第9卷 第2期 自动化学报 Vol. 9, No. 2
1983年4月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1983

短文

# 线性最优控制系统的频域综合方法

## (单输入-单输出系统)

王恩平 王朝珠
(中国科学院系统科学研究所)

摘　　要

本文用频域方法讨论了二次性能指标下的单输入-单输出线性最优控制系统的综合问题，得到了该问题解的频域形式. 该文采用谱分解技术把求解频域形式最优控制归结为解两个(或一个) Diophantine 方程问题.

## 一、问题的叙述

在时域里，二次性能指标下的最优控制问题已得到解决[1]，其解为状态反馈形式. 但是，"状态"往往不能直接量测，必须构造状态观测器，用估计状态实现反馈. 本文直接从频域出发讨论了最优控制器的设计问题，为简单起见，首先讨论单输入-单输出系统，文献[3]，[4]曾讨论过离散时间的最优控制问题.

已知定常线性系统

$$p(s)z(s)=q(s)u(s)+T(s)e_0, \tag{1.1}$$

其中，$z(s)$ 是系统的输出；$u(s)$ 是系统的控制输入；$e_0$ 是脉冲干扰输入；$p(s)$，$q(s)$ 和 $T(s)$ 都是 $s$ 的多项式；$s$ 是 Laplace 变换符号. 设 $p(s)$ 与 $q(s)$ 互质，$n=\deg(p(s))>\deg(q(s))$，$\deg(T(s))=\deg(P(s))-1$，$T(s)$ 是一个稳定的多项式. 考虑二次性能指标为

$$J[u]=\int_0^\infty [z^2(t)+\rho u^2(t)]dt, \tag{1.2}$$

其中 $\rho>0$ 为常数. 由 Parseval 等式，式(1.2)可化为

$$J[u]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[z(-s)z(s)+\rho u(-s)u(s)]ds. \tag{1.3}$$

这里 $j=\sqrt{-1}$. 为保证 $J[u]<\infty$，容许控制应满足: 1) $u(s)$ 是在右半闭平面内解析的真有理分式; 2) 由 $u(s)$ 决定的轨线 $z(s)$ 也在右半闭平面内解析. 记容许控制集合

本文于1982年4月20日收到.

为 $\Omega$，从一般线性调节理论容易说明，$\Omega$ 是非空的．所谓最优控制的综合就是从 $\Omega$ 中选取一个控制 $u(s)$，在 (1.1) 式的约束下使性能指标 (1.2) 或 (1.3) 达到极小．

## 二、谱分解和 Diophantine 方程的解

**引理 1.** 已知拟互质多项式 $p(s)$，$q(s)$ 及正常数 $\rho$，则必存在稳定的多项式 $\Delta(s)$ 使得

$$\Delta(-s)\Delta(s)=\rho p(-s)p(s)+q(-s)q(s). \tag{2.1}$$

证明见文献 [5]．

**引理 2.** 已知互质多项式 $p(s)$ 与 $q(s)$，$\deg(p(s))=n>\deg(q(s))$，则 Diophantine 方程

$$T(s)q(-s)=\Delta(-s)m(s)+n(s)p(s), \tag{2.2}$$

$$\rho\cdot T(s)p(-s)=\Delta(-s)\Gamma(s)-n(s)q(s) \tag{2.3}$$

有满足 $\deg(m(s))<\deg(p(s))$，$\deg(n(s))<\deg(\Delta(s))$ 的解 $m(s)$，$\Gamma(s)$，$n(s)$ 的充要条件是 $m(s)$，$\Gamma(s)$ 是方程

$$T(s)\,\Delta(s)=\Gamma(s)p(s)+m(s)q(s) \tag{2.4}$$

的解，其中，$\Delta(s)$ 由引理 1 给出，$T(s)$ 由式 (1.1) 给出．

证明．必要性是显然的．下面证明充分性．设 $m(s)$，$\Gamma(s)$ 是式 (2.4) 的解，于是得

$$\Delta(s)=\frac{1}{T(s)}[\Gamma(s)p(s)+m(s)q(s)].$$

将其代入 (2.1) 式得

$$[\Delta(-s)m(s)-T(s)q(-s)]q(s)=-[\Delta(-s)\Gamma(s)-\rho T(s)p(-s)]p(s). \tag{2.5}$$

由于 $p(s)$ 与 $q(s)$ 互质，则必有 $n(s)$ 使式 (2.2) 和 (2.3) 成立．

已知方程 (2.2) (或 (2.4)) 满足 $\deg(m(s))<\deg(p(s))$ 的解 $m(s)$ 与 $\Gamma(s)$ 是唯一的．又因为 $\deg(p(s))>\deg(q(s))$，所以若取 $\deg(T(s))=\deg(p(s))-1$ 时，必有 $\deg(\Gamma(s))=n-1$，从而 $\Gamma^{-1}(s)m(s)$ 是真有理分式．再由式 (2.2) 知，$\deg(n(s))<\deg(\Delta(s))$，于是 $\Delta^{-1}(-s)n(s)$ 是严格真有理分式．所以在引理条件下，方程 (2.2) 和 (2.3) 有所要求的解．

**引理 3.** Diophantine 方程 (2.4) 有解的充分必要条件是 $p(s)$ 与 $q(s)$ 拟互质．

## 三、最优控制函数的频域综合

本文的主要结果可叙述成如下定理：

**定理．** 已知系统 (1.1) 和性能指标 (1.3)．则 $u^*(s)\in\Omega$ 为最优综合函数的充分必要条件是

$$u^*(s)=-\Gamma^{-1}(s)m(s)z^*(s). \tag{3.1}$$

其中，$\Gamma(s)$，$m(s)$ 是方程 (2.4) 的解，且 $\deg(m(s))<\deg(p(s))$．

证明．从 (1.1) 式得出

$$z^*(s) = p^{-1}(s)q(s)u^*(s) + p^{-1}(s)T(s)e_0, \tag{3.2}$$

将式 (3.2) 代入 (1.3) 中,并注意到式 (2.1) 得

$$\begin{aligned} J[u^*] = &\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} p^{-1}(-s)[\Delta(-s)u^*(-s) + h(-s)T(-s)e_0] \\ &\cdot [\Delta(s)u^*(s) + h(s)T(s)e_0]p^{-1}(s)ds \\ &+ \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} p^{-1}(-s)T(-s)[1 - h(-s)h(s)]T(s)p^{-1}(s)e_0^2 ds, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中, $h(s) = \Delta^{-1}(-s)q(-s)$. 显然, $h(s)$ 是严格真有理分式. 从式 (2.2) 和 $h(s) = \Delta^{-1}(-s)q(-s)$ 得

$$p^{-1}(s)h(s) = \frac{m(s)}{T(s)p(s)} + \frac{n(s)}{T(s)\Delta(-s)}. \tag{3.4}$$

将式 (3.4) 代入 (3.3) 得

$$\begin{aligned} J[u^*] = &\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[\frac{\Delta(-s)}{p(-s)}u^*(-s) + \frac{n(-s)}{\Delta(s)}e_0 + \frac{m(-s)}{p(-s)}e_0\right] \\ &\cdot \left[\frac{\Delta(s)}{p(s)}u^*(s) + \frac{n(s)}{\Delta(-s)}e_0 + \frac{m(s)}{p(s)}e_0\right]ds \\ &+ \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{T(-s)[1 - h(-s)h(s)]T(s)}{p(-s)p(s)}e_0^2 ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

令

$$H(s) = \left[\frac{\Delta(-s)}{p(-s)}u^*(-s) + \frac{m(-s)}{p(-s)}e_0\right]\frac{n(s)}{\Delta(-s)}e_0,$$

则易知

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} H(s)ds = 0.$$

这是因为 $H(s)$ 是一个在左半闭平面内解析的严格真有理分式. 于是 (3.5) 式可改写做

$$\begin{aligned} J[u^*] = &\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[\frac{\Delta(-s)}{p(-s)}u^*(-s) + \frac{m(-s)}{p(-s)}e_0\right]\left[\frac{\Delta(s)}{p(s)}u^*(s) + \frac{m(s)}{p(s)}e_0\right]ds \\ &+ \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\frac{T(-s)[1 - h(-s)h(s)]T(s)}{p(-s)p(s)} + \frac{n(-s)n(s)}{\Delta(-s)\Delta(s)}\right\}e_0^2 ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

由于 (3.6) 式的第二项与 $u(s)$ 的选择无关,因此使 $J[u^*]$ 达到极小的充分必要条件是

$$\Delta(s)u^* + m(s)e_0 = 0,$$

即

$$u^*(s) = -\Delta^{-1}(s)m(s)e_0. \tag{3.7}$$

将 (3.7) 式代入 (3.2) 中,并且注意到 (2.4) 式得

$$z^*(s) = \Delta^{-1}(s)\Gamma(s)e_0. \tag{3.8}$$

由于 $\deg(m(s)) < \deg(p(s)) = \deg(\Delta(s))$, $\deg(\Gamma(s)) < \deg(\Delta(s))$, 所以由 (3.7) 式决定的 $u^*(s) \in \Omega$. 将式 (3.8) 代入 (3.7) 得

$$u^*(s) = -\Gamma^{-1}(s)m(s)z^*(s). \tag{3.9}$$

其中, $m(s)$, $\Gamma(s)$ 是方程 (2.2), (2.3) 或 (2.4) 的解. 于是定理得证.

不难计算,最优性能指标为:

$$J_{\min}=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\rho T(-s)T(s)+n(-s)n(s)}{\Delta(-s)\Delta(s)}e_0^2ds.$$

按照最优综合方法设计系统，可以得到较满意的瞬态响应. 同时所得到的闭环系统有较大的稳定裕度，这一点在时域里已经讨论得很清楚了，请参见文献[1].

## 四、举　例

下面以惯性导航系统的水平对准回路为例，说明求解最优综合函数的方法. 其方块图如图1所示，其中 $\alpha(s)$ 是水平倾角; $y(s)$ 是速度误差; $u(s)$ 是控制力矩; $g$ 是重力加速度; $R$ 是地球平均半径; $k_1>0$ 是阻尼常数. 系统方程为

$$(s^2+k_1s+\omega_s^2)y(s)=gu(s).$$

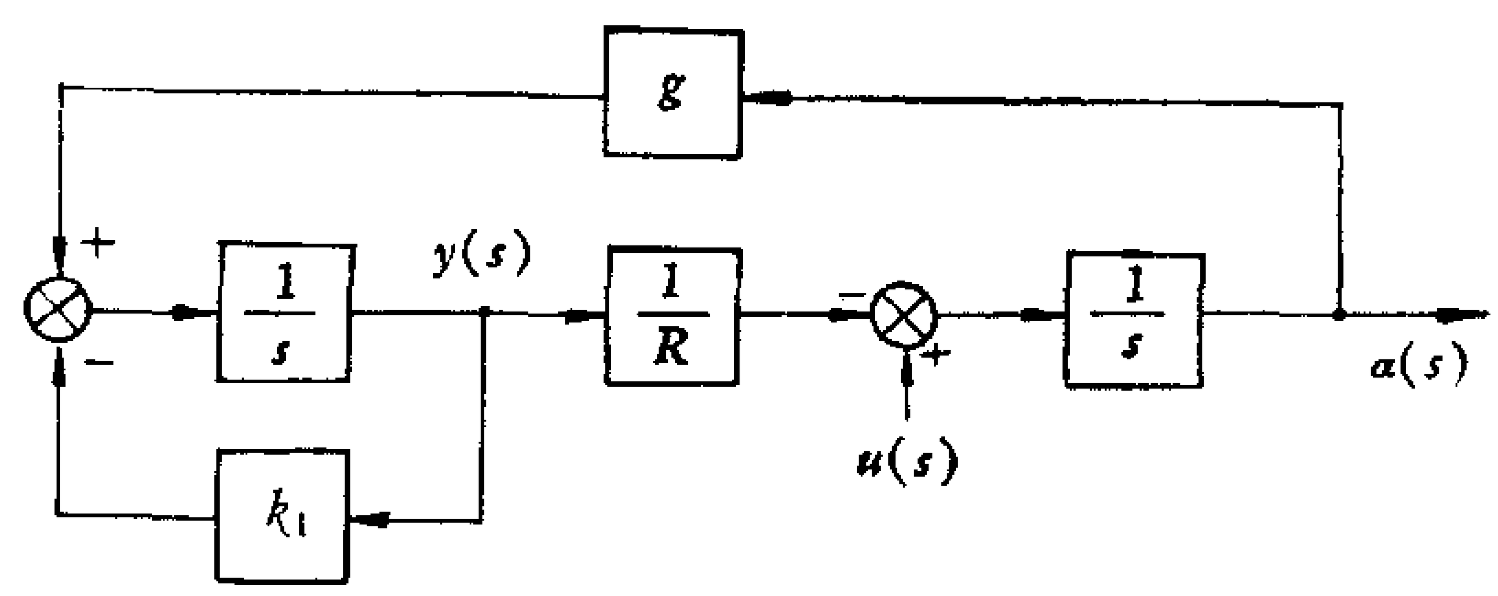


图 1　惯性导航系统水平初始对准回路方块图

这里 $\omega_s^2=g/R$. 如果希望实现观测器补偿，不妨在上述方程中附加一个脉冲输入项 $(s+k_2)e_0$，于是有

$$(s^2+k_1s+\omega_s^2)y(s)=gu(s)+(s+k_2)e_0.$$

取性能指标为

$$J[u]=\int_0^\infty[y^2(t)+\rho^2u^2(t)]dt,\ \rho>0.$$

于是，求解最优综合函数的步骤如下：

1) 作谱分解

$$\Delta(-s)\Delta(s)=g^2+\rho^2(s^2-k_1s+\omega_s^2)(s^2+k_1s+\omega_s^2),$$

易知 $\Delta(s)=\rho(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)$，$\zeta=\frac{1}{2\omega}\sqrt{k_1^2+2(\omega^2-\omega_s^2)}$，$\omega^2=\omega_s^2\sqrt{1+\frac{R^2}{\rho^2}}$.

2) 解方程

$$\rho(s+k_2)(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)=(s^2+k_1s+\omega_s^2)\Gamma(s)+gm(s).$$

要求 $\deg(m(s))<\deg(s^2+k_1s+\omega_s^2)$，所以可取

$$m(s)=\rho k(s+\alpha),\quad \Gamma(s)=\rho(s+\beta).$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{gk}[k_2\omega^2-\beta\omega_s^2],\quad k=\frac{1}{g}[\omega^2+2\zeta\omega k_2-\omega_s^2-k_1\beta],\quad \beta=k_2+2\zeta\omega-k_1.$$

这时，最优综合函数为

$$u(s)=-k\frac{s+\alpha}{s+\beta}y(s).$$

## 参　考　文　献

[1] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., Linear Optimal Control, 1971, (中译本，科学出版社).
[2] 王朝珠、王恩平，多变量线性反馈系统的非退化条件与物理能实现性，中国科学，1982，第九期，847—856.
[3] Kučera, V., Discrete Linear Control.
[4] Åström, K. J., Algebraic System as a tool for regulator design, Depart of Automatic Control Lund Institute of Technology, May 1979.
[5] Youla, D. C., On the Factorization of Rational Matrices, *IRE. Trans. Information Theorey*, IT-7 (1961), 172—189.

# A SYNTHESIS METHOD OF LINEAR OPTIMAL CONTROL SYSTEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN (SINGLE-INPUT SINGLE-OUTPUT SYSTEMS)

WANG ENPING　WANG CHAOZHU
*(Institute of Systems Science and Mathematical Sciences, Academia Sinica)*

ABSTRACT

The synthesis problem of linear optimal control systems with quadratic performance index is considered in this paper. For single input-single output systems, the solution in frequency domain is obtained by reducing optimal control problem to solving two Diophantine equations. In addition, the technique of spectral factorization is used in the paper.

# 中国自动化学会召开新春座谈会

中国自动化学会于 1983 年 3 月 4 日在北京召开了新春座谈会. 座谈会由理事长宋健同志主持. 宋健同志、副理事长杨嘉墀、副理事长兼秘书长陈汉明同志在会上做了重要讲话. 副理事长疏松桂同志及中国科协负责同志出席了座谈会. 参加座谈会的还有学会在京（北京）理事，各专业委员会、工作委员会正、副主任委员、秘书. 此外新闻出版等单位的有关同志也参加了座谈会. 会议就以下问题进行了座谈和讨论:

1. 结合赵紫阳同志在全国科学技术奖励大会上“经济振兴的一个战略问题”的讲话，座谈自动化科学技术如何为国民经济服务，如何为国民经济翻两番作出贡献;

2. 在科技工作者中如何开展向知识分子的优秀代表蒋筑英、罗健夫学习的活动;

3. “学会”如何贯彻中央关于改革的精神.

与会者广开思路、热烈发言，纷纷献计献策. 座谈会在热烈的气氛中结束.

（孙　道）