

一种用于多坐标系统的新的线性插补方法 ——比值积分法

吴年宇

(清华大学)

摘 要

本文在分析传统的 DDA 法的基础上引入了最优脉冲分配原则,用比值积分法实现线性插补,改善了多坐标线性插补系统的稳速性能。试验表明,该法精度高、稳速性能好。文中介绍了该法的原理、算法和应用实例。

一、引 言

切削轮廓复杂的零件时,控制机床同时动作的坐标往往有三个或三个以上,除直角坐标系外,还可能有旋转坐标系。在多维坐标系中实现零件轮廓控制一般只能用线性插补的方法。常用的可供选择的方案有数字积分法(简称 DDA 法)和脉冲乘法器法。脉冲乘法器法使用硬件较多,输出脉冲均匀性差,速度变化范围大。实用上较多选用 DDA 法,但此法稳速控制性能不理想。为了克服这一缺点,人们做过种种努力,如设置速度比例系数,增设稳速控制环节,采用左移规格化等等,但需增加硬设备的投资或编制程序的工作量。

本文是提出了以改善插补脉冲分配原则来改善稳速控制性能,用比值累加求和的新算法代替 DDA 法中对每个坐标分别累加求和的方法,获得了较理想的稳速控制性能,提高了插补精度,节省了硬件。为此,把这种包含有比值累加求和运算的线性插补方法称作比值积分法。

二、从 DDA 法到比值积分法

线性函数 $Y = f(X)$ 可用一段直线来描述。如图 1 所示,直线长度为 L , 起点为 $Q_1(X_1, Y_1)$, 终点为 $Q_2(X_2, Y_2)$ 。设直线上任意一点为 $Q_i(X_i, Y_i)$, 进行插补时, DDA 法的算法按下列方程进行。

$$X = X_1 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{X_2 - X_1}{N} \right]_i,$$
$$Y = Y_1 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{Y_2 - Y_1}{N} \right]_i.$$

实际系统中 $T_0 = N \cdot \Delta t, N = 2^n, n$ 为 0, 1, 2, 3 …… 等整数, 表示字长的有效位数, T_0

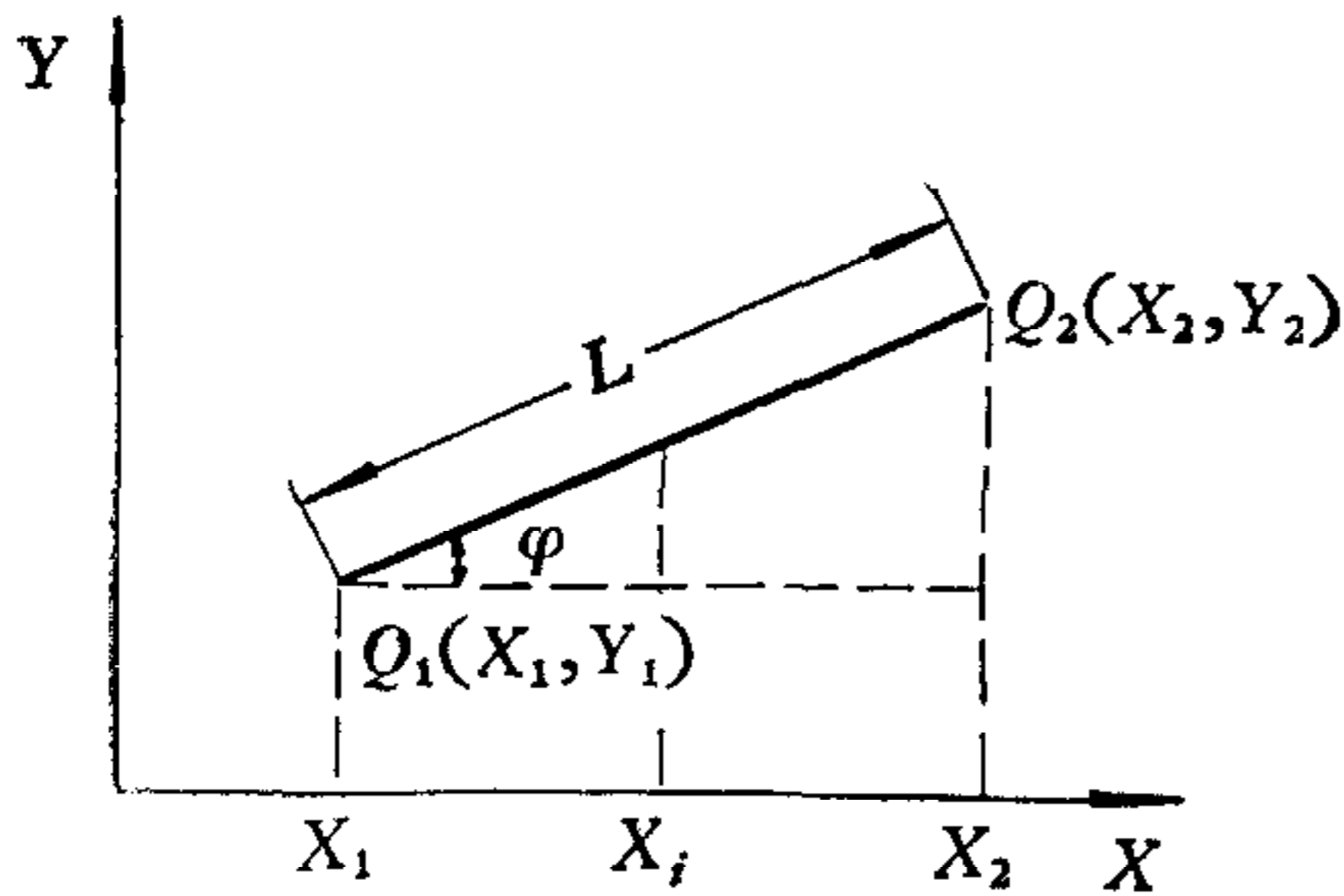


图 1 在固定坐标系中的线段

为插补到终值的时间. 设 $\Delta X = (X_2 - X_1)/N, \Delta Y = (Y_2 - Y_1)/N$, 当 ΔX 和 ΔY 的累加值大于或等于 1 时, 就在相应的方向发出一个脉冲, 设定一个脉冲的位移量后即能获得近似于直线的轨迹.

例如, Q_1 为 (0, 0), Q_2 为 (8, 3.5), 取 $N = 2^4 = 16$, 则 $\Delta X = 0.5, \Delta Y = 0.2187$, 运算过程如表 1 所示. 累加过程的时间图用图 2 中的曲线 A 表示, 脉冲分配及其插补轨迹见图 3.

从表 1 中可以看出, DDA 法脉冲分配可能出现四种情况: x 和 y 同时有脉冲输出;

表 1

累加次数	$\Sigma \Delta X$	$\Sigma \Delta Y$	输出脉冲		累加次数	$\Sigma \Delta X$	$\Sigma \Delta Y$	输出脉冲	
			\dot{X}	\dot{Y}				\dot{X}	\dot{Y}
1	0.5	0.2187	0	0	9	0.5	0.9683	0	0
2	1.0	0.4374	1	0	10	1.0	1.1870	1	1
3	0.5	0.6561	0	0	11	0.5	0.4057	0	0
4	1.0	0.8748	1	0	12	1.0	0.6244	1	0
5	0.5	1.0935	0	1	13	0.5	0.8431	0	0
6	1.0	0.3122	1	0	14	1.0	1.0618	1	1
7	0.5	0.5309	0	0	15	0.5	0.2805	0	0
8	1.0	0.7496	1	0	16	1.0	0.4992	1	0

x 和 y 均无脉冲输出; x 有输出而 y 无输出或者相反. 通常累加是由进给指令脉冲来控制的, 当 ΔX 值和 ΔY 值很小时, 需累加多次才有溢出输出, 即输出脉冲的频率很低, 合成速度极小. 若 V_F 为与进给指令脉冲相应的线速度, 则合成速度

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_F \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} / N = V_F L / N.$$

这表示合成速度与插补线段的长度有关. 当工艺要求的进给速度确定后, 实际的进给速度将随程序输入值 ($\Delta X, \Delta Y$ 值) 的变化而变化. 在 ΔX 和 ΔY 值等于 N 时, 合成速度最大, $V = \sqrt{2} V_F$, 其变化范围在插补平面直线时为 $(0 - \sqrt{2}) V_F$, 显然, 速度变化范围较大, $(V_{max} / V_{min}) \rightarrow \infty$.

为改善其速度性能, 首先应避免在累加一次后各坐标方向均无脉冲输出的情况. 为此, 必须改变脉冲的分配方式, 求出脉冲的最优分配条件. 所谓最优分配, 即对线性函数 $Y = f(X)$, 总可分解成时间的函数 $x(t)$ 和 $y(t)$, 只要 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足 $x(t) = p \cdot y(t)$, p 是实数, 即能实现线性插补. 显然 $x(t), y(t)$ 的组合不是唯一的, 那么, 怎样的组合脉冲分配最佳? 最优分配的依据又是什么? 从系统要求达到的目标看, 1) 系统的稳速性能好, 即插补输出脉冲的合成速度 V 应尽量接近进给指令脉冲的速度 V_F , 且不因直线的斜率或直线的长度而变更, 以获得最佳的切削效果 (精度高、光洁度好、刀具使用寿命长) 和最高的生产率; 2) 插补造成的误差小; 3) 易于实现控制; 4) 设备投资小. 下面以稳速性

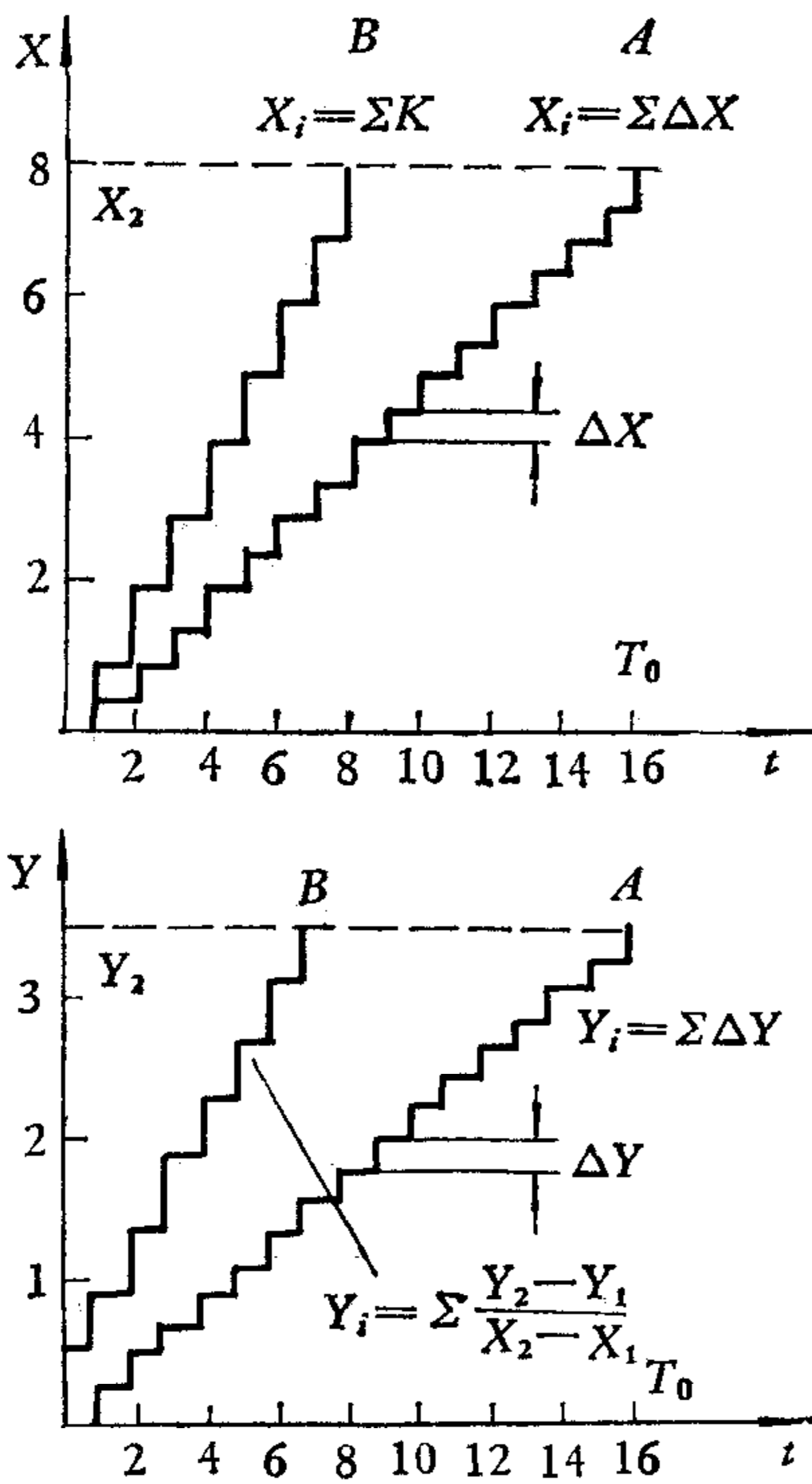


图2 累加过程时间图

A——DDA 法; B——比值积分法

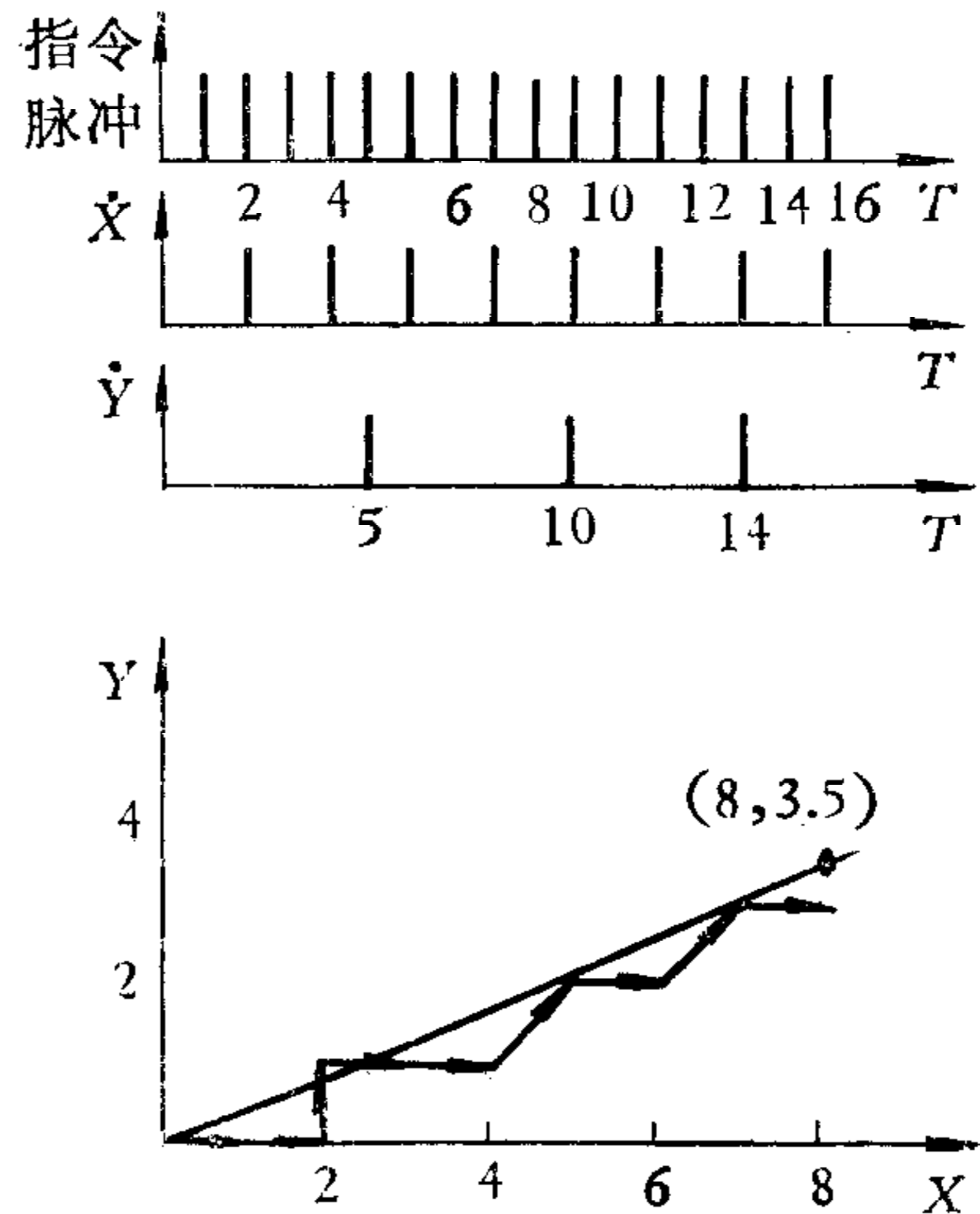


图3 DDA 法的脉冲分配

作为基本判据,用图解法确定在约束条件下的最优脉冲分配的表达式. 约束条件是: 1) 使多坐标系统中的一个坐标的插补输出脉冲的速度恒等于 V_F , 文中设定 $V_x = V_F$. 2) 根据数字控制插补原理, 各坐标方向必在同一时刻 ($t = T_0$) 到达终值. 图 4 为线性函数 $Y = f(X)$ 的脉冲分配时间图, 其中 X_2, Y_2 为该直线段的终值(用绝对值表示). 若 $X_2 > Y_2$, 则 X 和 Y 方向插补脉冲的阶梯形轨迹可分别用射线 OA 和 OB 近似, 射线与横坐标轴的夹角分别用 θ 和 φ 表示. 显然在 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 和 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ 的域中的任何射线均能实现 $Y = f(X)$ 的轨迹, 但满足 $V_x = V_F$ 的解是唯一的.

设 f_F 为进给指令脉冲的频率[脉冲/秒], f_x 为 X 方向插补输出脉冲的频率[脉冲/秒], δ 为脉冲当量 [毫米/脉冲], α 为进给指令脉冲的个数, β 为 X 向输出脉冲的个数, t_F 为进给指令脉冲周期[秒], 若要求 X 向插补输出脉冲的速度 $V_x = V_F$, 则

$$f_x \delta = f_F \delta, \quad f_x = f_F. \tag{1}$$

由图 4 可知, $X_2/T_0 = \beta \delta / \alpha t_F = V_x$, 而 $V_F = f_F \delta$, 所以

$$\beta = \alpha. \tag{2}$$

式(1),(2)表明对任意斜率的线段, 为了实现 x 方向的插补输出脉冲的速度等于给定的进给指令速度, 该方向插补输出脉冲的频率必须等于进给指令脉冲的频率, 且插补输出脉冲的个数必须等于指令脉冲的个数. 换言之, 每发一个指令脉冲, 该方向位移一个 δ 值, 当发出 α 个指令脉冲时, 该方向到达终值. 由此得到最优脉冲分配的表达式:

$$X_2/T_0 = \delta/t_F = 1, \quad \text{则} \quad \tan \theta = 1. \tag{3}$$

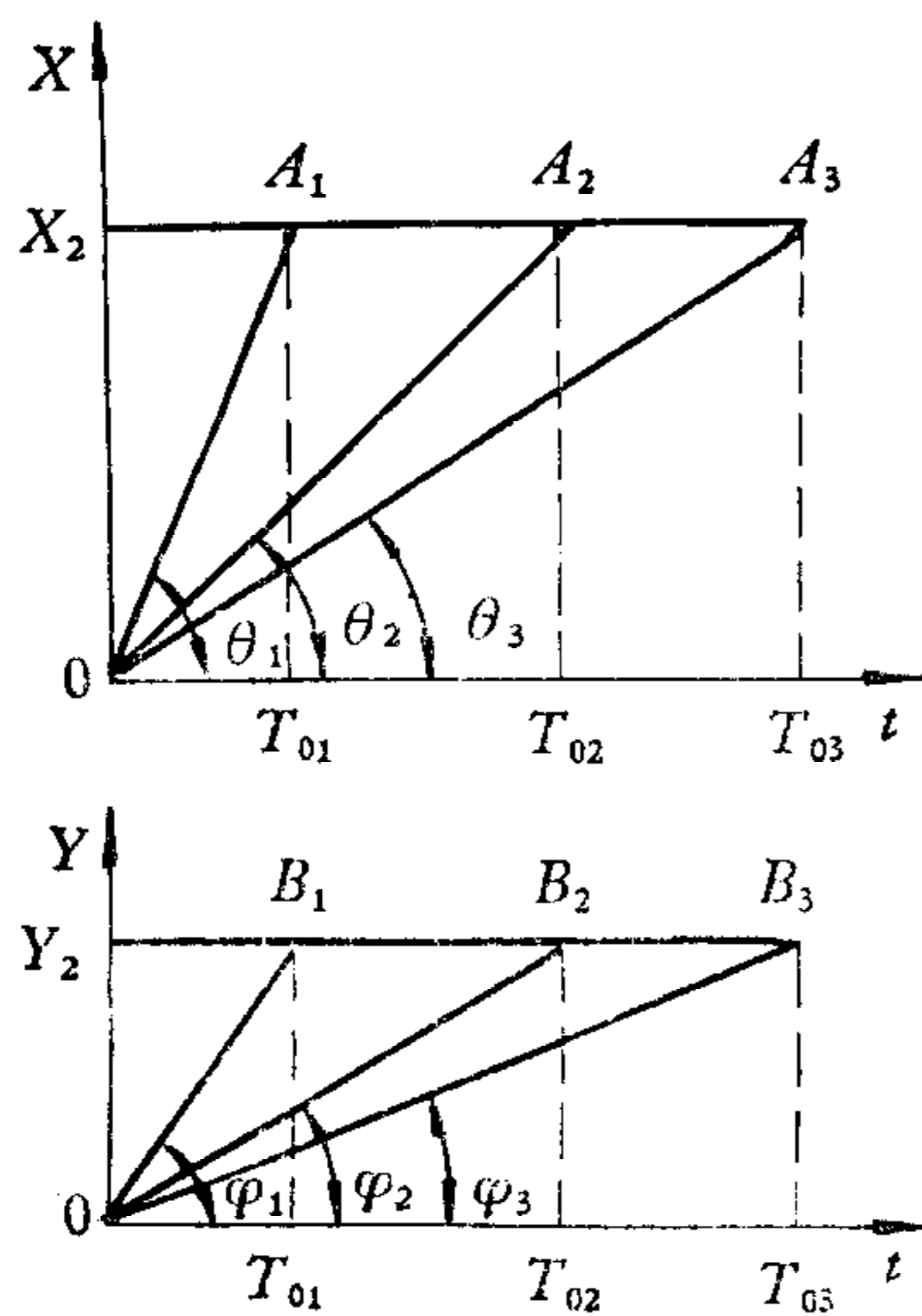


图4 线性函数 $y = f(x)$ 插补脉冲分配组合

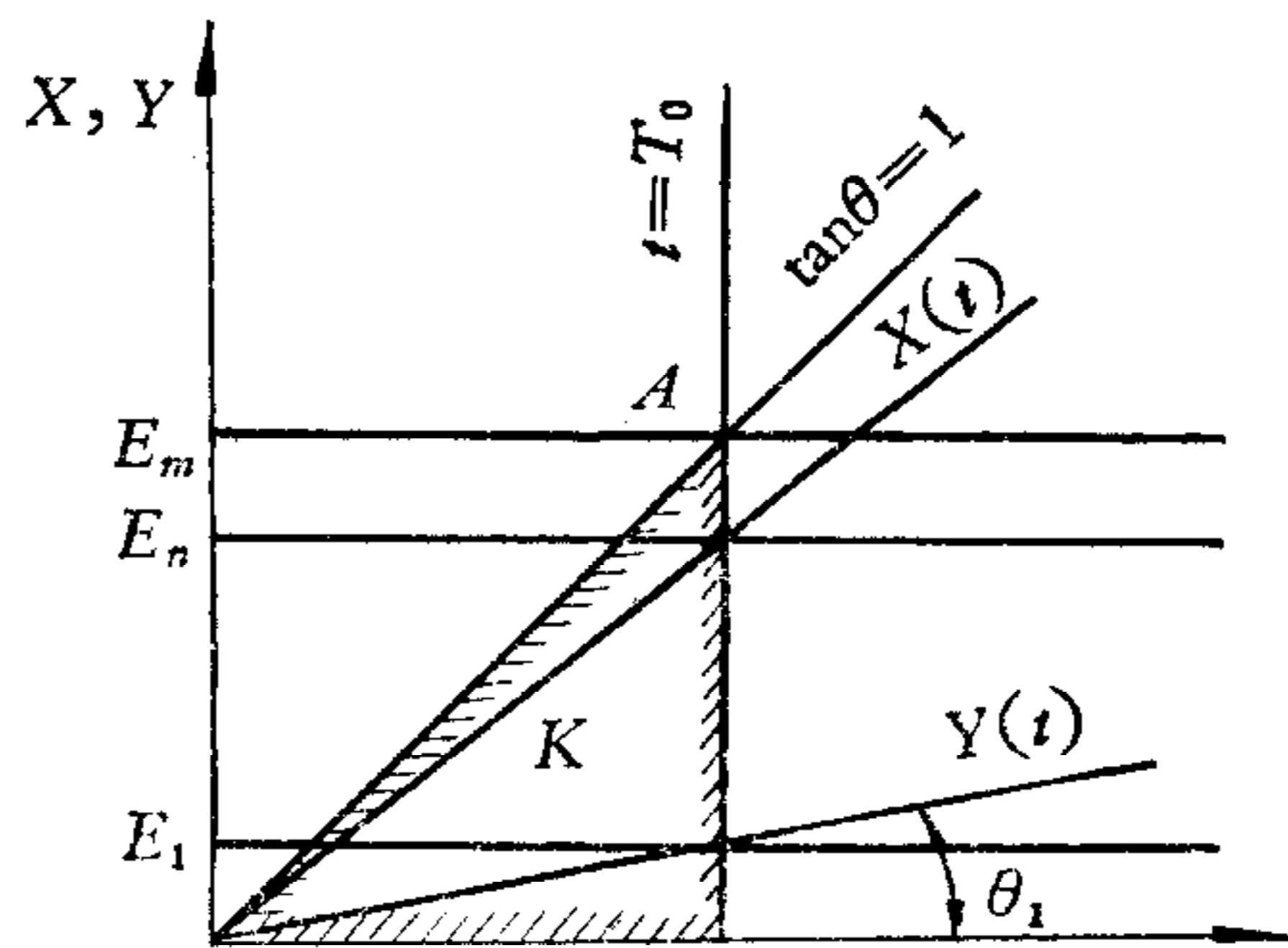


图5 最优脉冲分配的可行域

因 $t \geq 0$ ，如终值用绝对值表示， θ 必在第一象限。当 $\theta > 45^\circ$ 或 $\theta < 45^\circ$ 时，显然 $V_x \neq V_F$ 。所以， $\theta = 45^\circ$ 是满足 $V_x = V_F$ 的唯一解。由此得到

结论 1. 对线性函数 $x(t) = p \cdot y(t)$ ， p 为实数， $x(t)$ 和 $y(t)$ 取绝对值，则满足 $\tan \theta = 1$ 的解，其线性插补脉冲分配为最优。

若系统坐标系中最大终值为 E_m ，满足约束条件 $\tan \theta = 1$ ， $t = T_0$ 的可行域如图 5 中斜线部分所示，但不包括横轴上的点，其可行解的集合是 k 集，最优解在 k 集的一个顶点。由此得到

结论 2. 终值最大的那个坐标方向速度为最优，且恒等于 V_F 。

从结论 2 推论得：终值小于 E_m 的各坐标方向的插补输出脉冲的速度 V_1, V_2, \dots, V_n 均小于 V_F (因相应的 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 均小于 45° ，参看图 5.)。 V_1, V_2, \dots, V_n 的大小与相应的坐标终值 E_1, E_2, \dots, E_n 有关，当 $E_n \rightarrow E_m$ 时，该方向输出脉冲的速度也趋近于 V_F 。反之，当 $E_n \rightarrow 0$ ，其速度也趋近于零。所以，从 k 集所示的范围可推算出插补系统的速度范围。系统最大合成速度为 $\sum_{i=1}^n \vec{V}_i$ ，即为各坐标插补输出脉冲的矢量和，最小合成速度为 V_F 。

用上述原则分配脉冲，能避免 DDA 法中累加一次后各坐标方向均无脉冲输出的情况，使系统的合成速度稳定在 $\sum_{i=1}^n \vec{V}_i$ 到 V_F 之间。在这个速度范围内可用简便的方法实现系统的稳速控制。

下面，用脉冲最优分配条件推导线性插补方程。图 1 直线 $Y = f(X)$ 满足

$$X_2 - X_1 = L \cos \varphi,$$

$$Y_2 - Y_1 = L \sin \varphi.$$

对直线上任意点 i ，方程改写为时间 t 的函数为：

$$X_i - X_1 = (X_2 - X_1) \frac{t_i}{T_0}, \quad (X_1 \leq X_i \leq X_2).$$

$$Y_i - Y_1 = (Y_2 - Y_1) \frac{t_i}{T_0}, \quad (Y_1 \leq Y_i \leq Y_2).$$

$$t_i = \sum_{i=1}^i (t_i - t_{i-1}), \quad (t_n = T_0).$$

用离散时间描述,可转换为

$$t_i = kT, \quad (k = 1, 2, \dots, n, T = T_k - T_{k-1}),$$

$$x(k) = x_1 + (x_2 - x_1)kT/T_0, \quad (4)$$

$$y(k) = y_1 + (y_2 - y_1)kT/T_0. \quad (5)$$

若 $x_2 - x_1 > y_2 - y_1$, 根据最优分配条件 $\tan \theta = 1$, 则 T_0 应满足 $(x_2 - x_1)/T_0 = 1$. 代入方程(4),(5),得到最优脉冲分配的线性插补方程为:

$$x(k) = x_1 + kT,$$

$$y(k) = y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) kT, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

其递推形式为:

$$x(k) = x(k-1) + T,$$

$$y(k) = y(k-1) + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) T, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

在 $x_2 - x_1 > y_2 - y_1$ 时非递推形式为:

$$X'(k) = x_1 + \sum_{k=1}^n T,$$

$$Y'(k) = y_1 + \sum_{k=1}^n \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} T, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

上述插补方程可推广到多坐标系统. 若 $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, \dots , $A = f_n(t)$, 且 x, y, z, \dots, A 之间线性相关, 在时间 T_0 内, 若 y 向位移量最大, 下列方程组成立

$$X'(k) = x_1 + \sum_{k=1}^n T(x_2 - x_1)/(y_2 - y_1),$$

$$Y'(k) = y_1 + \sum_{k=1}^n T,$$

$$Z'(k) = z_1 + \sum_{k=1}^n T(z_2 - z_1)/(y_2 - y_1),$$

\vdots

$$A(k) = A_1 + \sum_{k=1}^n T(A_2 - A_1)/(y_2 - y_1),$$

$$T = T_k - T_{k-1}.$$

表 2 比值积分法算例

累加次数 K	$\Sigma \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	输出脉冲	
		\dot{X}	\dot{Y}
0	0.5	0	0
1	0.5+0.4375	1	0
2	1.3750	1	1
3	0.8125	1	0
4	1.2500	1	1
5	0.6875	1	0
6	1.1250	1	1
7	0.5625	1	0
8	1.0000	1	1

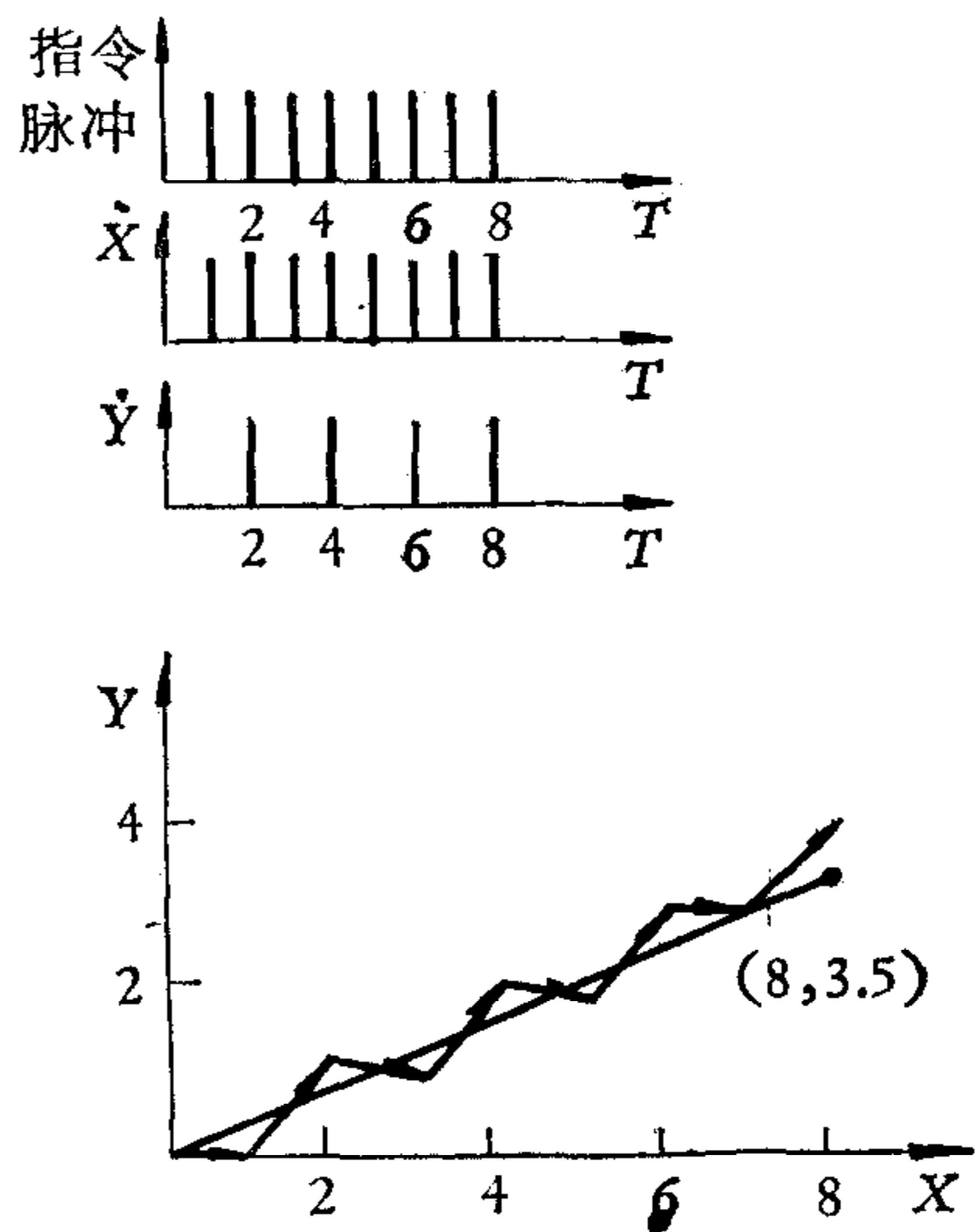


图 6 比值积分法的脉冲分配

表 2 列出了该法的算例，给定的初始值与表 1 相同。运算结果形成的脉冲分配和插补轨迹如图 6。累加过程的时间图画在图 2 上，以便和 DDA 法作比较。实践证明，实际的插补输出脉冲与计算结果相符。

插补误差与线段斜率有关。对平面直线，斜率 $\tan\varphi$ 为 0 或 1 时，插补轨迹与直线全部重合，无误差，当 $\tan\varphi$ 在 0 和 1 之间时，插补误差在 0 到 -1 之间。若初始态预置 0.5，则误差为 ± 0.5 个脉冲。

三、在多坐标线性插补器中的应用及其稳速性

在 XK-2500 数控系统中采用比值积分法控制四个坐标。实时控制的框图如图 7 所示，其中 K 相当于指令脉冲序数， T 为指令脉冲的周期， D^{-1} 为延时一个 T 的环节。

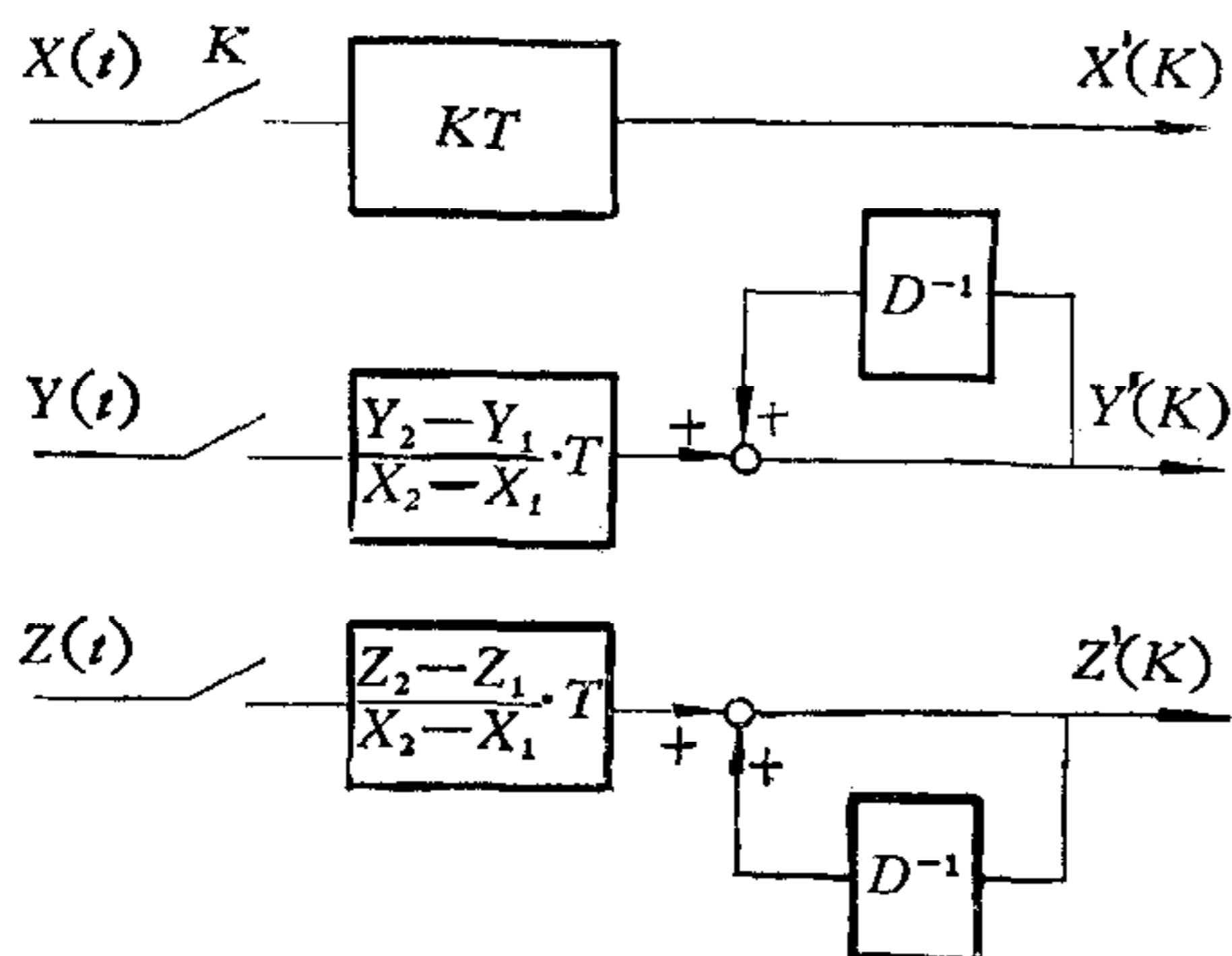


图 7 比值积分法实时控制结构

与 DDA 法相比，因 $X(t) = kT$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，所以节省了一套积分器。

系统的控制流程见图 8。图中 J_1, J_2, J_3 为寄存器。整个流程分三段。第一段接收原始数据。第二段对原始数据作处理，求出该程序段中最大位移量的坐标方向，然后与其它坐标值求比值。第三段执行插补运算，实时输出。当 $J_3 - 1 = 0$ 时，终止插补运算，启动输入设备，接收下一个程序段。

用比值积分法获得的输出脉冲合成速度较接近设定的进给速度，有较好的稳速性。下面以空间直线为例，分析稳速性。直线起点为 $(0, 0, 0)$ ，终点为 (x_c, y_c, z_c) ，若 $x_c > y_c > z_c$ ，则根据比值累加的结果，可能出现三种情况： x, y, z 同时有输出脉冲； xy 或 xz 有输出脉冲；只有 x 有输出脉冲。

若 x 向的速度满足 $V_x = V_F$ ，则合成速度 $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ 。所以

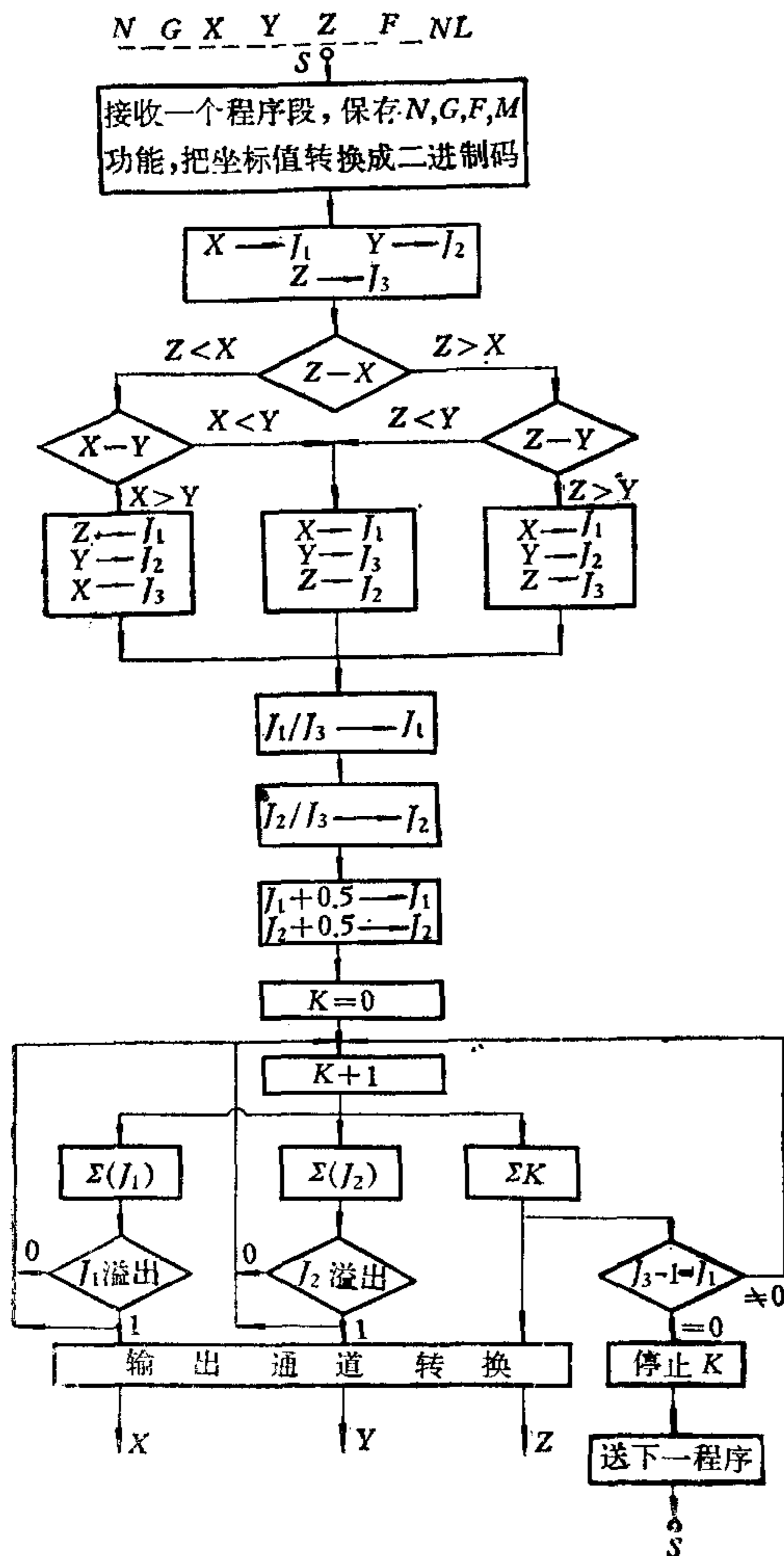


图 8 系统控制流程图

$$V/V_F = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}/V_x$$

$$= \sqrt{1 + (x_e^2 + z_e^2)/x_e^2}$$

这说明合成速度与终点坐标值有关。当 $x_e:y_e:z_e = 1:1:1$ ，则有最大值 $\sqrt{3}V_F$ ；当 $x_e:y_e:z_e = 1:0:0$ 时有最小值 V_F 。因此，比值积分法合成速度的变化范围为 $(1 - \sqrt{3})V_F$ 。与 DDA 法和脉冲乘法相比有明显差别(见表 3)。DDA 法和脉冲乘法最高速度和最低速度之比趋于 ∞ ，如不采取措施，对加工零件的光洁度、刀具寿命、生产率都有一定的影响。而比值积分法最

表 3

插补方法	速度变化范围			
	平面直线 V	V_{max}/V_{min}	空间直线 V	V_{max}/V_{min}
DDA 法*	$(0-1.414)V_F$	∞	$(0-1.732)V_F$	∞
脉冲乘法*	$(0-0.354)V_F$	∞	$(0-0.433)V_F$	∞
比值积分法	$(1-1.414)V_F$	1.414	$(1-1.732)V_F$	1.732

高速度和最低速度之比为 1.732，一般已能满足实用要求，有特殊要求时，可采用稳速控制。因速比较小，较容易实现。

四、结 论

(1) 比值积分法用于线性系统可解决两类问题，一类是实现线性插补；另一类是已知两个或两个以上变量的比值，求解各个变量在规定条件下的确定值，实现实时转换。

(2) 比值积分法实现线性插补时，其稳速性能是现有插补方案中最好的，适用于多坐标、多功能系统，其不足之处是需进行除法，增加了输入运算时间。若用开关、键盘或其他输入方式直接送入比值，将简化运算，节省硬设备和输入运算时间，在简易数控中也是可取的。

(3) 随着微型机的迅速发展，用比值积分法的控制流程实现线性插补，对微型机的速度要求较低，因而有广阔的前景。

* 根据清华大学自动化系讲义《机床数字控制》第一册，1977，p. 240.

参 考 文 献

- {1} 齐田伸雄,新しい数概念の创造,安川电机,1974, No. 3.
 {2} G. G. Ertell, Numerical Control, John Wiley & Sons, New York, 1969, 100—136.

A NEW METHOD OF LINEAR INTERPOLATION FOR A MULTIPLE AXES SYSTEM—PROPORTIONALITY INTEGRATION METHOD

WU NIANYU
 (Qinghua University)

ABSTRACT

To improve the performance of interpolation speed in a multiple axes system by introducing the optimal distribution principle of pulses is discussed in this paper. And a new method — proportionality integration method for linear interpolation is given. The result of experiment has shown that higher accuracy and better stability of interpolation speed can be obtained. The principle algorithms and examples of application of this method are illustrated.

第四次全国系统仿真学术会议

征 文 通 知

中国自动化学会、中国宇航学会、中国航空学会将于 1983 年十月联合召开第四次全国系统仿真学术讨论会。

一、征文内容：

1. 系统仿真技术综述。
2. 实时仿真训练器。
3. 实物与半实物仿真试验设备。
4. 仿真计算机系统。
5. 数字仿真技术(包括仿真模型独立、算法、仿真语言,程序包)。
6. 系统仿真技术应用。

二、征文要求：

1. 要求文字简炼,数据准确,观点明确。凡在全国性公开刊物或全国性学术会议上发表过的论文不再征集。
2. 文章中若涉及保密问题,请送本单位审查后再寄出。
3. 报送的论文或报告,请作者留好原文底稿,寄来的稿件一般不予退还。
4. 征文手稿全文请于 1983 年 6 月底前送交中国自动化学会系统仿真专业委员会,经审稿后若确定录用,再发打印通知。若未录用,不再发通知。

征文请寄：北京航空学院三系第三研究室彭晓源收。