组[6].

$\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_i (i = 1, 2, \cdots, p)$ 是非零的 n 维列向量. 且 $\boldsymbol{c}_i$ 具有特定的形式: $\boldsymbol{c}_i^T = [0\cdots 0\ 1 \times \cdots \times]$. 这里第 i 列元素为 1，符号 $\times$ 表示可能的非零元素.

把系统 (2.2) 作为等价系统 (3.1) 的观测器，根据定理 2.1，得到下列关系式:

$$H = \bar{T}\bar{B}, \tag{3.5}$$

$$\bar{T}\bar{A} - F\bar{T} = G\bar{C}, \tag{3.6}$$

$$E\bar{T} + L\bar{C} = \bar{K}, \tag{3.7}$$

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{z}(t) - \bar{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)] = 0. \tag{3.8}$$

观测器 (2.2) 的输出向量 $\boldsymbol{w}$ 是等价系统 (3.1) 的状态向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的线性函数 $\bar{K}\bar{\boldsymbol{x}}$ 的渐近估计值. 若令

$$\bar{K} = KQ, \tag{3.9}$$

K是预先指定的常数阵，则 $\boldsymbol{w}$ 收敛于 $K\boldsymbol{x}$. 这样，输出向量 $\boldsymbol{w}$ 可直接用于原系统(2.1)的状态反馈之中.

为了便于讨论，采用下列符号：

$$\bar{T}=[\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1}\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_2}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p}],\tag{3.10a}$$

$$\tilde{T}=[\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1-1}\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_2-1}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p-1}],\tag{3.10b}$$

$$\check{T}=[\boldsymbol{t}_{\sigma_1}\boldsymbol{t}_{\sigma_2}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p}];\tag{3.10c}$$

$$\bar{K}=[\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1}\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_2}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p}],\tag{3.11a}$$

$$\tilde{K}=[\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1-1}\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_2-1}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p-1}],\tag{3.11b}$$

$$\check{K}=[\boldsymbol{k}_{\sigma_1}\boldsymbol{k}_{\sigma_2}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p}];\tag{3.11c}$$

$$\check{A}=[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_p];\tag{3.12a}$$

$$\check{C}=[\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\cdots\boldsymbol{c}_p].\tag{3.12b}$$

这里 $\check{T}$, $\check{K}$, $\check{A}$, $\check{C}$ 分别是由矩阵 $\bar{T}$, $\bar{K}$, $\bar{A}$, $\bar{C}$ 的第 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p$ 列向量构成的 p 列子阵；$\tilde{T}$, $\tilde{K}$ 分别是由矩阵 $\bar{T}$, $\bar{K}$ 划去第 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p$ 列向量后构成的 $(n-p)$ 列子阵. $p\times p$ 子阵 $\check{C}$ 具有特定的形式：

$$\check{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\cdots & 0\\ \times & 1\cdots & 0\\ \times & \times\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \times & \times\cdots & 1\end{bmatrix},\tag{3.13}$$

它是主对角线元素为 1 的下三角矩阵，故它的逆阵 $\check{C}^{-1}$ 总是存在的.

根据已知的 $\bar{A}$, $\bar{C}$ 和 $\bar{K}$ 确定 $\bar{T}$ 是设计观测器的核心问题. 把 $\bar{A}$, $\bar{C}$ 和 $\bar{T}$ 的表达式 (3.2a), (3.2b) 和 (3.10a) 代入式 (3.6) 中，经展开并项后，比较等式两边相应的列向量，得到

$$\bar{T}\check{A}-F\check{T}=G\check{C},\tag{3.14}$$

$$\check{T}=F[\boldsymbol{t}_{\sigma_1-1}\boldsymbol{t}_{\sigma_2-1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p-1}],\tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{t}_{i+1}-F\boldsymbol{t}_i=0,\ i\in\{1,2,\cdots,\sigma_1-2,\sigma_1+1,\cdots,\sigma_2-2,\sigma_2+1,\cdots,\sigma_p-2\}.\tag{3.16}$$

这里 i 是数集 $\{1,\cdots,\sigma_p-2\}$ 中的 $(n-2p)$ 个元素（i 值的确定方法见第四节）. 式(3.16)是一个齐次方程组，它包含了 $\tilde{T}$ 的全部列向量. 不难看出，这个方程组的系数矩阵是满秩的，而且它只与矩阵 F 有关，而与矩阵 $\bar{A}$, $\bar{C}$ 和 $\bar{K}$ 无关. 方程组 (3.16) 称为 $\tilde{T}$ 的动态约束方程组.

设 n 维状态向量空间 R^n 的一组标准正交基是

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{n}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots\quad \boldsymbol{n}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}.\tag{3.17}$$

令 $\bar{C}^T$ 是 $\bar{C}$ 的转置矩阵，则值域空间 (Range Space) $R(\bar{C}^T)$ 和零空间 (Null Space) $N(\bar{C})$ 可表示为

$$R(\bar{C}^T) = \text{Span}\,(\boldsymbol{n}_{\sigma_1}, \boldsymbol{n}_{\sigma_2}, \cdots, \boldsymbol{n}_{\sigma_p}), \tag{3.18}$$

$$N(\bar{C}) = \text{Span}\,(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_{\sigma_1-1}, \boldsymbol{n}_{\sigma_1+1}, \cdots, \boldsymbol{n}_{\sigma_2-1}, \boldsymbol{n}_{\sigma_2+1}, \cdots, \boldsymbol{n}_{\sigma_p-1}). \tag{3.19}$$

显然，$R(\bar{C}^T)$ 和 $N(\bar{C})$ 互为正交补. n 维状态向量空间 R^n 可以表示为两个互相正交的子空间 $R(\bar{C}^T)$ 和 $N(\bar{C})$ 的直和，即

$$R^n = R(\bar{C}^T) \oplus N(\bar{C}). \tag{3.20}$$

这里 $R(\bar{C}^T)$ 是 p 维子空间，$N(\bar{C})$ 是 $(n-p)$ 维子空间.

把式 (3.2b)，(3.11a) 和 (3.10a) 代入式 (3.7) 中，得到

$$E\check{T} + L\check{C} = \check{K}, \tag{3.21}$$

$$E\tilde{T} = \tilde{K}. \tag{3.22}$$

式 (3.22) 表明，矩阵 $\tilde{K}$ 的 q 个行向量 $\tilde{\boldsymbol{k}}'_1, \tilde{\boldsymbol{k}}'_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{k}}'_q$ 是矩阵 $\tilde{T}$ 的 m 个行向量 $\tilde{\boldsymbol{t}}'_1, \tilde{\boldsymbol{t}}'_2, \cdots, \tilde{\boldsymbol{t}}'_m$ 的线性组合. 设 $\tilde{K}$ 的线性无关的行向量个数为 q_0，$q_0 = \text{rank}(\tilde{K})$，则 q_0 维值域空间 $R(\tilde{K}^T)$ 是 m 维值域空间 $R(\tilde{T}^T)$ 的一个子空间，即

$$R(\tilde{K}^T) \in R(\tilde{T}^T). \tag{3.23}$$

这样，$\tilde{T}$ 的 m 个行向量中必有 q_0 个行向量(为了讨论方便，假定 $\tilde{T}$ 的前 q_0 个行向量)，是值域空间 $R(\tilde{K}^T)$ 的一组基向量. 把这组基向量作为行向量构成一个 $q_0 \times (n-p)$ 矩阵 T_0，

$$T_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{t}}'_1 \\ \tilde{\boldsymbol{t}}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{t}}'_{q_0} \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

则

$$R(T_0^T) = R(\tilde{K}^T). \tag{3.25}$$

式 (3.25) 表明，T_0 和 $\tilde{K}$ 的行向量组相互等价.

同样，把 $(n-p)$ 维子空间 $N(\bar{C})$ 进一步表示为两个正交子空间的直和：

$$N(\bar{C}) = R(\tilde{K}^T) \oplus N(\tilde{K}), \tag{3.26}$$

$$N(\bar{C}) = R(T_0^T) \oplus N(T_0). \tag{3.27}$$

考虑到式 (3.25) 和子空间正交补的唯一性，故有

$$N(\tilde{K}) = N(T_0). \tag{3.28}$$

这里 $R(\tilde{K}^T)$，$R(T_0^T)$ 是 q_0 维的，$N(\tilde{K})$，$N(T_0)$ 是 $(n-p-q_0)$ 维的.

设 $(n-p) \times 1$ 列向量 $\boldsymbol{s}_k (k = 1, 2, \cdots, n-p-q_0)$ 是子空间 $N(\tilde{K})$ 和 $N(T_0)$ 的一组基向量，则

$$\tilde{K}\boldsymbol{s}_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-p-q_0, \tag{3.29}$$

$$T_0\boldsymbol{s}_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-p-q_0. \tag{3.30}$$

可见，基向量组 $\boldsymbol{s}_k (k = 1, 2, \cdots, n-p-q_0)$ 是齐次方程组 (3.29) 的基础解系. 它们可以根据给定的 $\tilde{K}$ 阵求出.

把 T_0 的行向量表达式 (3.24) 代入式 (3.30) 中，得到

$$\tilde{\boldsymbol{t}}'_j \boldsymbol{s}_k = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, q_0. \quad k = 1, 2, \cdots, n-p-q_0. \tag{3.31}$$

此齐次方程组的系数矩阵是由另一齐次方程组 (3.29) 的基础解系构成的，所以它是满秩

的，且只与指定的 $\bar{K}$ 阵有关，而与矩阵 $\bar{A}$，$\bar{C}$，F 无关．齐次方程组 (3.31) 是根据观测器的输出收敛于 $\bar{K}\bar{x}$ 的要求导出的，故称它为 $\tilde{T}$ 的输出约束方程组．

联立求解 $\tilde{T}$ 的动态约束方程组 (3.15) 和输出约束方程组 (3.31)，可以求得 $\tilde{T}$ 的 m 个行向量，令

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T_0 \\ \cdots \\ \tilde{\boldsymbol{t}}'_{q_0+1} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{t}}'_m \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$E = [E_0 \vdots 0 \cdots 0]. \tag{3.33}$$

式中 E_0 是 $q \times q_0$ 子阵．把式 (3.32) 和 (3.33) 代入式 (3.22) 中，得到 $E_0 T_0 = \tilde{K}$．因 T_0 是满秩的，逆阵 $(T_0 T_0^T)^{-1}$ 存在，故有

$$E_0 = \tilde{K} T_0^T (T_0 T_0^T)^{-1}. \tag{3.34}$$

综上所述，计算多输出系统的多线性函数观测器全部参数的方程式和表达式为：

$$\tilde{K}\boldsymbol{s}_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n - p - q_0. \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{t}_{i+1} - F\boldsymbol{t}_i = 0 \quad, i \in \{1, 2, \cdots, \sigma_1 - 2, \sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_2 - 2, \sigma_2 + 1, \cdots, \sigma_p - 2\}, \tag{3.36a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{t}}'_j \boldsymbol{s}_k = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, q_0. \quad k = 1, 2, \cdots, n - p - q_0, \tag{3.36b}$$

$$\check{T} = F[\boldsymbol{t}_{\sigma_1 - 1} \boldsymbol{t}_{\sigma_2 - 1} \cdots \boldsymbol{t}_{\sigma_p - 1}], \tag{3.37}$$

$$E_0 = \tilde{K} T_0^T (T_0 T_0^T)^{-1}, \tag{3.38}$$

$$E = [E_0 \vdots 0 \cdots 0], \tag{3.39}$$

$$G = (\bar{T}\check{A} - F\check{T})\check{C}^{-1}, \tag{3.40}$$

$$L = (\check{K} - E\check{T})\check{C}^{-1}, \tag{3.41}$$

$$H = \bar{T}\bar{B}. \tag{3.42}$$

2. 多线性函数观测器动态阶数的下限

观测器的动态阶数 m 就是其动态矩阵 F 的阶数，也等于 $\bar{T}$ 阵的行向量的个数．根据式 (3.23) 可得

$$m \geqslant q_0 = \mathrm{rank}(\tilde{K}). \tag{3.43}$$

方程组(3.36)以 $\tilde{T}$ 的全部元素作为未知数，其总数是 $m(n-p)$．当 $d_i \geqslant 2$，$i = 1, 2, \cdots, p$ 时，动态约束方程组 (3.36a) 含有方程式 $m(n-2p)$ 个；输出约束方程组 (3.36b) 含有方程式 $q_0(n-p-q_0)$ 个．故 $\tilde{T}$ 的方程组所包含方程式的总数是 $m(n-2p) + q_0(n-p-q_0)$．如上所述，式 (3.36a) 和 (3.36b) 的系数矩阵是满秩的．前者只与 F 阵有关，后者只与 $\tilde{K}$ 阵有关．因此，在 F，$\tilde{K}$ 为任意的情况下，联立方程组 (3.36) 的系数矩阵也是满秩的．这样，$\tilde{T}$ 有非零解的必要条件是方程组 (3.36) 的未知数的总数大于方程式的总数．故得到

$$m > q_0(n-p-q_0)/p, \quad 当\ d_i \geqslant 2,\ i = 1, 2, \cdots, p. \tag{3.44}$$

同时考虑式 (3.43) 和 (3.44) 就得到观测器阶数的下限 $m_{\min}$ 的表达式

$$m_{\min} = \max(q_0, q_1). \tag{3.45}$$

式中

$$q_1 = 1 + \mathrm{INT}[q_0(n - p - q_0)/p], \quad d_i \geqslant 2, \quad i = 1, 2, \cdots, p. \tag{3.46}$$

这里 INT[·] 表示不大于方括号内的数的最大整数.

当 q_0 或 $q_1 \geqslant n - p$ 时,应先建造 $(n - p)$ 阶的降阶状态观测器. 然后再构成估计 $K\boldsymbol{x}$ 的多线性函数观测器. 因此,观测器阶数的上限 $m_{\max}$ 是

$$m_{\max} = n - p. \tag{3.47}$$

综上所述,得到

定理 3.1. 设系统 (A, B, C) 完全可观, $\bar{T}$ 是联系它的等价系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 的状态向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和多线性函数观测器的状态向量 $\boldsymbol{z}$ 的 $m \times n$ 矩阵,则使 $\tilde{T}$ 的齐次方程组(3.36)有非零解和 $\tilde{T}$ 的子阵 T_0 满秩的 m 的最小值就是系统 (A, B, C) 的 $K\boldsymbol{x}$ 的多线性函数观测器的最低动态阶数. m 值仅与预先指定的矩阵 $\bar{K}$ 的子阵 $\tilde{K}$、选定的动态特性矩阵 F 以及系统的可观性指数组 $d_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 有关.

四、算法与举例

1. 最低阶多线性函数观测器的算法

1) 把待观测系统 (A, B, C) 化为可观标准形的等价系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, 找出变换矩阵 Q 和可观性指数组 $d_i(i = 1, 2, \cdots, p)$. 然后利用式(3.2)和(3.9)求得 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ 和 $\bar{K}$. 若 C 阵非满秩, 应将其中线性相关的行向量划去, 仅保留线性无关的行向量组. 当出现 $d_i = 1$, $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ 时, 仅需考虑原系统中与 $d_i > 1$, $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ 相联系的那些状态变量组成的子系统.

2) 由式(3.43), (3.45), (3.46), (3.47) 确定观测器动态阶数的上限和下限.

3) 确定观测器的动态特性矩阵 F. 设 $m = m_{\min}$, 选定 m 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, 则特征多项式是

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m) = \lambda^m + f_1\lambda^{m-1} + \cdots + f_{m-1}\lambda + f_m.$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_1 \end{bmatrix}.$$

这里, F 和 A 不应有相同的特征值.

4) 找出零空间 $N(\tilde{K})$ 的基向量组 $\boldsymbol{s}_k(k = 1, 2, \cdots, n - p - q_0)$.

齐次方程组 $\tilde{K}\boldsymbol{s}_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n - p - q_0)$ 的基础解系就是待求的基向量组.

5) 确定线性变换 $\bar{T}$, 求解多线性函数观测器的齐次方程组:

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}_{i+1} - F\boldsymbol{t}_i = 0, & i \text{ 在 } \{1, \cdots, \sigma_1 - 2, \sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_2 - 2, \sigma_2 + 1, \cdots, \sigma_p - 2\} \\ & \text{中选 } (n - 2p) \text{ 个}. \\ \tilde{\boldsymbol{t}}'_j \boldsymbol{s}_k = 0, & j \text{ 在} \{1, 2, \cdots, m\} \text{ 中任意选 } q_0 \text{ 个}; \ k = 1, 2, \cdots, n - p - q_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

必须指出, i 的可能取值范围是下列 p 个子集: $\{1, 2, \cdots, \sigma_1 - 2\}$, $\{\sigma_1 + 1, \sigma_1 + 2, \cdots, \sigma_2 - 2\}$, $\cdots$, $\{\sigma_{p-1} + 1, \sigma_{p-1} + 2, \cdots, \sigma_p - 2\}$. 具体的算法是依次计算每个子

集的首末两个元素．若末元素大于首元素，则补充中间元素使成为自然数集，它的每个元素都是 i 的取值；若首、末元素相等，则只有首元素是 i 的取值；若首元素大于末元素，则该子集不是 i 的取值．

如果无论如何选择 j 的值，上述齐次方程组均无非零解，则需要把 m 值增加 1，然后返回到第 3 步．

适当选定齐次方程组的自由未知数和下标 j 的值，使求出的子阵 T_0 的各行向量线性无关．下标 i 值的选择应使齐次方程组 (4.1) 的系数矩阵出现零列向量的个数为最少．

对于降阶状态观测器，$m = n - p$，$K = I_n$（n 阶单位阵）．因此，$\bar{K} = Q$，$q_0 = \operatorname{rank}(\tilde{K}) = n - p$．这时零空间 $N(\tilde{K})$，$N(T_0)$ 消失．$\tilde{T}$ 和 T_0 都变成为 $(n-p)$ 阶方阵．考虑到 $(n-p)$ 阶单位阵 I_{n-p} 的行向量组是满秩子阵 $\tilde{K}$ 的值域空间 $R(\tilde{K}^T)$ 的一组基向量，所以，当计算降阶状态观测器时，可取 $\tilde{T} = T_0 = I_{n-p}$．

6）由式 (3.37)—(3.42) 确定矩阵 E，G，L 和 H．对于降阶状态观测器，$E = \tilde{K}$．

2. 举例

例 1. 已知完全可观的多输入多输出系统

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \bar{B} = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \quad \bar{C} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

指定 $\bar{K} = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$，试设计具有预期特征值的最低阶多线性函数观测器．

1）给定的系统已是可观标准形．$n = 5$，$p = 2$，$q = 2$，$d_1 = 3$，$d_2 = 2$．

2）$m_{\max} = n - p = 5 - 2 = 3$．$q_0 = \operatorname{rank}(\tilde{K}) = 2$．$q_1 = 1 + \operatorname{INT}[q_0(n - p - q_0)/p] = 1 + 1 = 2$．所以，$m_{\min} = \max(q_0, q_1) = 2$．

3）令 $m = 2$，预期特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$（非 $\bar{A}$ 的特征值），则 $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$．

4）找基向量组 s_k $(k = 1)$．$\tilde{K}s_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & & 1 & 2 \end{bmatrix} s_1 = 0$，$s_1 = [-3\ 1\ 1]^T$．

5）求解 $\tilde{T}$ 的齐次方程组．$i = 1$；$j = 1, 2$；$k = 1$．

$$\begin{cases} t_2 - Ft_1 = 0, \\ \tilde{t}_1' s_1 = 0, \\ \tilde{t}_2' s_1 = 0. \end{cases}$$

令 $t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，解之可得 $t_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $t_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$．

$$\tilde{T} = T_0 = [t_1 t_2 | t_4] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

不难看出，$\tilde{T}$ 的两个行向量线性无关．

$$\check{T} = [t_3 t_5] = F[t_2 t_4] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{T}=[t_1t_2t_3 \mid t_4t_5]=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & -1 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -1 & 5\end{array}\right].$$

6）计算矩阵 E, G, L 和 H.

$$E=E_0=\tilde{K}\tilde{T}^T(\tilde{T}\tilde{T}^T)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$G=(\bar{T}\check{A}-F\check{T})\check{C}^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & -1\\0 & 0\\1 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-2 & 5\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}18 & 17\\-2 & 6\end{bmatrix}.$$

$$L=(\check{K}-E\check{T})\check{C}^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-2 & 5\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 5\\-2 & -6\end{bmatrix}.$$

$$H=\bar{T}\bar{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 1\\1 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\-1 & 6\end{bmatrix}.$$

不难看出，矩阵 G, H, E, L 的解不是唯一的，但每一组解都构成一个最低阶多线性函数观测器．它的输出量等于原系统的状态估值向量 $\hat{x}$ 的线性变换 $K\hat{x}$．当 $K=I_n$ 时，得到降阶状态观测器．它的输出量就是原系统的状态估值向量 $\hat{x}$．可见，利用本方法设计降阶状态观测器不仅计算便捷，而且观测器的结构也简单．

五、结 论

本文发展了一种为连续线性时不变多输入多输出系统设计最低阶多线性函数观测器的时域方法．用此法设计出来的观测器具有最低的动态阶数，且它的极点可以任意配置．

本文提供的算法是直接从多变量系统得出的，推导过程中利用了多变量系统动力学方程的可观标准形，但不是利用它把多输出系统分解为若干个单输出的子系统．使用可观标准形的目的是利用它能把多变量系统的全部信息集中于系统矩阵 $\bar{A}$ 和 $\bar{C}$ 的某些特定列上的性质，从而把最低阶多线性函数观测器的不易求解的矩阵方程变换为易于求解的齐次方程组和一些简单的矩阵运算．用这种算法求出的多输出系统观测器的参数矩阵不是唯一的，但它们都是最低阶的．

本文提供的算法，不仅适用于计算多输入多输出系统的最低阶多线性函数观测器，而且也可用于设计多输入多输出系统的单线性函数观测器和降阶状态观测器以及单输出系统的各种观测器．在使用本方法时，实际上不必区分单输出和多输出系统、线性函数观测器和降阶状态观测器以及单线性函数和多线性函数观测器，因为本方法是一种设计观测器的普遍适用的方法．

参 考 文 献

[1] D. G. Luenberger, Observing the State of a Linear System, *IEEE Tr.*, MIL-8 (1964), 74—80.
[2] D. G. Luenbeger, Observers for Multivariable Systems, *IEEE Tr.*, AC-11 (1966), 190—197.
[3] D. G. Luenberger, An Introduction to Observers, *IEEE Tr.*, AC-16 (1971), 596—602.
[4] T. E. Fortmann & D. Williamson, Design of Low-order Observers for Linear Feedback Control Laws, *IEEE Tr.*, AC-17 (1972), 301—308.
[5] J. R. Roman & T. E. Bullock, Design of Minimal Order State Observers for Linear Functions of the State via Realization Theory, *IEEE Tr.*, AC-20 (1975), 613—622.
[6] W. A. Wolovich, Linear Multivariable System, Springer-verlag, New York, (1974).

A NEW METHOD OF DESIGNING MINIMAL ORDER OBSERVERS FOR LINEAR FUNCTIONS OF THE STATE VECTOR

ZHANG ZHONGJUN
(*Shanghai Jiaotong University*)
CHEN LIANGAN
(*Shanghai Precision Machinery Corporation*)

ABSTRACT

This paper discusses time-domain method of designing observers for linear functions of the state vector of the continuous, linear, time-invariant, MIMO systems. The observers thus designed have minimal order and their poles may be assigned arbitrarily. The algorithm developed in this paper can be used to design the minimal order observers for linear functions of the state vector and the reduced order state observers of multi-output systems.

一九八二年全国自动化技术应用学术交流年会在青岛举行

中国自动化学会应用委员会于一九八二年十月十四日至廿日在青岛召开全国自动化技术应用学术交流年会，来自全国九十二个单位的一百三十八名代表参加了大会.

会上冯纯伯、韩志刚和钟延炯等三同志介绍了第六届国际辨识会议的情况，吴智铭作了“控制系统计算机辅助设计技术综述”报告. 会议分四个小组宣读了九十二篇论文. 论文内容涉及到石油、电力、化工、冶金、机械、纺织、轻工、社会经济、农业、生态、军工和基础理论应用等领域，绝大部分论文都有很强的应用背景，许多成果已在国民经济中得到应用，取得了显著效果.

本届年会的特点是自动化技术应用的领域有所扩大，已发展到社会经济、银行管理和生态控制等方面；系统辨识，包括自适应，自校正和计算机辅助设计方面的文章较多；许多年轻科技工作者开始登上报告讲坛，这是我国自动化科学事业兴旺发达的标志.

会议期间召开了计算机辅助设计座谈讨论会，与会者希望科学院自动化学科组能在这方面统一规划协调，并给承担任务的单位一定的资助，以能加速我国自动化技术的推广应用. 会议期间还召开了应用委员会会议. 决定下届年会在八四年五月举行.

（蒋中鹏）