第9卷 第1期 自动化学报 Vol. 9, No. 1
1983年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1983

人口系统稳定性中临界妇女生育率的探讨

胡保生 王浣尘
(西安交通大学)

摘要

本文简要地讨论人口系统稳定性中临界妇女生育率的离散和连续两种计算公式的关系，并对连续型给出了一种较好的离散化计算公式. 用具体数字说明几种公式在计算中的差异，从而看出从离散方程导出的离散公式在应用时较为直接方便，与实际更为贴切.

人口系统的动态研究在国内外得到了普遍的重视[1-5]. 关于人口系统的稳定性研究，1972年文[1]作了介绍，并利用控制理论导出了离散模型和连续模型稳定性的充要条件；1981年文[6]结合中国特点作了研究；1980—1981年文[10—12]在我国人口预测和分析中已经引用了夫妇平均临界总和生育率的数值.

本文简要地讨论临界妇女生育率的连续型离散化公式和离散型公式的关系.

一、临界妇女生育率的计算公式

离散型人口系统方程为:

$$\beta_1=\left(\sum_{i=r_1}^{r_2}(1-\mu_{00})(1-\mu_0)\cdots(1-\mu_{i-1})k_ih_i\right)^{-1}. \qquad (1)$$

式中 β_1 为离散型临界妇女总和生育率，μ_i 为 i 岁组的前向按龄死亡率，至于 μ_{00}，由于在人口学界和医学界中有其传统的确切含义，为了避免概念的含混，建议把 μ_{00} 称为婴儿当年死亡率[7,8]. k_i 为 i 岁组妇女人数与同岁组人口总数的比例，h_i 为妇女生育模式[3-6].

连续型人口系统方程为

$$\beta_{cr}=\left(\int_0^\infty e^{-\int_0^r\mu(\rho)d\rho}k(r)h(r)dr\right)^{-1}. \qquad (2)$$

式中 β_{cr} 为连续型临界妇女总和生育率，$\mu(r)$ 为连续型相对死亡率，$k(r)$ 为 r 岁妇女人数与同龄人口总数的比例，$h(r)$ 为育龄妇女的生育模式[5,6].

目前人们往往把 β_1 和 β_{cr} 混淆起来，以为 $\beta_1=\beta_{cr}$. 其实，β_1 指的是某一段时间范围内(譬如一年)的平均值，β_{cr} 指的是某一时刻上的计算值.

在目前或以往的人口统计中所能得到的不是连续函数 $\mu(r)$，$k(r)$，$h(r)$，而往往是它们的按年统计平均值 μ_i，k_i，h_i. 因此，连续型公式(2)目前是无法应用的，若要计

本文于1981年8月19日收到.

算，必须给出其离散化形式．这种形式必然应该同式（1）相对应，相协调．文[6]给出式(2)的离散化形式为

$$\beta_{cr} \approx \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} k_i h_i e^{-\left(\mu_{00} + \sum_{a=0}^{i} \mu_a\right)}\right)^{-1}. \tag{3}$$

如果按照文[9]的精神，式(2)的离散化形式应为

$$\beta_{cr} \approx \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} k_i h_i e^{-\left(\sum_{a=0}^{i} \mu_a\right)}\right)^{-1}, \tag{4}$$

与式(3)相比缺少 μ_{00} 项．

作者认为，式(2)的离散化形式应为

$$\beta_{cr} \approx \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} k_i h_i e^{-\left(\mu_{00} + \sum_{a=0}^{i-1} \mu_a\right)}\right)^{-1}, \tag{5}$$

这是因为 e 的指数部分中 μ_a 对应于连续年龄从年初的 $r \in [a, a+1)$ 到年底的 $r \in [a+1, a+2)$ 的统计平均值，因而其中 $a=0$ 到 $i-1$ 的求和才同其对应的系统 $k_i h_i$ 相符合．

文[6]已经发现式(3)同式(1)的差异，不仅有 $(1-\mu_i)$ 与 $e^{-\mu_i}$ 的差别，同时也提到了项数的差别．至于式(4)比式(3)缺少一项 μ_{00}，而式(5)同式(1)相比项数不少，只是 $(1-\mu_i)$ 与 $e^{-\mu_i}$ 的差别．

离散型状态方程和连续型方程用来描述同一个人口系统，应该是协调的，因而由离散型状态方程导出的离散型计算公式(1)与由连续型方程导出连续型公式(2)的离散化形式在计量上应该是一致的．但是目前连续型公式(2)的离散化形式有三种，即式(3)，(4)，(5)，取那一种为妥呢？需要进行分析讨论．

二、公式(1)，(3)—(5)的定量计算和偏差分析

为了讨论和对比的方便，采用文[6]的 μ_i，k_i 和 x^2 分布密度函数 h_i 的数据．先考察 $(1-\mu_i)$ 同 $e^{-\mu_i}$ 的差别．按 $e^{-\mu_i}$ 的级数展开有

$$e^{-\mu_i} = 1 - \mu_i + \left(\frac{\mu_i^2}{2!} - \frac{\mu_i^3}{3!} + \cdots\right).$$

由于 $0<\mu_i \leqslant 1$，上式右端括号中的和式必然大于 0，这时，必有 $e^{-\mu_i} > 1-\mu_i$，当 $0<\mu_i \leqslant 1$，而且其相对偏差

$$\varepsilon \triangleq \frac{e^{-\mu_i} - (1-\mu_i)}{(1-\mu_i)},$$

必有关系式

$$\varepsilon < \varepsilon'' < \varepsilon'.$$

其中

$$\varepsilon' \triangleq \frac{\mu_i^2}{2!}, \quad \varepsilon'' \triangleq \frac{\mu_i^2}{2!} - \frac{\mu_i^3}{3!} + \frac{\mu_i^4}{4!}.$$

在讨论我国妇女生育率问题的时候，μ_i 通常在 2×10^{-2}—1×10^{-4} 的范围之内，这时的偏差均在万分之二左右或以下．今用 8 位显示 10 位内存计算器计算 $e^{-\mu_i}$ 及其偏差 ε_*

等，如表 1 所示.

表 1

μ_i	$1-\mu_i$	$e^{-\mu_i}$	ε_*	ε''	ε'
	A	B	$\triangleq(B-A)/A$		
2×10^{-2}	0.9800000	0.9801986	2.027×10^{-4}	2.024×10^{-4}	2.041×10^{-4}
1×10^{-2}	0.9900000	0.9900498	5.034×10^{-5}	5.030×10^{-5}	5.051×10^{-5}
1×10^{-3}	0.9990000	0.9990005	5.005×10^{-7}	5.003×10^{-7}	5.005×10^{-7}
1×10^{-4}	0.9999000	0.9999000+	5.901×10^{-9}	5.000×10^{-9}	5.001×10^{-9}

从表中 ε_* 和 ε''，ε' 等数字的对比中已经可以看出用 8 位显示 10 位内存计算器计算的 e 函数所存在的运算误差．因此，在具体计算中过分追求计算精度是不切实际的．

利用我国实际数据计算 $(1-\mu_i)$ 或 $e^{-\mu_i}$ 的连乘积，其中 $i=0$—17，其偏差也为万分之几．现在按式(1)和式(3)—(5)对我国实际数据进行计算，其结果如表 2，3 所示．

表 2

年　份	式(1)	式(3)	式(4)	式(5)
1975	$\dfrac{2.1974500}{1-\mu_{00}(75)}$	$\dfrac{2.1999740}{\exp(-\mu_{00}(75))}$	2.1999740	$\dfrac{2.1969495}{\exp(-\mu_{00}(75))}$
1978	$\dfrac{2.2270864}{1-\mu_{00}(78)}$	$\dfrac{2.2297441}{\exp(-\mu_{00}(78))}$	2.2297441	$\dfrac{2.2264603}{\exp(-\mu_{00}(78))}$

表 3

年　份	偏差 $\dfrac{(3)-(1)}{(1)}$	偏差 $\dfrac{(4)-(1)}{(1)}$	偏差 $\dfrac{(5)-(1)}{(1)}$
1975	$+1\times10^{-3}$	$-(1-2)\times10^{-2}$	$-(2-4)\times10^{-4}$
1978	$+1\times10^{-3}$	$-(1-2)\times10^{-2}$	$-(2-4)\times10^{-4}$

从表中数字可以看出，对原离散型公式(1)来说，式(3)的偏差为正的千分之几，式(5)为负的万分之几，而式(4)则达到负的百分之几．由此可见，式(4)中缺少 μ_{00} 项，偏差为负，误差大，不妥；式(3)中多了一项 μ_i，因而偏差为正，也不甚妥；式 (5) 项数同式(1)相同，只不过是用指数函数进行运算，其偏差仍为万分之几，可见连续公式(2)的离散化形式以式(5)为妥．

总之，利用连续型方程导出连续公式(2)的离散化形式有三种，这几种形式相对于直接离散型公式(1)的偏差有正有负，有大有小，而且还带进了指数函数计算的问题，因此，利用离散型状态方程所导出的公式(1)在应用中较为直接方便，与实际更为贴切．

目前我国关于生育率的提法是指一对夫妇平均生育的孩子数，夫妇双方各有同等的权利和义务．这相当于在临界妇女生育率公式中取 $k=0.5$．这样，按我国实际抽样数据进行计算，对于一对夫妇平均临界总和生育率 1975 年为 2.15，1978 年为 2.17，对七十

年代后期平均可取 2.16.

参 考 文 献

[1] 高桥安人，种族个体数的力学与控制，计测と制御，(I, II, III) **11** (1972), No. 8,9,10.
[2] H. Kwakernaak, Application of Control Theory to Population Policy, New Trends in Systems Analysis, Springer-verlag, 1977, 359—378.
[3] 王浣尘，人口状态和人口的动态过程，西安交大学报 **14** (1980), 1—11.
[4] 王浣尘，人口控制的大系统结构及控制决策的综合，西安交大学报，**14** (1980), 13—24.
[5] 宋健、王浣尘、于景元、李广元，人口动态过程的控制和大系统结构，系统工程论文集，科学出版社，1980.
[6] 宋健、于景元，人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率，自动化学报，**7** (1981), 1—12.
[7] 王浣尘，关于人口统计中死亡率和平均寿命等的探讨，人口研究，No. 2, 1980 年，36—44.
[8] 王浣尘、万百五，人口模型的两种转化形式，自动化学报，**6** (1980) ,250—256.
[9] 宋健、于景元、李广元，人口发展过程的预测，中国科学，No. 9., 1980.
[10] 宋健、王浣尘、于景元、李广元，人口发展过程的预测和控制，系统工程与科学管理，No. 2, 1980, 1—67.
[11] H. C. Wang, Z. H. Jiang, G. J. Sun, Y. J. Wang, Population Control Systems, The Paper on the Symposium of 2nd IFAC Large Scale Systems, Theory and Applications, Toulouse, France, June, 1980.
[12] 王浣尘，人口动态过程和主劳力系数，中美系统分析学术讨论会论文集，1981.

DISCUSSION ON CRITICAL FERTILITY RATES OF WOMEN IN STABILITY THEORY OF POPULATION SYSTEMS

HU BAOSHENG WANG WANCHEN

(*Xi'an Jiaotong University*)

ABSTRACT

This paper discusses briefly the relationship between formulas of both discrete and continuous expressions for critical fertility rates of women in stability theory of population systems. The better one of discrete formulas derived from continuous equations is given. The differences of formulas are shown with numerical results. Thus we can see that the discrete formula derived from discrete state equations is rather direct and available for applications.