第9卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 9, No. 1
1983年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1983

串并联复式系统可靠性最优分配

吴 云 从
(华 东 工 程 学 院)

摘　　要

本文讨论独立故障及混合故障串并联复式系统中，在给定可靠性条件下寻求总成本最小的最优分配问题. 运用拉格朗日乘子法，得到了计算分配向量的公式，并给出了两个计算实例.

文献[1]研究了在满足一定的约束条件下，可靠率最大的串并联复式系统的综合问题. 本文研究在给定系统可靠率下限条件下，要求总成本最小的各环节元器件数目的最优分配问题.

一、独立故障系统最优分配问题

设总系统共有 n 个不同环节串联，其中第 i 个环节由 m_i 个相同的元器件并联，$i=1, 2, \cdots, n$，而系统中元器件的故障是独立的，即元器件或分系统的故障不影响其余并联元器件或分系统的正常工作. 若已知第 i 个环节上任一并联元器件的故障概率为 q_i，元器件成本为 w_i，于是在总系统可靠度给定的条件下，要求总成本最小的各环节元器件数目的最优分配，就是求解数学规划问题:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i m_i\right\},$$

并满足约束条件

$$R=\prod_{i=1}^{n}(1-q_i^{m_i}) \geqslant R_0. \tag{1}$$

这里 $w_i, q_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 及 R_0 都是已知的，而 m_i 是待定的决策变量，是正整数.

因为提高可靠度意味着增加并联环节上的元器件数目，使系统总成本最小的解 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 必是使 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-q_i^{m_i})$ 等于 R_0 或略大于 R_0 的解. 过大将使成本增加，所以在分析问题时不妨在(1)式中取等式.

对(1)取对数，并把 m_i 连续化，研究数学规划问题: $\min\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i m_i\right\}$,

并满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{n}\ln[1-q_i^{m_i}]=M_0, \qquad (\text{令} \ln R_0=M_0) \tag{2}$$

本文于1981年12月16日收到.

如文献[1]那样，也用拉格朗日乘子法解这里的数学规划问题．令

$$G(m_1, m_2, \cdots, m_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} \ln(1 - q_i^{m_i}) - M_0\right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial m_i} = w_i + \lambda\left(\frac{-q_i^{m_i}\ln q_i}{1 - q_i^{m_i}}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

解得

$$q_i^{m_i} = \frac{w_i}{w_i + \lambda \ln q_i}, \tag{3}$$

$$m_i = \ln\left(\frac{w_i}{w_i + \lambda \ln q_i}\right) \Big/ \ln q_i \,. \tag{4}$$

由(2)及(3)式还可推得

$$\lambda^n - R_0 \prod_{i=1}^{n} (w_i + \lambda \ln q_i) \Big/ \prod_{i=1}^{n} \ln q_i = 0. \tag{5}$$

由(5)式可得拉格朗日乘子 λ_0．把 λ_0 代入公式(4)，可得

$$m_i = \ln\left(\frac{w_i}{w_i + \lambda_0 \ln q_i}\right) \Big/ \ln q_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

对(6)式的 m_i 适当归整，一般取不小于 m_i 的最小正整数．

例 1. 今有三个不同环节的串联系统，各环节分别由 m_1、m_2、m_3 三个元件并联而成，m_1 的故障概率为0.02；m_2 的故障概率为 0.01；m_3 的故障概率为 0.03．已知元件成本分别为 $w_1 = 3, w_2 = 4, w_3 = 5$(单位)，要求系统总可靠度不低于 99%，试计算使总成本最低的元件数的分配向量 (m_1, m_2, m_3)，并计算最低成本．

解：依题意知，求 (m_1, m_2, m_3) 使得 $\min\{3m_1 + 4m_2 + 5m_3\}$，并满足约束条件：

$$\prod_{i=1}^{3} (1 - q_i^{m_i}) \geqslant 99\%.$$

式中 $q_1 = 0.02$，$q_2 = 0.01$，$q_3 = 0.03$．依公式(5)得 $\lambda^3 + 303\lambda^2 - 297\lambda + 94 = 0$．

解此方程得拉格朗日乘子 $\lambda_0 = -99.806$．由公式(6)得 $m_1 = 1.245$，$m_2 = 1.032$，$m_3 = 1.215$，归整得 $m_1 = m_2 = m_3 = 2$．此时可靠度为：

$$[1-(0.02)^2][1-(0.01)^2][1-(0.03)^2] = 0.9986 > 0.99.$$

取 $(m_1, m_2, m_2) = (2, 2, 2)$ 是满足总可靠度不小于 0.99 的最小解，此时总成本为：

$$(3+4+5)\times 2 = 24\ (\text{单位}).$$

二、混合故障系统最优分配问题

设系统由 n 个环节串联，第 i 个环节由 m_i 个相同的元器件并联．记第 i 个环节中任一元器件发生相依故障的事件为 A_i，而 $P(A_i) = q_{si}$；发生独立故障的事件为 B_i，在 A_i 不出现条件下 B_i 发生的概率为 $P_{\bar{A}_i}(B_i) = q_{ti}$，所以不出现相依故障而发生独立故障的事件概率为

$$P(\bar{A}_i B_i) = P(\bar{A}_i) P_{\bar{A}_i}(B_i) = (1 - q_{si}) q_{ti} = q_{0i},$$

设 $q_{si} < q_{0i}$，于是第 i 个环节中任一元器件发生故障的概率为 $q_i = q_{si} + q_{0i}$．从而第 i 个环节中至少有一个元器件发生相依故障的概率为 $1 - (1 - q_{si})^{m_i}$，在第 i 个环节中 m_i

个元器件皆不发生相依故障而发生独立故障的概率为 $q_{0i}^{m_i}$，所以第 i 个环节的可靠率为 $R_i=(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}$. 整个系统的可靠率为：

$$R=\prod_{i=1}^{n}R_i=\prod_{i=1}^{n}[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}]. \tag{7}$$

现在研究在给定系统可靠率下限的条件下使总投资最小的可靠性最优分配问题. 设第 i 个环节每个元器件的成本（体积或重量亦可）为 w_i，求向量 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 使

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}w_i m_i\right\},$$

并满足约束条件

$$\prod_{i=1}^{n}R_i=\prod_{i=1}^{n}[(1-q_{si})^{m_i}-q_{0i}^{m_i}]\geqslant R_0. \tag{8}$$

式中 q_{si}，q_{0i}，R_0，w_i 是已知量，$m_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是待定的各环节上的元器件分配数.

当系统可靠率(7)式的无约束极值小于 R_0 时，规划问题无解，约束(8)得不到满足，亦即 R_0 提得太高，本系统根本达不到要求. 此时只得降低 R_0，取 R 的无约束极大值作为系统的可靠率，并取相应的 $\sum\limits_{i=1}^{m}w_i m_i$ 作为投资总额. 当系统可靠率的无约束极值大于 R_0 时，可以减小某些环节上并联元器件的数目，使可靠率接近 R_0，则总成本 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i m_i$ 达到最小. 所以在寻找适当的解 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 时，可在(8)式中取等式而用拉格朗日乘子法解上述规划问题.

作拉格朗日函数

$$G(m_1, \cdots, m_n)=\sum_{i=1}^{n}w_i m_i+\lambda\left\{\sum_{i=1}^{n}\ln[(1-q_{si})^{m_i}-q_{0i}^{m_i}]-\ln R_0\right\},$$

令 $\dfrac{\partial G}{\partial m_x}=0$，($x$ 是 i 中的一个特定数)，得

$$w_x+\frac{[(1-q_{sx})^{m_x}\ln(1-q_{sx})-(q_{0x})^{m_x}\ln q_{0x}]\lambda}{[(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}]}=0,$$

即

$$\left(\frac{q_{0x}}{1-q_{sx}}\right)^{m_x}=\frac{w_x+\lambda\ln(1-q_{sx})}{w_x+\lambda\ln q_{0x}}. \tag{9}$$

取对数得

$$m_x=\ln\left\{\frac{w_x+\lambda\ln(1-q_{sx})}{w_x+\lambda\ln q_{0x}}\right\}\Big/\ln\left(\frac{q_{0x}}{1-q_{sx}}\right). \tag{10}$$

显见，在(10)式中当 $q_{sx}=0$，即第 x 个环节中元器件无相依故障，(10)式便与(4)式一致.

由(9)式可得

$$\ln[(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}]$$
$$=\ln\left\{\frac{w_x+\lambda\ln(1-q_{sx})}{w_x+\lambda\ln q_{0x}}\right\}\ln(1-q_{sx})\Big/\ln\left(\frac{q_{0x}}{1-q_{sx}}\right)$$

$$+\ln\left\{\frac{\lambda[\ln q_{0x}-\ln(1-q_{sx})]}{w_x+\lambda\ln q_{0x}}\right\},$$

代入约束条件

$$\sum_{i=1}^{n}\ln[(1-q_{si})^{m_i}-q_{0i}^{m_i}]=M_0,\qquad (M_0=\ln R_0),$$

得

$$M_0=\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\left[\frac{w_i+\lambda\ln(1-q_{si})}{w_i+\lambda\ln q_{0i}}\right]\ln(1-q_{si})\Big/\ln\left(\frac{q_{0i}}{1-q_{si}}\right)\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\frac{\lambda[\ln q_{0i}-\ln(1-q_{si})]}{w_i+\lambda\ln q_{0i}}\right\}. \tag{11}$$

取 $q_{si}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,即故障独立,可得

$$M_0=\ln\left\{\frac{\lambda^n\prod_{i=1}^{n}\ln q_{0i}}{\prod_{i=1}^{n}(w_i+\lambda\ln q_{0i})}\right\},$$

从而有

$$\lambda^n-R_0\prod_{i=1}^{n}(w_i+\lambda\ln q_{0i})\Big/\prod_{i=1}^{n}\ln q_{0i}=0,$$

这与(5)式一致.

(11)式的 λ 可用试凑法求解. 将 λ 代入(10)式可解出所需要的 $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

用(10)式解得的 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,一般不是正整数,为确保满足系统可靠性的要求,可取大于 m_i 的最小整数,或小于 m_i 的最大整数. 在相依故障较大时向小方向归整,否则向大方向归整. 若 m_i 为负数,是不合理的,一般情况是计算或数据有错误,可进行检查. 当计算归整后的解 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 代入(8)式检查,确实满足约束条件后,为使总成本最小的解,可进行小调整,把某些 m_x 向小方向调,并观察效果,使其既满足约束条件又使总成本最小. 当(11)式中解出多个实根时,代入(10)式可得多组分配向量.这时可根据其它条件选取一组适当的解.

例 2. 设一个系统由三个环节串联,第 i 个环节由 m_i 个相同的元器件并联而成 $(i=1,2,3)$. 第 i 个环节上的元器件发生相依故障的概率为 $0.i\%$,而发生独立故障的概率为 $i\%$, $(i=1,2,3)$. 元器件成本分别是 400 元, 500 元及 700 元. 今要求系统可靠性不低于 98%. 求各环节上元件数 m_1, m_2, m_3, 使得既满足系统可靠性要求,总成本又最小.

解: 本例中 $n=3$, $q_{s1}=0.1\%$, $q_{s2}=0.2\%$, $q_{s3}=0.3\%$; $q_{t1}=1\%$, $q_{t2}=2\%$, $q_{t3}=3\%$; $w_1=400$ 元, $w_2=500$ 元, $w_3=700$ 元, $R_0=98\%$.

计算得:

$$q_{01}=(1-q_{s1})q_{t1}=0.00999,\qquad q_{02}=(1-q_{s2})q_{t2}=0.01984,$$
$$q_{03}=(1-q_{s3})q_{t3}=0.02991.$$

于是问题归为决定 m_1, m_2, m_3, 使

$$f(m_1,m_2,m_3)=400m_1+500m_2+700m_3\text{(元)} \tag{12}$$

极小,并满足约束条件:

$$[(0.999)^{m_1}-(0.00999)^{m_1}]\times[(0.998)^{m_2}-(0.01984)^{m_2}]$$
$$\times[(0.997)^{m_3}-(0.02991)^{m_3}]\geqslant 98\%. \tag{13}$$

把 $M_0=\ln R_0=-0.020202707$, q_{0i}, q_{si} $(i=1, 2, 3)$ 代入(11)式并化简得:

$$(400-0.0010005\lambda)^{0.00217255}\times(500-0.002002002\lambda)^{0.000510968}$$
$$\times(700-0.003004509\lambda)^{0.000856225}\times(400-4.60617686\lambda)^{-1.00217255}$$
$$\times(500-3.923083953\lambda)^{-1.00510968}\times(700-3.509562406\lambda)^{-1.000856825}$$
$$\times(-4.605170185\times3.918053174\times3.506557897\lambda^3)=0.98.$$

此方程的一个实根 $\lambda=-18683.5$. 这是一个超越方程，写不出解的一般表达式. 但可用对分法求得方程实根的精确近似解. 即若 $\varphi(\lambda)=a$ (这里 $a=0.98$)，在计算机上探索，终可找到 (λ_1, λ_2) 区间，使得 $\varphi(\lambda)=a$ 的解 λ_0 落入 (λ_1, λ_2) 中，于是逐次折半区间，便可求得足够精确的 $\varphi(\lambda)=a$ 的解的近似值. 分别将

$$w_1=400,\ w_2=500, w_3=700;\ q_{s1}=0.1\%,\ q_{s2}=0.2\%,\ q_{s3}=0.3\%;$$

$$q_{01}=0.00999,\ q_{02}=0.01984,\ q_{03}=0.02991;\ \lambda=-18683.5$$ 代入(10)式，得

$$m_1=1.122610154,\qquad m_2=1.297030667,\qquad m_3=1.275718556.$$

向大方向归整得正整数解 $(m_1, m_2, m_3)=(2, 2, 2)$，代入(13)式右端后得:

$$(0.999^2-0.00999^2)(0.998^2-0.01984^2)(0.997^2-0.02991^2)$$
$$=0.997901199\times0.995610374\times0.993114391=0.986679791.$$

满足约束条件不小于 0.98 的要求. 此时系统的总成本为:

$$(400+500+700)\times2=3200\ 元.$$

可以验证，当把 $(m_1, m_2, m_3)=(2, 2, 2)$ 中任一个调整为 1 时，都将破坏约束条件. 可见 3200 元是满足约束条件的 (m_1, m_2, m_3) 所相应的系统的最小成本. 也是使系统可靠率最大的解.

参　考　文　献

[1] 疏松桂，最可靠控制系统的综合，自动化学报，第 6 卷，第一期.
[2] E. Blum, W. Oettli, Mathematische Optimierung, Springer-verlag Berlin Heidelberg, New York, 1975.

THE OPTIMAL ALLOCATION FOR THE NUMBERS OF ELEMENTS IN SERIES-PARALLELS SYSTEMS

WU YUNCONG
(*East China Enginering Institute*)

ABSTRACT

The optimal allocations for the numbers of elements in a series-paralles system with independent failures and mix-failures are discussed. Under a given condition of reliability, it requires to find out the optimal allocation with minimum total cost.

The Lagrange multiplier method is used, and two practical numerical examples are given.