第9卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 9, No. 1
1983 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1983

闭环控制系统的最经济结构综合问题

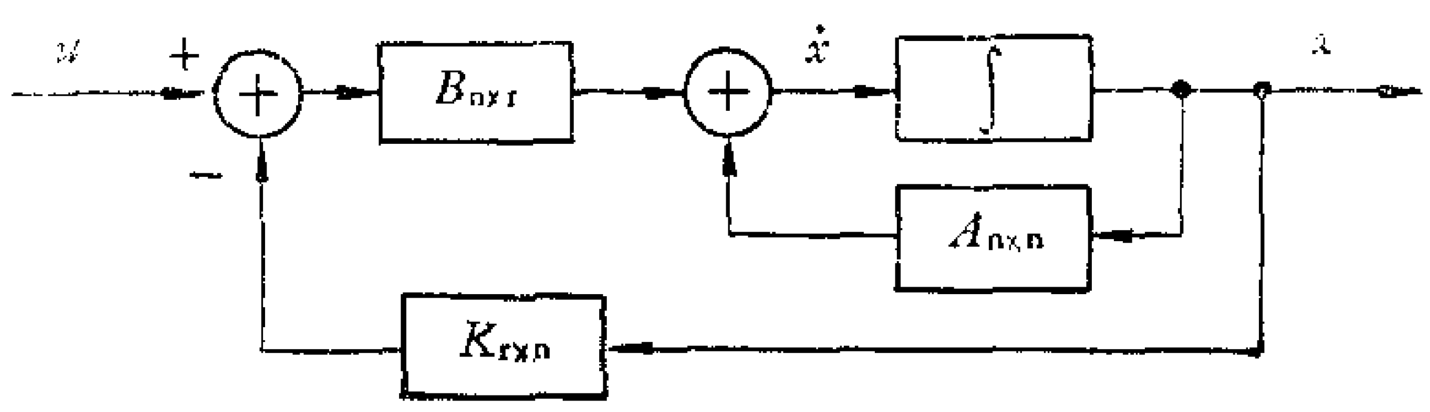
刘 维
（中国科学院自动化所）

摘 要

为任意配置线性定常闭环系统的 n 个极点，本文介绍了状态反馈阵或输出反馈阵的结构特点，包括反馈阵必须含有的待定参数的最少个数及非零行(或列)、反馈变量的最少个数，并介绍了为镇定一个不稳定系统，反馈阵必须具备的结构特点．最后给出了最经济反馈阵的设计方法．

一、任意配置极点的结构条件

设给定系统 $\Sigma=(A, B)$ 是完全可控的．任意给定 n 个极点 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，且设 λ_i 有负实部、复根共轭出现．今欲用状态反馈阵K配置这 n 个极点，方框图如下：



这里，A, B, K 阵的维数已经标出，而且假定

$$\operatorname{rank} B=r \leqslant n.$$

由于 λ_i 已知，故多项式

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \tag{1}$$

已知，其中：$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为正实数．令闭环系统的特征多项式为：

$$f^*(\lambda)=|\lambda I-A+BK|=\lambda^n+\tilde{a}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\tilde{a}_1\lambda+\tilde{a}_0. \tag{2}$$

这里，系数 $\tilde{a}_i(i=0, 1, \cdots, a_{n-1})$ 是状态反馈阵K的元素 k_{ij} 的函数．显然，非线性方程组

$$\tilde{a}_i(K)=a_i, \qquad (i=0, 1, \cdots, n-1) \tag{3}$$

存在实数解是任意配置 n 个极点的充要条件．由此可知，K阵至少应含有 n 个待定参数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$．自(3)式出发，可证明下述定理成立．

定理 1. 若 (A, B) 为完全能控对，而且A阵不含有已经解耦的子阵，K阵中有 n 个

本文于1981年2月11日收到，曾在1982年5月中国自动化学会第三届控制理论学术交流会上宣读．

待定参数，可以任意配置 n 个极点的状态反馈阵，在结构上必须满足的条件是：1) n 个元素所占据的行数和列数，均不得小于 r_0. r_0 为 A 阵不平凡不变因子的个数；2) $|-A+BK| \neq 0$；3) K 阵中至少有一个待定参数位于 $B\cdot K$ 阵的主对角线上；4) 若 BK 阵的主对角线上，仅含有一个 K 阵待定参数，则在 $\lambda I-A+BK$ 阵非主对角线上的含有 k_i 的诸元素中，至少有一个元素在它的转置位置上对应着非零元素，即或是 A 阵的非零元素或是 $B\cdot K$ 阵的非零元素；5)若在 $\lambda I-A$ 阵的第 i 行(或列)，除主对角线的元素外其它元素为零，则 BK 阵中的待定参数必须在第 i 行(或列)上出现. 从 $\lambda I-A$ 阵中划去第 i 行和第 i 列，得到新阵 $\lambda I'-A'$，对这个新阵仍用这一条件检查，BK 阵的非零元素也必须在具有上述性质的行或列上出现.

定理 2. 若系统 $\Sigma=(A, B)$ 为完全可控对，且 A 划分为二个解耦子阵的直和：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

其中 A_1 为 $n_1\times n_1$ 阵，A_2 为 $n_2\times n_2$ 阵，并且 $n_1+n_2=n$. 若记

$$f^*(\lambda)=|\lambda I-A+BK|=\left|\begin{array}{c|c} \lambda I_1-A_1+M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & \lambda I_2-A_2+M_{22} \end{array}\right|.$$

这里

$$BK=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

是 A_1, A_2 的分割矩阵. 则仅含 n 个待定参数，可以任意配置 n 个极点的状态反馈阵 K 必须满足的结构条件是：1)如果

$$B=\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}_{n\times r},$$

其中 B_1 为 $n_1\times r_1$ 阵，B_2 为 $n_2\times r_2$ 阵，而且 (A_1, B_1), (A_2, B_2) 为完全可控系统，取

$$K=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix},$$

则 (A_1, B_1, K_1), (A_2, B_2, K_2) 可看作两个独立的闭环系统. K_1, K_2 必须满足定理 1 的条件. 这里 K_1 为 $r_1\times n_1$ 阵，K_2 为 $r_2\times n_2$ 阵；2) 若把 (A, B) 看作一个完整的系统，则 K 阵必须满足定理 1，而且若 M_{12} (或 M_{21}) 为非零阵，则 M_{21} (或 M_{12}) 也必须为非零阵，或者 M_{21} (或 M_{12}) 虽为全零阵，但是 n 个 K 阵参数已在 M_{11} 和 M_{22} 中出现，而且 M_{11}, M_{22} 的主对角线上至少各有一个互异的 K 阵待定参数.

根据定理 1 和行列式展开法则，不难确信定理 2 是正确的，故略去证明. 对于 A 阵含有多个子阵的直和情况，可以顺序将其划分为两个子阵的直和，即 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_s=A_1\oplus L_1$，其中 $L_1=A_2\oplus\cdots\oplus A_s$, $L_1=A_2\oplus L_2$, $L_2=A_3\oplus\cdots\oplus A_s$, $\cdots$, $L_{s-2}=A_{s-1}\oplus L_{s-1}$, $L_{s-1}=A_s$. 其中 A_1, L_1, L_2, $\cdots$, L_{s-2} 全可看作二个子阵的直和. 为了任意配置 n 个极点，它们的结构必须满足定理 2 的条件.

设 $\Sigma=(A, B, C)$ 是完全可控、完全可观的系统，H 是输出反馈阵. 这里 A 为 $n\times$

n 阵，B 为 $n\times r$ 阵，C 为 $m\times n$ 阵，H 为 $r\times m$ 阵．如果把状态反馈阵 K 看作 $K=H\cdot C$，则由定理 1 和定理 2 可得

推论 1. 如果 $\Sigma=(A, B, C)$ 是完全可控、完全可观测系统，为了任意配置 n 个极点，输出反馈阵 H 在结构上必须满足的条件是：1）若 H 为 $r\times m$ 阵，则必须有 $r\times m\geqslant n$，且 H 阵中非零元素占据的行数和列数都必须大于等于 r_0；2）H 阵中至少有一个待定参数位于 $B\cdot H\cdot C$ 矩阵的主对角线上；3）$|-A+BHC|\not\equiv 0$.

因为状态反馈阵 K 或输出反馈阵 H 非零元素所占的列数，表示参加反馈的互异状态变量或输出变量的个数，于是得到

推论 2. 为了任意配置可控、可观系统 (A, B, C) 的 n 个极点，参加反馈的独立变量的个数至少是 r_0，r_0 仍为 A 阵非平凡不变因子的个数．

由推论 2 可知，在反馈回路中至少应有 r_0 个独立的信息流动和信息通路．

二、控制系统的最经济镇定问题

给定完全可控系统 $\Sigma=(A, B)$，设阵 A 有不稳定的互异特征根 $\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \cdots, \bar\lambda_s$，欲通过状态反馈镇定该系统，并把全部不稳定极点 $\bar\lambda_i$ 配置到指定的位置 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{\bar s}$ 上，由于 $\bar\lambda_i$ 可能有重根，所以总有 $\bar s\geqslant s$. 当 $\bar\lambda_i(i=1, 2, \cdots, S)$ 已经解耦时，结论是显然的，所以只研究 $\bar\lambda_i$ 未被解耦时反馈阵的结构特点．

对于 A 阵总存在么模阵 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I-A)\cdot Q(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \delta_{r_0}(\lambda) & & & \\ & & & & \delta_{r_0-1}(\lambda) & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \delta_1(\lambda)\end{bmatrix}_{n\times n},$$

其中 $\delta_1(\lambda), \cdots, \delta_{r_0-1}(\lambda), \delta_{r_0}(\lambda)$ 是 A 阵的 r_0 个非平凡不变因子，且 $\delta_{r_0}(\lambda)$ 的次数大于等于 1. 由此可知

$$|\lambda I-A|=\delta_1(\lambda)\cdot\delta_2(\lambda)\cdots\delta_{r_0}(\lambda)|P(\lambda)|^{-1}\cdot|Q(\lambda)|^{-1}.$$

因为 $|P(\lambda)|^{-1}$, $|Q(\lambda)|^{-1}$ 全是非零常数，所以 $\delta_i(\lambda)$ 的零点就是 A 的特征根．令 $\bar\lambda_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 分别是 $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda), \cdots, \delta_\alpha(\lambda)$ $(1\leqslant\alpha\leqslant r_0)$ 的根．因为 $\delta_{i+1}(\lambda)|\delta_i(\lambda)$，所以，若 $\bar\lambda_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 是 $\delta_j(\lambda)$ 的根，则 $\bar\lambda_i$ 必然是 $\delta_k(\lambda)$ 的根 $(k\leqslant j)$. 反之，若 $\bar\lambda_i$ 不是 $\delta_j(\lambda)$ 的根，则 $\bar\lambda_i$ 也必不是 $\delta_k(\lambda)$ 的根 $(k\geqslant j)$. 利用状态反馈阵，重复定理 1 中条件1)的证明，可得(18)′式：

$$|\lambda I-A+BK|=\varphi_{\bar r}(\lambda)\left[\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n-1}\cdots\sum_{j_{\bar r}=1}^{n-\bar r+1}\bar\alpha_{1j_1}(\lambda)\bar\alpha_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)\cdots\bar\alpha_{(\bar r,j_{\bar r})}^{(\bar r-1,j_{\bar r-1})}(\lambda)\psi_{(\bar r,j_{\bar r})}^{(\bar r-1,j_{\bar r-1})}(\lambda)\right], \tag{18$'$}$$

其中 $\bar r$ 为 K 阵非全零的行数或列数，$\varphi_{\bar r}(\lambda)$ 是矩阵 $\lambda I-A$ 中 $(n-\bar r)$ 阶代数余子式的最高公因式．由代数知识可知，当 $1\leqslant\bar r<r_0$ 时，

$$\varphi_{\bar{r}}(\lambda)=\delta_{\bar{r}+1}(\lambda)\cdot\delta_{\bar{r}+2}(\lambda)\cdots\delta_{r_0}(\lambda). \tag{4}$$

由于K阵仅含$\bar{r}$行(或列)待定参数,所以(4)式不含有K阵参数. 于是(18)式[1]可改写为

$$|\lambda I-A+BK|=\delta_{\bar{r}+1}(\lambda)\cdot\delta_{\bar{r}+2}(\lambda)\cdots\delta_{r_0}(\lambda)\cdot\psi(\lambda,K). \tag{5}$$

由(5)可知,K阵参数集中出现在 $\psi(\lambda, K)$ 中. 令 $\bar{r}=\alpha$, 则由假定 $\delta_{\alpha+1}(\lambda)\delta_{\alpha+2}(\lambda)\cdots\delta_{r_0}(\lambda)$ 仅含稳定的特征根,而 $\psi(\lambda, K)$ 是一个次数为 J_0 的多项式, $J_0=\sum_{i=1}^{\alpha}J_i$,$J_i$是不变因子 $\delta_i(\lambda)$ 的次数. 由此可知,若 $\psi(\lambda, K)$ 含有 J_0 个K阵待定参数,就可能将全部不稳定极点 $\bar{\lambda}_i(i=1,\cdots,s)$ 配置到所需位置上去. 若 $\bar{r}<\alpha$, 如 $\bar{r}=\alpha-1$, 则有

$$\psi_{\bar{r}}(\lambda)|_{\bar{r}=\alpha-1}=\varphi_{\alpha-1}(\lambda)=\delta_\alpha(\lambda)\cdot\delta_{\alpha+1}(\lambda)\cdots\delta_{r_0}(\lambda).$$

由假定 $\delta_\alpha(\lambda)$ 含有不稳定极点,说明为镇定此系统的状态反馈阵 K, 非零元素占据的行数和列数,全不得少于α, 于是得到

定理 3. 设完全可控系统 $\Sigma=(A, B)$ 是不稳定的, $\bar{\lambda}_i(i=1,2,\cdots,s)$是其互异的不稳定极点, 且分别是 $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda),\cdots,\delta_\alpha(\lambda)$ 的根. $\delta_i(\lambda)$ 是A阵的非平凡不变因子, $\delta_{i+1}(\lambda)|\delta_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r_0-1)$. 为把 $\bar{\lambda}_i$ 配置到所需位置的状态反馈阵K必须满足的结构条件是: 1)K阵至少含有 $J_0=\sum_{i=1}^{\alpha}J_i$ 个待定参数. 这里 J_i 是不变因子 $\delta_i(\lambda)$ 的次数; 2)K阵非零行或非零列数均不得少于α; 3) 至少有一个待定参数位于BK 阵的主对角线上.

若记C为观测阵,H为输出反馈阵,把K阵视为 $H\cdot C$, 则定理 3 对输出反馈是同样成立的. 因为K或H阵的非零列数,表示了参加反馈的变量个数,于是得到

推论 3. 在与定理 3 条件相同的情况下,为镇定一个不稳定系统,至少需有α个不同的变量参加反馈. α为不稳定极点所属的不变因子的个数.

三、例

利用上述结论可以计算最经济反馈阵,下面给出状态反馈阵的计算实例.

例 1. 设给定

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\-1&1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

计算可知 $r_0=2$. 因为$n=3$, 所以具有三个待定参数, 两个非零行（或列）的最经济K阵结构共有 $C_3^2\cdot C_3^1\cdot 2=18$ 种. 用定理 1 检验后可知有 14 种满足要求,考虑实际造价取最廉价者, 例如为

$$K_1=\begin{bmatrix}k_1&k_2&0\\0&k_3&0\end{bmatrix},\quad K_2=\begin{bmatrix}0&k_1&k_2\\0&k_3&0\end{bmatrix},$$

首先计算 K_1.

$$\lambda I-A+BK_1=\begin{bmatrix}\lambda&k_3-1&-1\\k_1&\lambda+k_2-1&0\\1&-1&\lambda-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&\bar{k}_3&-1\\k_1&\lambda+\bar{k}_2&0\\1&-1&\lambda-2\end{bmatrix}.$$

---

1) 见附录.

其中 $\bar{k}_3 = k_3 - 1$，$\bar{k}_2 = k_2 - 1$. 计算可得

$$|\lambda I - A + BK_1| = \lambda^3 + \lambda^2(\bar{k}_2 - 2) + \lambda(1 - 2\bar{k}_2 - k_1 \cdot \bar{k}_3) + k_1 + \bar{k}_2 + 2k_1 \cdot \bar{k}_3$$

令希望的极点为 λ_i，则

$$\prod_{i=1}^{3} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

由此可知：$k_2 = a_2 + 3$，$k_1 = a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4$，$k_3 = (a_0 + a_1 + a_2 + 1)/(a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4)$. 对任意分配的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，$K_1$ 阵总是可解的. 再计算 K_2 阵.

$$\lambda I - A + BK_2 = \begin{bmatrix} \lambda & k_3 - 1 & -1 \\ 0 & \lambda + k_1 - 1 & k_2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix},$$ 计算行列式值：

$$|\lambda I - A + BK_2| = \lambda^3 + \lambda^2(k_1 - 3) + \lambda(3 - 2k_1 + k_2) + (k_1 - k_2 + k_2 \cdot k_3 - 1)$$

由此解出：

$$k_1 = a_2 + 3, \qquad k_2 = a_1 + 2a_2 + 3,$$
$$k_3 = (a_0 + a_1 + a_2 + 1)/(a_1 + 2a_2 + 3).$$

由此可知，具有最经济结构的反馈阵，不仅可以实现，而且解不唯一. 在工程设计中，无需逐一列出 K 阵的全部可能结构，可依据 $K = r \times n$ 阵每个元素的造价，取最廉价的 n 个元素，用定理 1 检查是否满足必要条件，若不满足，可在 K 阵的低价元素中调整，使获得的 K 阵满足必要条件，然后通过计算检验极点的可配置性. 由于不再考虑高价元素，工作量将大为减少.

例 2. 设给定系统为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算可知，系统可控，且 $r_0 = 2$. 因为 $n = 4$，所以应有 2 行或 2 列非零元素. 含有 4 个待定参数的 K 阵结构有 $C_4^1 \cdot C_4^3 + C_4^2 \cdot C_4^2 + C_4^3 \cdot C_4^1 = 68$ 种，依最经济原则选定的结构为

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}.$$

求解特征方程如下：

$$|\lambda I - A + BK| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda - 3 & 5 & -4 \\ -8 & 4 & \lambda + \bar{k}_3 & \bar{k}_4 \\ -15 & 10 & \bar{k}_1 & \lambda + \bar{k}_2 \end{vmatrix}$$

这里 $\bar{k}_1 = k_1 - 11$，$\bar{k}_2 = k_2 + 11$，$\bar{k}_3 = k_3 - 3$，$\bar{k}_4 = k_4 + 4$，计算后可知 λ 的各次幂系数如下：

λ^4: 1,

λ^3: $\bar{k}_2 + \bar{k}_3 + 4$,

λ^2: $-4\bar{k}_2 - 4\bar{k}_3 - \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_4 + \bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3 + 27$,

λ: $-24\bar{k}_1 - 28\bar{k}_2 + 55\bar{k}_3 + 65\bar{k}_4 + 4\bar{k}_1\bar{k}_4 - 4\bar{k}_2\bar{k}_3 - 3$,

λ^0: $-4\bar{k}_1 - 8\bar{k}_2 + 5\bar{k}_3 + 10\bar{k}_4 + 20$,

于是得到方程组：

$$\begin{aligned} a_0 &= -4\bar{k}_1 - 8\bar{k}_2 + 5\bar{k}_3 + 10\bar{k}_4 + 20 \\ a_1 &= -24\bar{k}_1 - 28\bar{k}_2 + 55\bar{k}_3 + 65 \cdot \bar{k}_4 + 4\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_4 - 4\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3 - 3 \\ a_2 &= -4\bar{k}_2 - 4\bar{k}_3 - \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_4 + \bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3 + 27 \end{aligned}$$

$$a_3 = \qquad \bar{k}_2 + \bar{k}_3 \qquad +4$$

化等价方程组如下：

$$\bar{k}_2 + \bar{k}_3 = a_3 - 4 = \bar{a}_1 \tag{6}$$

$$\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_4 - \bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3 = -a_2 - 4a_3 + 43 = \bar{a}_2 \tag{7}$$

$$-4\bar{k}_1 + 13\bar{k}_3 + 10\bar{k}_4 = a_0 + 8a_3 - 52 = \bar{a}_3 \tag{8}$$

$$-24\bar{k}_1 + 83\bar{k}_3 + 65\bar{k}_4 = a_1 + 4a_2 + 44a_3 - 281 = \bar{a}_4 \tag{9}$$

自(8),(9)式解出 $\bar{k}_1$, $\bar{k}_4$ 为：

$$\bar{k}_1 = \frac{3}{4}k_3 + \frac{1}{2}\bar{a}_4 - \frac{13}{4}\bar{a}_3 \tag{10}$$

$$\bar{k}_4 = -\bar{k}_3 + \frac{1}{5}(\bar{a}_4 - 6\bar{a}_3) \tag{11}$$

自(6)式解得

$$\bar{k}_2 = -\bar{k}_3 + a_1 \tag{12}$$

代入(7)式得到

$$5\bar{k}_3^2 + (-20\bar{a}_1 + 47\bar{a}_3 - 7\bar{a}_4) \cdot \bar{k}_3 + (2\bar{a}_4 - 13\bar{a}_3)(\bar{a}_4 - 6\bar{a}_3) - 20\bar{a}_2 = 0.$$

于是得到如下形式的二次方程：

$$\bar{k}_3^2 + p \cdot k_3 + q = 0. \tag{13}$$

当 $p^2 - 4q \geqslant 0$ 时，(13)式有实数解。代入(10),(11),(12)就可得出K阵待定参数的数值。若 $p^2 - 4q < 0$，不一定说明此问题无解。因为在 68 种可能的K阵结构中，仅检验了一种。只有当 68 种结构全经过检验，且均无实解，由定理 1 描述的最经济反馈阵K才不存在。

四、结 束 语

最后再指出一个事实，为任意配置全部极点而得的方程组(3)，总希望阶次最低。依照这种算法，在配置 n 个极点时，最低的次数为 r_0，在镇定一个系统时，最低的次数为 α，即不稳定特征根所属的不变因子的个数。

在本文的写作过程中，得到了涂序彦、张荣祥、陈兆宽老师的帮助，在此表示感谢。

附 录

定理 1 的证明. 若K阵中没有一个待定参数位于 BK 阵的主对角线上，则 $|\lambda I - A + BK|$ 的展开式(2)中，λ^{n-1} 项的系统 $\tilde{a}_{n-1}$ 不含有K阵参数。由方程式(3)可知，对任意的$a_i(i = 0,1,\cdots, n-1)$ (3) 式无解。

若 BK 阵的主对角线上仅仅含有一个K阵参数，无妨记作 k_1，但是不满足条件4)，即在 $\lambda I - A + BK$ 阵中含有 $k_i(i = 2, 3, \cdots, n)$ 的元素，在 $\lambda I - A + BK$ 矩阵的转置位置上全是零。由行列式诸项的构成法则可知，λ^{n-2} 次幂的系数 $\tilde{a}_{n-2}$ 仅含有 k_1，而不含有 $k_i(i = 2, 3, \cdots, n)$。由于 $\tilde{a}_{n-1}$, $\tilde{a}_{n-2}$ 两个系数仅含一个待定参数 k_1，所以方程(3)无解，n 个极点不可能任意配置。

设矩阵 $\lambda I - A + BK$ 不满足条件 5)，则此阵一定可写成：

$$\lambda I - A + BK = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0\cdots 0\lambda - a_{ii} 0\cdots 0 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

这里 M_1, M_2 为 $\lambda I - A + BK$ 阵的前 $i-1$ 行和后 $n-i$ 行构成的矩阵。沿第 i 行展开得到：

$$|\lambda I - A + BK| = (\lambda - a_{ii}) \cdot A_{ii}(\lambda, K).$$

其中 $A_{ii}(\lambda,K)$ 为 $\lambda - a_{ii}$ 的余子式。由此可知 $\lambda = a_{ii}$ 是原开环系统固有的极点。划去 $\lambda I - A + BK$ 阵的第 i 行和第 i 列，得到新阵 $\lambda I' - A' + B'K'$，若不满足条件 5)，则闭环特征多项式中总要出现开环系统固有的极点。反复进行上述论证，就证明了条件 5) 的必要性。

$|-A + BK| \neq 0$ 的要求是显然的，否则方程式(3)中的 $\tilde{a}_0$ 不含有 K 阵参数，对任意的 $a_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ (3) 式显然无解。

最后证明条件 1)。为方便，约定如下记法：任给一个多项式矩阵 $F(\lambda) = [f_{ij}(\lambda)]_{n\times n}$，其中 $f_{ij}(\lambda)$ 是实域 R 上的 λ 多项式。经过有限次初等变换后 $F(\lambda)$ 化为 $G(\lambda)$，称 $F(\lambda)$ 与 $G(\lambda)$ 相抵，记为 $F(\lambda) \sim G(\lambda)$。由线性代数的知识可知，必存在么模阵 $P(\lambda)$，$Q(\lambda)$ (Unimodular matrix) 使得 $P(\lambda)F(\lambda) \times Q(\lambda) = G(\lambda)$，其中 $|P(\lambda)|$ 和 $|Q(\lambda)|$ 均为非零常数。

任给定常矩阵 $A_{n\times n}$，必存在么模阵 $P(\lambda)$，$Q(\lambda)$ 使得

$$P(\lambda) \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \delta_{r_0}(\lambda) & & & \\ & 0 & & & \delta_{r_0-1}(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \delta_1(\lambda) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

成立。其中 $\delta_{i+1}(\lambda) | \delta_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \cdots, \delta_{r_0-1})$ 是 A 阵的非平凡不变因子，r_0 是 A 阵非平凡不变因子的个数，$\delta_{r_0}(\lambda)$ 是 λ 多项式，其次数大于或等于 1.

如果 K 阵元素占据的行数或列数小于 r_0，则有 $\mathrm{Rank} K = \bar{r} < r_0$，于是有下述不等式：

$$\mathrm{Rank}BK \leqslant \min(\mathrm{Rank}B; \mathrm{Rank}K) \leqslant \mathrm{Rank}K = \bar{r} < r_0.$$

由此可知存在非奇异矩阵 Q，Q^{-1}，使得

$$Q^{-1} \cdot BKQ = \begin{bmatrix} M_{\bar{r}\times\bar{r}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

其中，$M_{\bar{r}\times\bar{r}} = [h_{ij}]_{\bar{r}\times\bar{r}}$，由此得到

$$f^*(\lambda) = |\lambda I - A + BK| = |\lambda I - Q^{-1}AQ + Q^{-1} \cdot BKQ|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc|ccc} \lambda - \tilde{a}_{11} + h_{11}; & -\tilde{a}_{12} + h_{12}; & \cdots\cdots; & -\tilde{a}_{1\bar{r}} + h_{1\bar{r}}; & -\tilde{a}_{1\bar{r}+1}; & \cdots; & -\tilde{a}_{1n} \\ -\tilde{a}_{21} + h_{21}; & \lambda - \tilde{a}_{22} + h_{22}; & \cdots\cdots; & -\tilde{a}_{2\bar{r}} + h_{2\bar{r}}; & -\tilde{a}_{2\bar{r}+1}; & \cdots; & -\tilde{a}_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \\ -\tilde{a}_{\bar{r}1} + h_{\bar{r}1}; & -\tilde{a}_{\bar{r}2} + h_{\bar{r}2}; & \cdots\cdots; & \lambda - \tilde{a}_{\bar{r}\bar{r}} + h_{\bar{r}\bar{r}}; & -\tilde{a}_{\bar{r}\bar{r}+1}; & \cdots; & -\tilde{a}_{\bar{r}n} \\ \hline -\tilde{a}_{\bar{r}+11}; & -\tilde{a}_{\bar{r}+12}; & \cdots\cdots; & -\tilde{a}_{\bar{r}+1\bar{r}}; & \lambda - \tilde{a}_{\bar{r}+1\bar{r}+1}; & \cdots; & -\tilde{a}_{\bar{r}+1n} \\ -\tilde{a}_{\bar{r}+21}; & -\tilde{a}_{\bar{r}+22}; & \cdots\cdots; & -\tilde{a}_{\bar{r}+2\bar{r}}; & -\tilde{a}_{\bar{r}+2\bar{r}+1}; & \cdots; & -\tilde{a}_{\bar{r}+2n} \\ & & \cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \\ -\tilde{a}_{n1}; & -\tilde{a}_{n2}; & \cdots\cdots; & -\tilde{a}_{n\bar{r}}; & -\tilde{a}_{n\bar{r}+1}, & \cdots; & \lambda - \tilde{a}_{nn} \end{array} \right| \quad (14)$$

此行列式的前 $\bar{r}$ 行、$\bar{r}$ 列含有 h_{ij} 元素，也即含有 K 阵待定参数 k_{ij}，其余部分仅仅是 $\lambda I - Q^{-1}AQ$ 矩阵的元素。记 $Q^{-1}AQ = [a_{ij}]_{n\times n}$，沿(14)式的第一行做拉普拉斯展开

$$f^*(\lambda) = \sum_{j_1=1}^{n} \tilde{a}_{1j_1}(\lambda) \cdot A_{1j_1}(\lambda). \quad (15)$$

这里 $\lambda I - Q^{-1} \cdot A \cdot Q + Q^{-1} \cdot BK \cdot Q = [\tilde{a}_{ij}(\lambda, K)]_{n\times n}$，(15) 中的 $A_{1j_1}(\lambda)$ 是 $\tilde{a}_{ij}(\lambda, K)$ 的代数余子式，且 $A_{1j_1}(\lambda)$ 的第一行元素是(14)式的第二行元素。沿 $A_{1j_1}(\lambda)$ 的第 1 行展开可得到

$$A_{1j_1}(\lambda)=\sum_{j_2=1}^{n-1}\bar{\alpha}_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)\cdot A_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda),\tag{15-1}$$

这里 $\bar{\alpha}_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)$ 表示 $A_{1j_1}(\lambda)$中第一行的元素. 因为它们是(14)式的第二行的元素,所以右下标的行序数仍记作 2, 只是列序数记作 j_2, 以便和(15)式中的列序数 j_1 相区别. $A_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)$ 是 $\bar{\alpha}_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)$ 的代数余子式. 再沿 $A_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)$ 的第一行元素展开,一直展开到(14)式的第 $\bar{r}$ 行元素为止. 由此得到表达式

$$\left.\begin{aligned}
A_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)&=\sum_{j_3=1}^{n-2}\bar{\alpha}_{(3,j_3)}^{(2,j_2)}(\lambda)\cdot A_{(3,j_3)}^{(2,j_2)}(\lambda),\\
A_{(3,j_3)}^{(2,j_2)}(\lambda)&=\sum_{j_4=1}^{n-3}\bar{\alpha}_{(4,j_4)}^{(3,j_3)}(\lambda)\cdot A_{(4,j_4)}^{(3,j_3)}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A_{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}^{(\bar{r}-2,j_{\bar{r}-2})}(\lambda)&=\sum_{j_{\bar{r}}=1}^{n-\bar{r}+1}\bar{\alpha}_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)\cdot A_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda).
\end{aligned}\right\}\tag{15-2}$$

将(15-1),(15-2)式顺序代回(15)式得到:

$$f^*(\lambda)=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n-1}\cdots\sum_{j_{\bar{r}}=1}^{n-\bar{r}+1}\cdot\bar{\alpha}_{1j_1}(\lambda)\cdot\bar{\alpha}_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)\cdots\bar{\alpha}_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)\cdot A_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda).\tag{16}$$

因为 $A_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)$是由(14)式的后 $n-\bar{r}$ 行的元素产生的 $(n-\bar{r})\times(n-\bar{r})$ 阶行列式,所以它不含有 h_{ij} 元素,即不含有K阵待定参数. 这样(16)式中出现的代数余子式 $A_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)$,是 $\lambda I-Q^{-1}AQ$ 阵中 $(n-\bar{r})$ 阶代数余子式的一部分. 因为A与 $Q^{-1}AQ$ 阵相似, 它们有共同的不变因子式和相同的最高公因式,所以(16)式中出现的代数余子式至少含有和 $\lambda I-A$ 阵的 $(n-\bar{r})$ 阶余子式相同的公因式,记做 $\varphi_{\bar{r}}(\lambda)$. 又因 $\bar{r}<r_0$,所以公因式 $\varphi_{\bar{r}}(\lambda)$ 的阶次大于等于 1,(16) 式可改写为:

$$A_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)=\varphi_{\bar{r}}(\lambda)\cdot\psi_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda),\tag{17}$$

$$f^*(\lambda)=\varphi_{\bar{r}}(\lambda)\cdot\left[\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n-1}\cdots\sum_{j_{\bar{r}}=1}^{n-\bar{r}+1}\bar{\alpha}_{1,j_1}(\lambda)\bar{\alpha}_{(2,j_2)}^{(1,j_1)}(\lambda)\cdots\cdots\bar{\alpha}_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)\cdot\psi_{(\bar{r},j_{\bar{r}})}^{(\bar{r}-1,j_{\bar{r}-1})}(\lambda)\right]\tag{18}$$

$\varphi_{\bar{r}}(\lambda)$ 所代表的是原开环系统固有的极点,所以 n 个极点不可能任意配置. 条件1)的必要性证明完毕.

参　考　文　献

[1] 涂序彦,控制系统的最经济结构综合问题. 自动化学报, **8**, 1982, 103—111.

[2] 陈兆宽、张荣祥,线性控制系统最经济综合问题的代数解法,自动化学报, **7**, 1981, 171—178.

[3] 须田信英等,自动控制中的矩阵理论,科学出版社, 1979 年 9 月.

[4] W. A. Wolovich, Linear Multivariable Systems, 1974, Sptinger-verlag, New York.

[5] A. N. 马力茨夫,线性代数基础, 1957, 人民教育出版社.

THE MOST ECONOMICAL STRUCTURAL SYNTHESIS OF THE CLOSE-LOOP CONTROL SYSTEMS

LIU WEI
(Institute of Automation, Academia Sinica)

ABSTRACT

In order to locate arbitrarily N poles of a linear system, first, how to determine the minimal numbers of non-zero rows (or columns) and non-zero elements of the feedback matrix, the number of the feedback variabl es of the system are discussed. Then the structural characteristics of the feedback matrix for stabilizing a non-stable linear system is given. Finally the synthesis method of the most economical structural feedback matrix is also introduced.

IFAC 举行成立二十五周年纪念日庆祝活动及国际讨论会

一九八二年十月一日于西德海德堡举行了 IFAC 成立二十五周年纪念日庆祝活动和 IFAC 国际讨论会，出席代表一百七十余人．会议期间还召开了各种工作会议．

庆祝活动由西德国家会员组织（VDI/VDE）主办．IFAC 理事长、匈牙利的 T. Vamos 院士主持会议并致开幕词．VDI 理事长 G. W. Becker 博士、VDE 主席 D. Ernst 博士、VDI/VDE 联合会理事长 F. D. Althoff 博士、IFAC 下届理事长、西德的 M. Thoma 教授分别致词．最后，由海德堡市市长 R. Zundel 先生致词．

IFAC 国际讨论会上共有十个发言．首先由 IFAC 第一届理事长 H. Chestnut 博士作了“IFAC 二十五年——从海德堡到海德堡”的报告，其余九个发言分为四个专题：一、对技术的影响，由美国 IEEE 理事长 R. E. Larson 作了“IFAC 第一个二十五年际控制技术的发展”的发言，日本早稻田大学研究部主任 I. Kato 作了“机器人技术产生的影响”的发言，维也纳大学 H. Zemanek 教授作了“自动控制与讯息处理”的发言；二、对社会的影响，由 B. G. Tamm 院士代为选读了苏联 V. A. Trapeznikov 院士的“自动控制对社会的影响”，英国曼彻斯特大学 H. H. Rosenbrock 教授作了“机器与人”的发言；三、对经济的影响，由西德汉诺威大学 E. Pestal 教授作了“现代技术对社会和经济的影响”的发言，丹麦 A. Jensen 教授作了“对经济的影响”的发言；四、对发展中国家的影响，中国自动化学会副秘书长吴忠明作了“控制论与系统方法对人口、环境及资源的影响”的发言，联合国工业发展组织（UNIDO）代表 A. G. Evstafiev 作了“对发展中国家的影响”的发言．

（吴忠明）