第 9 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 9. No. 1
1983 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1983

极小相位 FIR 数字滤波器的设计方法

贾 沛 璋
（中国科学院系统科学研究所）

摘 要

本文在文献[2]的基础上，提出一种设计极小相位 FIR 数字滤波器的具体方法．该方法计算量小，且较准确，便于工程应用．

一、前 言

关于有限脉冲响应（FIR）数字滤波器的设计方法，在参考文献[1]中作了较全面的综述，对于如下形式的线性相位 FIR 数字滤波器：

$$y_k = \sum_{l=-N}^{N} h_l x_{k-l}, \tag{1}$$

其中 x_k 为输入，y_k 为输出，h_l 为脉冲响应系数，满足 $h_l = h_{-l} (1 \leqslant l \leqslant N)$． 文献 [1] 概括了三种主要设计方法： 1）窗函数方法； 2）频率采样方法； 3）切比晓夫最优逼近方法．式(1)的 FIR 数字滤波器适用于数字信号的事后处理．它的特点是输入信号经数字滤波器后相位无失真，但时间将滞后 NT（T 为采样时间间隔）．

对于如下形式的极小相位 FIR 数字滤波器：

$$y_k = \sum_{l=0}^{N} \mu_l x_{k-l}, \tag{2}$$

在文献[2]中提出了设计原理．该数字滤波器适用于数字信号的实时处理，其特点是一般仅产生较小的时间滞后，但输入信号的相位经数字滤波器后有一定失真． 该设计原理在具体设计时算法上有许多困难．

本文给出一种具体设计方法，算法的计算量较小，且较准确，能方便地设计出所需要的极小相位 FIR 数字滤波器．

二、线性相位 FIR 数字滤波器的设计方法

设需设计的带通数字滤波器的理想振幅响应为：

$$|H^*(f)| = \begin{cases} 1 & f \in (f_1^*, f_2^*) \\ 0, & f \in [0, f_1^*] \cup \left[f_2^*, \dfrac{1}{2T}\right] \end{cases}. \tag{3}$$

其中 f 为圆频率(单位赫兹)，T 为采样时间间隔，$H^*(f)$ 为理想数字滤波器的频率响应．

为设计形式(2)的极小相位数字滤波器，需首先依据切比晓夫最优逼近方法，按(3)式

本文于 1981 年 3 月 28 日收到．

的通频带要求设计形式(1)的线性相位 FIR 数字滤波器，即设计在通带 (f_1^*, f_2^*) 与阻带中均具有等波动的频率响应．形式(1)的数字滤波器的频率响应为：

$$H_0(f) = h_0 + 2\sum_{l=1}^{N} h_l \cos 2\pi l f T. \tag{4}$$

它在开区间 $\left(0, \frac{1}{2T}\right)$ 内必定有$N-1$个极值点，加上两端点(这两点显然是极值点)，共$N+1$个极值点．假设这些极值点中有 n_1 个分布在频率域 $[0, f_1^*]$ 中，有 n_2 个分布在通频带 (f_1^*, f_2^*) 中，有 n_3 个分布在频率域 $\left[f_2^*, \frac{1}{2T}\right]$ 中，这里 $n_1+n_2+n_3=N+1$．按等波动的要求，应存在$N+1$个极值频率 $f_1, f_2, \cdots, f_{N+1}$，满足(以下均假定$N$取偶数)：

$$\begin{aligned} &H_0(f_i) = (-1)^i\delta_2, && i = 1, 2, \cdots, n_1. && (n_1\text{为奇数}) \\ &H_0(f_j) = 1 + (-1)^j\delta_1, && j = (n_1+1), \cdots, (n_1+n_2). && (n_2\text{为奇数}) \\ &H_0(f_k) = (-1)^k\delta_2, && k = (n_1+n_2+1), \cdots, (N+1). && (n_3\text{为奇数}) \end{aligned} \tag{5}$$

或

$$\begin{aligned} &H_0(f_i) = (-1)^{i+1}\delta_2, && i = 1, 2, \cdots, n_1. && (n_1\text{为偶数}) \\ &H_0(f_j) = 1 + (-1)^{j+1}\delta_1, && j = (n_1+1), \cdots, (n_1+n_2). && (n_2\text{为奇数}) \\ &H_0(f_k) = (-1)^{k+1}\delta_2, && k = (n_1+n_2+1), \cdots, (N+1). && (n_3\text{为偶数}) \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $f_1 = 0$，$f_{N+1} = \frac{1}{2T}$．即在阻带中具有最大偏差为 δ_2 的等波动，在通带中具有最大偏差为 δ_1 的等波动，而在通带与阻带之间有一过渡带．δ_1, δ_2 根据设计要求选取．δ_1, δ_2 愈小，过渡带将愈宽，因此要综合权衡．

若已知上述$N+1$个极值点，把(4)式代入(5)或(6)式，就可解出 $h_0, h_1, \cdots h_N$．但一般极值点并不已知，此时采用循环迭代算法，先给出一组极值点猜想值 $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \cdots f_{N+1}^{(0)}$ $\left(\text{其中恒取 } f_1^{(0)} = 0,\ f_{N+1}^{(0)} = \frac{1}{2T}\right)$，从下述线性方程组：

$$\begin{aligned} &h_0 + 2\sum_{l=1}^{N} h_l \cos 2\pi l f_s^{(0)} T = (-1)^{s+n_1+1}\delta_2, && s = 1, 2, \cdots, n_1. \\ &h_0 + 2\sum_{l=1}^{N} h_l \cos 2\pi l f_s^{(0)} T = 1 + (-1)^{s+n_1+1}\delta_1, && s = (n_1+1), \cdots, (n_1+n_2). \\ &h_0 + 2\sum_{l=1}^{N} h_l \cos 2\pi l f_s^{(0)} T = (-1)^{s+n_1+1}\delta_2, && s = (n_1+n_2+1), \cdots, (N+1). \end{aligned} \tag{7}$$

解出 $h_0, h_1, \cdots, h_N$，作为第一次近似，然后把它代入(4)式，计算在区间 $\left[0, \frac{1}{2T}\right]$ 的如下稠密集 $\{f(n)\}$ 上的频率响应 $H_0(f)$：$f(n) = n\Delta f$，$n = 0, 1, 2, \cdots, M$．式中 $M\Delta f = 1/2T$．如 $H_0(f(n-1)) < H_0(f(n)) > H_0(f(n+1))$，则 $f(n)$ 为极大值点；如 $H_0(f(n-1)) > H_0(f(n)) < H_0(f(n+1))$，则 $f(n)$ 为极小值点．记这两判别式为(8)式．

在开区间 $\left(0, \frac{1}{2T}\right)$ 内找到$N-1$个极值点，加上两端点 $f=0$ 和 $f=\frac{1}{2T}$，共$N+$

1 个极值点，作为极值频率的第一次近似，记为 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \cdots, f_{N+1}^{(1)}$，再用它们取代方程(7)中的 $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \cdots, f_{N+1}^{(0)}$，重新解出 $h_0, h_1, \cdots, h_N$，再由(8)的两判别式找到极值频率的第二次近似值．如此循环迭代，直到满足下述条件为止：

$$\begin{aligned} &|H_0(f_s^{(m)})| \leqslant \delta_2(1+\varepsilon), \quad s = 1, 2, \cdots, n_1, (n_1+n_2+1), \cdots, (N+1). \\ &|H_0(f_s^{(m)}) - 1| \leqslant \delta_1(1+\varepsilon), \quad s = (n_1+1), \cdots, (n_1+n_2). \end{aligned} \tag{9}$$

这里 $f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \cdots, f_{N+1}^{(m)}$ 为极值频率的第 m 次近似值．ε 为小量，根据设计要求及可能达到的精度选定．比如可取 $\varepsilon = 10^{-3}$—10^{-4}．有时预先无法知道所选取的 ε，此时可限制循环迭代的次数．如迭代 10 次至 15 次便终止迭代，取最后一次 $h_0, h_1, \cdots, h_N$ 的迭代值，作为脉冲响应系数的估计值．

极值频率猜想值 $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \cdots, f_{N+1}^{(0)}$ 和稠密集中的间隔 Δf 的选取是有联系的．猜想值取得好，Δf 可取得较小．根据经验，猜想值 $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \cdots, f_{N+1}^{(0)}$ 可取在区间 $\left[0, \dfrac{1}{2T}\right]$ 上等间隔分布，其中 $f_1^{(0)} = 0$，$f_{N+1}^{(0)} = \dfrac{1}{2T}$．但在通带与阻带之间需留出一定的过渡带，过渡带的宽度相当于两相邻极值频率间隔的一倍半至二倍．Δf 的大小决定了最后求出的极值频率的精度，因此 Δf 应根据精度要求选取，但选得过小，在用判别式(8)确定极值频率时，由于计算误差会出现虚假的极值频率，使在循环迭代时得出大于 $N+1$ 的极值频率，此时迭代会不收敛，因此 Δf 要选得适当，既要足够小，又要不致出现虚假极值频率．通常 Δf 可取比两相邻极值点的间隔小 20 倍左右的值．

(5)，(6)式中 n_1, n_2, n_3 的值应根据通带与阻带的宽度及极值频率大致等间隔分布这两个因素确定．如通带为 (f_1^*, f_2^*)，此时可用下式估计 n_2，$n_2 = \left[(f_2^* - f_1^*) * \dfrac{1}{2NT}\right]$，这里[ ]表示取整数部分，$n_2$ 必须取奇数．如果 n_1, n_2, n_3 无论怎样选取，都使所求出的频率响应的通带、阻带与理想值不吻合，这时应调节 N 的大小，以便求得所需要的频率响应．

上述设计方法不仅适用于设计形如(3)式的带通数字滤波器，也同样适用于设计低通与高通数字滤波器．前者，取(3)式中的 $f_1 = 0$，(5)，(6)式中的 $n_1 = 0$；后者，取(3)式中的 $f_2 = \dfrac{1}{2T}$，(5)，(6)式中的 $n_3 = 0$．对带阻数字滤波器，也可按类似方法设计．

三、极小相位 FIR 数字滤波器的设计原理

按照文献[2]叙述的原理，先根据上面求出的 $H_0(f)$ 构造频率响应为

$$H_1(f) = (h_0 + \delta_2) + 2\sum_{l=1}^{N} h_l \cos 2\pi l f T \tag{10}$$

的线性相位数字滤波器．$H_1(f)$ 以满足下式的那些极值频率为双重零点：

$$H_0(f_i) = -\delta_2. \tag{11}$$

由(5)式，当 n_1, n_3 为奇数时，这些 f_i 对应于 $i = 1, 3, 5, \cdots, n_1, (n_1+n_2+1), (n_1+n_2+3), \cdots, (N+1)$ 的极值频率．当 n_1, n_3 为偶数时，由(6)式，这些 f_i 对应于 $i = 2, 4, 6, \cdots n_1, (n_1+n_2+1), (n_1+n_2+3), \cdots, N$ 的极值频率．即对这些 f_i，

有

$$H_1(f_i) = 0,\quad \frac{d}{df}H(f_i) = 0. \tag{12}$$

按文献[2]所叙述的原理设计的形式(2)的极小相位数字滤波器，具有如下的振幅响应:

$$|H(f)|^2 = H_1(f), \tag{13}$$

或者写为

$$|H(z)|^2 = H_1(z),\quad (z = \exp(j2\pi fT),\ j = \sqrt{-1}). \tag{14}$$

其中

$$H_1(z) = (h_0 + \delta_2) + \sum_{l=1}^{N} h_l(z^l + z^{-l}).$$

为了求得满足(14)式的传递函数$H(z)$,把 $H_1(z)$按零点形式写出. 令 $h'_0 = (h_0 + \delta_2)/h_N$, $h'_{N+l} = h_l/h_N$, $h'_{N-l} = h_l/h_N$, $(l = 1, 2\cdots N)$. 则

$$H_1(z) = h_N z^{-N}\sum_{l=0}^{2N} h'_l z^l. \tag{15}$$

上式右端为 z 的 $2N$ 阶多项式,应有 $2N$ 个零点，设这些零点为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2N}$，由于多项式的系数是对称的，因此如有零点 z_s，必有零点 z_s^{-1}. 由(12)式，$H_1(z)$ 的位于单位圆上的已知双重零点为：当 n_1, n_3 为奇数时，有 $(n_1 + n_3)$ 个双重零点

$$1, -1, \exp(j2\pi f_iT), \exp(-j2\pi f_iT),\ i = 3, 5, \cdots, n_1, (n_1 + n_2 + 1), (n_1 + n_2 + 3), \cdots, (N-1). \tag{16}$$

当 n_1, n_3 为偶数时，有 $(n_1 + n_3)$ 个双重零点

$$\exp(j2\pi f_iT),\ \exp(-j2\pi f_iT),\ i = 2, 4, \cdots n_1, (n_1 + n_2 + 1), (n_1 + n_2 + 3), \cdots N. \tag{16$'$}$$

记这些位于单位圆上的双重零点为 $z_1, z_2, \cdots, z_{(n_1+n_3)}$. 由 $2N = 2*(n_1 + n_3) + 2*(n_2 - 1)$，还需求出其余不位于单位圆上的 $2*(n_2 - 1)$个零点. 根据零点的性质，未知的 $2*(n_2 - 1)$个零点，必有一半位于单位圆内，另一半位于单位圆外. 记位于单位圆内的 $(n_2 - 1)$ 个零点为 $z_{(n_1+n_3+1)}, z_{(n_1+n_3+2)}, \cdots, z_N$，单位圆外的 $(n_2 - 1)$ 个零点为它们的倒数. 如果能从(15)式右端的多项式求出这 $2*(n_2 - 1)$ 个未知的零点，则 $H_1(z)$ 可表示为

$$H_1(z) = h_N z^{-N}\prod_{l=1}^{(n_1+n_3)}(z - z_l)(z - z_l)\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}(z - z_s)(z - z_s^{-1})$$

$$= h_N\prod_{l=1}^{N}(-z_l^{-1})\prod_{l=1}^{(n_1+n_3)}(z - z_l)(z^{-1} - z_l^{-1})\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}(z - z_s)(z^{-1} - z_s).$$

由于N为偶数，故 $(-1)^N = 1$. 由(16)，(16)$'$式，有 $\prod_{l=1}^{(n_1+n_3)} z_l^{-1} = \prod_{l=1}^{(n_1+n_3)} z_l = (-1)^{n_1}$.
另外，$z_l^{-1} = \bar{z}_l, {}_{l=1,2,\cdots,(n_1+n_3)}$，$z^{-1} = \exp(-j2\pi fT) = \bar{z}$ ($\bar{z}$ 为 z 的共轭)，从而

$$H_1(z)=(-1)^{n_1}h_N\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}z_s^{-1}\prod_{l=1}^{(n_1+n_3)}(z-z_l)(\bar{z}-\bar{z}_l)\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}(z-z_s)(\bar{z}-z_s).$$

由于(15)式右端多项式的系数为实系数，因此它的零点要么是实的，要么共轭成对出现，从而 $\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}(\bar{z}-z_s)=\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}(\bar{z}-\bar{z}_s)$，由此得到

$$H_1(z)=(-1)^{n_1}h_N\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}z_s^{-1}\prod_{l=1}^{N}(z-z_l)(\bar{z}-\bar{z}_l). \tag{17}$$

取极小相位数字滤波器的传递函数为

$$H(z)=z^{-N}\sqrt{(-1)^{n_1}h_N\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}z_s^{-1}\prod_{l=1}^{N}(z-z_l)}. \tag{18}$$

它显然满足(14)式，且在极值频率 $f_1, f_2, \cdots, f_{n_1}, f_{n_1+n_2+1}, f_{n_1+n_2+2}, \cdots, f_{N+1}$ 处，交替地有振幅响应

$$|H(f_i)|=0,\quad |H(f_j)|=\sqrt{2\delta_2}. \tag{19}$$

在极值频率 $f_{n_1+1}, f_{n_1+2}, \cdots, f_{n_1+n_2}$ 处，交替地有振幅响应

$$|H(f_i)|=\sqrt{1+\delta_1+\delta_2},\quad |H(f_j)|=\sqrt{1-\delta_1+\delta_2}. \tag{20}$$

而在对应于原有 $H_0(f)=1$ 的频率处，有 $|H(f)|=\sqrt{1+\delta_2}$，为在这些频率处也有 $|H(f)|=1$，将(18)式改为

$$H(z)=z^{-N}\sqrt{(-1)^{n_1}h_N(1+\delta_2)^{-1}\prod_{s=(n_1+n_3+1)}^{N}z_s^{-1}\prod_{l=1}^{N}(z-z_l)}. \tag{21}$$

这时，(19)式改为

$$|H(f_i)|=0,\quad |H(f_j)|=\sqrt{2\delta_2/(1+\delta_2)}. \tag{19$'$}$$

(20)式改为

$$|H(f_i)|=\sqrt{(1+\delta_1+\delta_2)/(1+\delta_2)},\quad |H(f_j)|=\sqrt{(1-\delta_1+\delta_2)/(1+\delta_2)}, \tag{20$'$}$$

表明所求出的极小相位数字滤波器的振幅响应 $|H(f)|$ 在阻带有最大偏差 $\sqrt{\frac{2\delta_2}{(1+\delta_2)}}$，在通带有最大偏差 $\sqrt{1+\delta_1/(1+\delta_2)}-1$. 因此第二节中的 δ_1, δ_2 应根据这两个最大偏差的要求选取，同时兼顾过渡带的宽度.

形式(2)的极小相位数字滤波器的传递函数为

$$H(z)=\sum_{l=0}^{N}\mu_l z^{-l}. \tag{22}$$

将(21)式右端展开为 z^{-1} 的N阶多项式，然后与(22)式相比较，即可求得所需要的极小相位数字滤波器的脉冲响应系数 $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_N$.

四、极小相位FIR数字滤波器的设计方法

按上述原理进行具体设计时，首先遇到如何求(15)式右端 $2N$ 阶多项式的零点问题．这里 $2N$ 通常是 10^2 量级．它在单位圆上有 (n_1+n_3) 个双重零点，前面说这些零点是已知的，但实际上，在求出 $H_0(f)$ 后用(10)式构造的 $H_1(f)$ 并不严格具有这些双重零点，因为(11)式并不严格成立．由(9)式，对应于(11)式中的 f_i，我们仅有

$$H_0(f_i) \geqslant -\delta_2(1+\varepsilon). \tag{11$'$}$$

式中 ε 不可能取得过小，否则将不能满足(9)式．因此必须进一步构造 $H_0(f)$，使之严格满足(11)式，同时需求出剩下的位于单位圆内的 (n_2-1) 个零点．为此，提出如下算法．

在求得 $H_0(f)$ 后，不按(10)式构造 $H_1(f)$，而取它的传递函数为：

$$H_1(z) = z^{-N}\prod_{l=1}^{(n_1+n_3)}(z-z_l)(z-z_l)\left(\sum_{l=0}^{n_p} a_l z^{n_p-l}\right). \tag{23}$$

其中 $n_p = 2*(n_2-1)$．为保证 $H_1(z)$ 的零点按 z_s，z_s^{-1} 成对出现，取 $a_l = a_{n_p-l}(l=0,1,\cdots,(n_2-1))$，上式右端 z_l 为已知位于单位圆上的双重零点，已由(16)，(16)$'$式给出．显然，这样构造的 $H_1(z)$将严格具有这些双重零点，且其余的 $2*(n_2-1)$ 个零点均包含在上式右端的 n_p 阶多项式中．为了确定该多项式的系数，要求对应于 $H_0(f)$ 在通带中的极值频率处，满足

$$H_1(f_{n_1+j}) = 1+\delta_2+(-1)^{j+1}\delta_1,\quad j=1,2,\cdots,n_2. \tag{24}$$

由(23)式，$H_1(z)$ 所对应的频率响应为：

$$H_1(f) = (-1)^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1+n_3}(2-2\cos 2\pi(f-f_l')T)\Big[a_{(n_2-1)} + \sum_{l=1}^{(n_2-1)} a_{n_2-1-l}2\cos 2\pi l f T\Big]. \tag{25}$$

其中 f_l' 对应(23)式中的 z_l，$z_l = \exp(j2\pi f_l' T)$．将(25)式代入(24)式，得到线性方程组

$$a_{(n_2-1)} + \sum_{l=1}^{(n_2-1)} a_{n_2-1-l}2\cos(2\pi l f_{n_1+j}T) = (1+\delta_2+(-1)^{j+1}\delta_1)/A_j,\quad j=1,2,\cdots,n_2. \tag{26}$$

其中

$$A_j = (-1)^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1+n_3}(2-2\cos 2\pi(f_{n_1+j}-f_l')T) = (-1)^{n_1}\left[\prod_{l=1}^{n_1+n_3} 2\sin\pi(f_{n_1+j}-f_l')T\right]^2.$$

由方程组(26)解出 a_0，a_1，$\cdots$，a_{n_2-1}，代入(23)式右端求和号中，获得 $2*(n_2-1)$ 阶多项式

$$a_0 \sum_{l=0}^{n_p} \left(\frac{a_l}{a_0}\right) z^{n_p-l}, \quad a_l = a_{n_p-l}, \quad l = 0, 1, \cdots, (n_2 - 1) \ . \tag{27}$$

要从上式求得其余 $2*(n_2-1)$个零点，一个办法是直接求上述多项式的零点;另一办法是,因(27)式系数是对称的,它的零点必以 z_s、z_s^{-1} 成对出现，记它的零点为 z_s, z_s^{-1} ($s = n_1+n_3+1, n_1+n_3+2, \cdots, N$)，则(27)式可表示为

$$a_0 \prod_{s=n_1+n_3+1}^{N} (z - z_s)(z - z_s^{-1}) = a_0 \prod_{s=n_1+n_3+1}^{N} [z^2 - (z_s + z_s^{-1})z + 1]. \tag{28}$$

因此求零点 z_s, z_s^{-1} 可转化为先求 $(z_s + z_s^{-1})$. 这样多项式的阶数可降低一半. 将(28)式右端展开,并与(27)式按 z 的同次幂项相比较,获得以 $(z_s + z_s^{-1})$ 为零点的多项式

$$a_0 \sum_{l=0}^{n_2-1} b_l z^{n_2-1-l}, \quad (b_0 = 1). \tag{29}$$

由此求得 (n_2-1) 个 $(z_s + z_s^{-1})$，再用二次方程求根的公式,求得 z_s, z_s^{-1}.

根据计算结果，上述两办法求得的零点 z_s, z_s^{-1} 很不准确，主要表现在最后设计出的极小相位数字滤波器的振幅响应 $|H(f)|$ 在通带与(20)′式比相差很大. 零点求不准的原因，是因(27)式的零点的实部均在 1 附近,而(29)式的零点的实部均在 2 附近. 由此,提出把(29)式变换为:

$$a_0 \sum_{l=0}^{n_2-1} d_l (z-2)^{n_2-1-l}, \quad (d_0 = 1). \tag{30}$$

由(26)式解出 $a_0, a_1, \cdots, a_{n_2-1}$ 后，通过变换求得(29)式中的 $b_1, b_2, \cdots, b_{n_2-1}$, 再通过变换求得(30)式中的 $d_1, d_2, \cdots, d_{n_2-1}$, 计算表明，这样求出的 d_l 的有效位数分别减少了 2—8 位. 这一方面说明 b_l 的前若干位仅对应于零点的整数位 2，因而它的实际有效位数被大大减少,这是使所求零点不准确的根本原因；另一方面也表明,要获得(30)式中的系数 d_l, 不能先从 a_l 求 b_l, 再由 b_l 求 d_l, 必须直接求得具有较长有效位数的 d_l 的精确值，这就要把解 a_l 的线性方程组(26)直接变换为解 d_l 的方程组. 可以证明,如令 $d_l^* = a_0 d_l$, d_l^* 满足线性方程组

$$\sum_{l=0}^{n_2-1} d^*_{n_2-1-l} (-F_j)^l = (1 + \delta_2 + (-1)^{j+1}\delta_1)/A_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n_2. \tag{31}$$

其中 $F_j = (2\sin \pi f_{n_1+j} T)^2$. A_j 的表达式与(26)式中的 A_j 相同.

由此方程组解得 $d_0^*, d_1^*, \cdots, d_{n_2-1}^*$, 由 $d_l = d_l^*/d_0^*$, $d_0^* = a_0$, 求得(30)式的系数 $a_0, d_1, d_2, \cdots, d_{n_2-1} (d_0 = 1)$，再从 (n_2-1) 阶多项式

$$\sum_{l=0}^{n_2-1} d_l Y^{n_2-1-l} \tag{32}$$

求出 (n_2-1) 个零点. 设这些零点为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2-1}$, 它们与原来(28)式中零点的关系为:

$$z_{n_1+n_3+s} + z^{-1}_{n_1+n_3+s} = 2 + Y_s, \quad s = 1, 2, \cdots, (n_2 - 1). \tag{33}$$

由此二次方程解出二个根

$$(1+Y_s/2)\pm\sqrt{(Y_s/2)^2+Y_s}. \tag{34}$$

其中 $z_{n_1+n_3+s}$ 对应于上两根中模小于 1 者．在获得了所需的N个零点后，由(21)式，极小相位数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 为：

$$H(z)=z^{-N}\sqrt{(-1)^{n_1}a_0(1+\delta_2)^{-1}\prod_{s=n_1+n_3+1}^{N} z_s^{-1}}\prod_{l=1}^{N}(z-z_l). \tag{21$'$}$$

展开上式右端的乘积，就可获得(22)式中的脉冲响应系数 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_N$．然而，由于N很大，如采取通常方法展开将带来很大误差，为得到脉冲响应系数的精确值，以保证得到预期的振幅响应 $|H(f)|$，提出如下的展开方法．因这N个零点(N为偶数)要么是实数，要么是共轭复数，因此设 $N=2n$，则可把(21)′式右端的乘积写为：

$$\prod_{l=1}^{N}(z-z_l)=\prod_{l=1}^{n}[z^2-(z_l+z_l')z+(z_l\cdot z_l')], \tag{35}$$

其中当 z_l 为复数时，z_l' 取它的共轭；当 z_l 为实数时，z_l' 也取实数．这样原复数域的乘积就转化为实数域的乘积．

(35)式右端所包含的 n 对零点中，必有一部分 $(z_l+z_l')\geqslant 0$，而另一部分 $(z_l+z_l')\leqslant 0$．记位于单位圆上的 $(n_1+n_3)/2$ 对共轭零点为

$$z_l=\exp(2\pi f_l'T),\quad l=1,2,\cdots,(n_1+n_3)/2. \tag{36}$$

当 $0\leqslant f_l'\leqslant 1/4T$ 时，$(z_l+\bar{z}_l)\geqslant 0$；当 $1/4T\leqslant f_l'\leqslant 1/2T$ 时，$(z_l+\bar{z}_l)\leqslant 0$．根据计算经验，在 n 对零点中，(z_l+z_l') 大于零的数目与小于零的数目相当．如果在展开(35)式右端时，先展开所有 (z_l+z_l') 大于零的项，再展开 (z_l+z_l') 小于零的项，这将导致展开式的各项系数的绝对值先是愈来愈大，而后又愈来愈小．这先增大后减小的结果，将损失多位有效数字．若计算机有八位字长，如果系数的绝对值增至最大时达到六位整数，而后又减至一位整数时，有效数字仅剩下三位．因此在展开(35)式右端时，应按下述原则安排展开顺序：1)使 (z_l+z_l') 与 $(z_{l+1}+z_{l+1}')$ 异号且绝对值相当；2)在此基础上，先展开单位圆上的零点，后展开单位圆内的零点．在作者计算的例子中，$N=60$，$n_1=2$，$n_2=9$，$n_3=50$，$\delta_1=0.1$，$\delta_2=0.002$．按 f_l' 从小到大的次序，在 26 对位于单位圆上的零点中，前 11 对 $(z_l+\bar{z}_l)$ 大于零，且绝对值单调下降；后 15 对 $(z_l+\bar{z}_l)$ 小于零，且绝对值单调增加．另外位于单位圆内的 4 对零点均是共轭的，且 $(z_l+\bar{z}_l)$ 均大于零．按 $(z_l+\bar{z}_l)$ 从大到小的顺序，位于单位圆上对应 f_1' 的零点排第一，四个位于单位圆内的零点排第二到第五，后面依次是位于单位圆上对应 $f_2',f_3',\cdots,f_{26}'$ 的零点，由此取(35)式中的展开顺序是(按上述编号)：$l=1,30,6,25,7,24,\cdots,15,16,2,29,3,28,4,27,5,26$．计算结果表明，按这个方法展开获得的脉冲响应系数有较高的精度，一般可保证得到满足要求的频率响应．

在上述计算例子中，通带的极大、极小振幅响应精确值((20)′式)应为 1.0487，0.9488，实际计算值中误差最大的为 1.0439，0.9531．阻带的极大振幅响应精确值((19)′式)应为 0.0632，实际计算值中误差最大的为 0.0607．

设由(35)式展开后得到

$$\prod_{l=1}^{N}(z-z_l)=\sum_{s=0}^{N}\mu_s' z^{N-s}. \tag{37}$$

则极小相位数字滤波器(2)的脉冲响应系数为

$$\mu_s=\mu_s'\sqrt{(-1)^{n_1}a_0(1+\delta_2)^{-1}\prod_{l=n_1+n_3+1}^{N}z_l^{-1}}. \tag{38}$$

上式右端根号内必定是正实数.

参 考 文 献

[1] L. R. Rabiner et al., FIR Digital filter Design techniques Using Weighted Chebyshev Approximation. *Proceedings of IEEE*. 63(1975), No. 4, 595.

[2] O. Herrmann and H. W. Schuessler, Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase. *Electronics Letters*, 6(1970), No. 11, 329.

A DESIGN METHOD OF FIR DIGITAL FILTERS WITH MINIMUM PHASE

Jia Peizhang

(*Institute of System Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Based on the design principle suggested in ref. [2] a design method of FIR digital filters with minimum phase is proposed in this paper. It has advantages of smaller amount of computation and higher accuracy and hence is suitable for engineering applications.

征 文 启 事

本刊自 9 卷 2 期起将组织“结合我国国情如何发展自动化科学技术”的讨论. 欢迎广大读者踊跃投稿. 来稿只要符合本专题，具体内容不限，文章一般不超过 4000 字. 稿件请寄北京中国科学院自动化所《自动化学报》编辑部收.

《自动化学报》编辑部