第9卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 9, No. 3
1983 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1983

多变量控制系统的行化梯典范形与最小阶 Kx–观测器的线性设计方法

王 大 海
（北 京 航 空 学 院）

摘　　要

本文提出了定基形矩阵的概念及多变量系统的行简化梯形典范形理论. 该典范形与系统的可观测性矩阵或可控性矩阵之间可用子块集建立计算关系式. 应用该理论可以把最小阶 Kx-观测器设计中的一组非线性代数方程组化为一类可解的线性代数方程组(附录中介绍了这一分析过程). 由此得到一种新的最小阶 Kx-观测器线性设计法. 该算法较 Roman-Bullock 设计法计算简单,计算误差小，且更便于用计算机设计. 文中还用例题指出 Sirisena 设计法的缺点.

一、行化梯典范形理论

自 1967 年 Luenberger 类典范形[1]提出以来,典范形理论有了很大发展. 线性多变量控制系统的许多问题能否解决以及解决的方法简便与否，依赖于能否找到一个合适的典范形. 为设计分析最小阶 Kx-观测器，本文介绍了行化梯典范形，及由之得到的最小阶 Kx-观测器线性设计法. 该典范形理论还可用于求解有限马尔科夫参数链的最小阶稳定实现问题[2]等.

1. 定基形的概念与性质

定义 1.1. 矩阵中不能由其左边诸列线性表示的列称为左基列，否则称为左相关列. 一个秩为 ρ 的 $n\times f$ 矩阵 H，若其所有左基列按原顺序排列可构成矩阵 $\begin{bmatrix} I_\rho \\ 0 \end{bmatrix}$，则称 H 为行化梯形,又称行简化梯形阵[3]或 Hermite 标准形[4]. 左相关列皆为零列的行化梯形 $\bar{\bar{H}}$ 称为定基形.

任一秩为 ρ 的 $n\times f$ 矩阵 J，总存在某非奇异矩阵 T，使得 $H=TJ$ 是行化梯形. H 与 J 有相同的左基列位置和列线性相关关系. 行化梯形的左相关列诸元为该列与其左边诸左基列的线性相关系数. 确定一个矩阵的左基列位置及左相关列与其左边诸左基列的线性相关系数的方法很多,因而把一个矩阵化为行化梯形是很容易的. 为减小计算误差，建议采用 Householde 正交变换和回代消元法. 可以证明，矩阵 J, H 和 $\bar{\bar{H}}$ 之间存在如下关系式:

本文于 1981 年 4 月 4 日收到.

$$H\bar{\bar{H}}^\tau = \begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad \bar{\bar{H}}^\tau H \bar{\bar{H}}^\tau = \bar{\bar{H}}^\tau, \quad H\bar{\bar{H}}^\tau H = H. \tag{1.1}$$

$J\bar{\bar{H}}^\tau$ 前 ρ 列由 J 的全部左基列顺次排成,故 $\bar{\bar{H}}$ 有定基形之名,且有

$$J\bar{\bar{H}}^\tau H = J. \tag{1.2}$$

引理 1.2[1)]. 若矩阵 L 和满行秩的某行化梯形 S 与矩阵 $[J_1 \vdots J_2]$ 满足

$$L = J_2\bar{\bar{S}}^\tau, \quad J_2 - LS \in \mathrm{Span}[J_1], \tag{1.3}$$

则对 $[J_1 \vdots J_2]$ 的定基形 $[\bar{\bar{H}}_1 \vdots \bar{\bar{H}}_2]$, 有

$$\bar{\bar{H}}_2^\tau \in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}^\tau], \quad \mathrm{Span}[J_1 \vdots L] = \mathrm{Span}[J_1 \vdots J_2]. \tag{1.4}$$

即矩阵 L 诸列皆是 J_2 的列,顺序亦相同,且包括在 J_2 中的 $[J_1 \vdots J_2]$ 全部左基列.

2. 基本概念、符号和定义

对于线性定常控制系统的可观测阵偶 $(F, E)_p$, $F \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$, $E \in \boldsymbol{R}^{r\times p}$, 记

$$N_1 \triangleq [E^\tau] = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r], \quad N_i \triangleq [N_{i-1} \vdots F^{\tau^{i-1}} E^\tau], \quad i = 2, 3, \cdots \tag{1.5}$$

$$\mu_1 \triangleq \mathrm{rank}[N_1], \quad \mu_i \triangleq \mathrm{rank}[N_i] - \mathrm{rank}[N_{i-1}], \quad i = 2, 3, \cdots \tag{1.6}$$

$$u \triangleq \min\{i \mid \mu_{i+1} = 0\}, \tag{1.7}$$

则矩阵 N_p^τ 就是 $(F, E)_p$ 的可观测矩阵, u 是可观测指标, $\{\mu_i\}$ 是可观测结构指数. 而形为 $F^{\tau^{i-1}}\boldsymbol{e}_j$, $i \in \underline{p-1}$, $j \in \underline{r}$ 的列皆是 N_p 的列,且若 $F^{\tau^{i-1}}\boldsymbol{e}_j$ 是 N_p 的左相关列, 则 $F^{\tau^i}\boldsymbol{e}_j$ 亦是. 故记

$$v_j \triangleq \min\{i \mid F^{\tau^i}\boldsymbol{e}_j \text{ 是 } N_p \text{ 的左相关列}\}, \quad j \in \underline{r}, \tag{1.8}$$

集 $\{v_j\}$ 称为 $(F, E)_p$ 的 Kronecker 指标[5],列集 $\{F^{\tau^{v_j}}\boldsymbol{e}_j \mid j \in \underline{r}\}$ 称为 N_p 的初相关列集. 其中各列称为 N_p 的初相关列. 可以证明:

$$r \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_u > 0, \quad \mu_{u+j} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, \tag{1.9}$$

$$\sum_{i=1}^{u} \mu_i = \sum_{j=1}^{r} v_j = \mathrm{rank}[N_p] = p. \tag{1.10}$$

定义 2.1. 如果可观测阵偶 $(F, E)_p$ 的矩阵 $[E^\tau \vdots F^\tau]$ 是行化梯形, 则称 $(F, E)_p$ 为可观测行化梯典范形. 根据对偶原理, 同样可以定义可控行化梯典范形并证明其各种性质,本文略.

3. 结构定理

定理 3.1 下列三个命题是互相等价的: (1) $(F, E)_p$ 是可观测行化梯典范形; (2) 矩阵 $[E^\tau \vdots F^\tau]$ 是行化梯形,且可由左上角始,作如下分块:

$$[E^\tau \vdots F^\tau] = \left[\begin{array}{c|cccc} \underbrace{F^\tau_{0,1}}_{r} & \underbrace{F^\tau_{1,1}}_{\mu_1} & \cdots & \underbrace{F^\tau_{u-1,1}}_{\mu_{u-1}} & \underbrace{F^\tau_{u,1}}_{\mu_u} \\ & F^\tau_{1,2} & \cdots & F^\tau_{u-1,2} & F^\tau_{u,2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & F^\tau_{u-1,u} & F^\tau_{u,u} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\mu_1 \\ \}\mu_2 \\ \vdots \\ \}\mu_u \end{array}, \tag{1.11}$$

使得 $F^\tau_{i-1,i}$, $i \in \underline{u}$ 皆为满行秩的行化梯形; (3) 阵偶 $(F, E)_p$ 的矩阵 N_p 是满行秩的行化梯形.

1) 本章所有命题皆已用线性代数知识由前至后逐一证出,篇幅所限,从略.

4. 与其可观测矩阵 N_p^τ 的关系

定理 4.1. 若 $(F, E)_p$ 是可观测行化梯典范形，则可把矩阵 N_p 分块为

$$N_p = \begin{bmatrix} S_{1,1}S_{1,2}\cdots S_{1,u}\cdots S_{1,p} \\ S_{2,2}\cdots S_{2,u}\cdots S_{2,p} \\ \ddots \vdots \quad \vdots \\ S_{u,u}\cdots S_{u,p} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\mu_1 \\ \}\mu_2 \\ \vdots \\ \}\mu_u \end{matrix}, \tag{1.12}$$

使得 $S_{i,i}\in R^{\mu_i\times r}$, $i\in \underline{u}$ 皆是满行秩的行化梯形，并且(1.12)与(1.11)子块集间存在如下关系式：

$$I_p = N_p\bar{\bar{N}}_p^\tau = [E^\tau\bar{\bar{S}}_{1,1}^\tau,\ F^\tau E^\tau\bar{\bar{S}}_{2,2}^\tau,\ \cdots,\ F^{\tau^{u-1}}E^\tau\bar{\bar{S}}_{u,u}^\tau], \tag{1.13}$$

$$F_{0,1}^\tau = S_{1,1},\ F_{i,j}^\tau = S_{j,i+1}\bar{\bar{S}}_{i,i}^\tau,\ i, j\in \underline{u}, \tag{1.14}$$

$$\bar{\bar{S}}_{i+1,i+1}^\tau \in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}_{i,i}^\tau],\ i\in \underline{u-1},\ S_{ij}\bar{\bar{S}}_{tt}^\tau = 0,\ i, t\in \underline{u},\ j\in \underline{t},\ j\neq i. \tag{1.15}$$

$S_{ii}\bar{\bar{S}}_{tt}^\tau \in \boldsymbol{R}^{\mu_i\times\mu_t}$, $i\in\underline{u}$, $t\in\underline{i}$ 是满行秩的行化梯形.　(1.16)

这些关系式的存在，加强了行化梯典范形与其可观测性矩阵（可控性矩阵）之间的联系，从而有助于许多控制问题的分析研究，例如最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器的设计(详见二).

推论 4.2. 可观测行化梯典范形 $(F, E)_p$ 的矩阵 $[E^\tau \vdots F^\tau]$ 为 N_p 的全部左基列和初相关列按原顺序的排列.

5. 存在性与变换矩阵

定理 5.1. 任一可观测阵偶 $(F, E)_p$，皆存在唯一的可观测行化梯典范形$(\tilde{F}, \tilde{E})_p$ 与之代数等价. 状态变换矩阵 P 可表示为

$$P = [\bar{\bar{H}}N_p^\tau]^{-1} = T^\tau. \tag{1.17}$$

这里，N_p^τ 是 $(F, E)_p$ 的可观测矩阵，$H = TN_p$ 是行化梯形.

定理 5.2. 可观测行化梯典范形仅以某种排列矩阵 W 为状态变换阵，即可代数等价地化为 Luenberger 类第一典范形[1].

定理 5.3. $(F, E)_p$ 的 Kronecker 指标 $\{v_j\}$ 与定基形集 $\{\bar{\bar{S}}_{i,i}\}$ 是等价的，可互相导出. $\{\bar{\bar{S}}_{i,i}\}$ 由$(F, E)_p$ 的可观测行化梯典范形$(\tilde{F}, \tilde{E})_p$ 的矩阵 $\tilde{N}_p$ 按照(1.12) 式分块后得到.

6. 变换计算方法.

化为可观测行化梯典范形的计算，可以借助于矩阵 N_p，亦可借助于 Luenberger 第一典范形. 但更简便，更精确的是直接法. 只要注意到

$$\begin{aligned}[\tilde{E}^\tau \vdots \tilde{F}^\tau] &= [P^\tau E^\tau \vdots P^\tau F^\tau P^{-1^\tau}] = P^\tau[E^\tau \vdots F^\tau]\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P^{\tau^{-1}}\end{bmatrix} \\ &= Q^\tau T_p\cdots T_1[E^\tau \vdots F^\tau]\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & T_1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & T_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q^{\tau^{-1}}\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{1.18}$$

就不难得到这一直接法. 这里 T_i 是实 Householder 变换矩阵，是从矩阵 $\widetilde{[E^\tau \vdots F^\tau]}_i$的第 i 个左基列选定的，$i\in \underline{p}$. 由此可把$[E^\tau \vdots F^\tau]$ 化为上三角梯形 $\widetilde{[E^\tau \vdots F^\tau]}_p$. 上三角正线矩阵 Q^τ 的任务则是从左至右依次把 $\widetilde{[E^\tau \vdots F^\tau]}_p$ 的第 i 个左基列化为 $[0\cdots 0,\ \underset{i}{1},\ 0\cdots 0]^\tau$ 的形式，$i\in \underline{p}$. 这些计算是可行的，因为$[\tilde{E}^\tau \vdots \tilde{F}^\tau]$的分块式(1.11)中的行化梯形块 $F_{i-1,i}^\tau$，$i\in\underline{u}$ 皆处于 $\tilde{F}^\tau$ 主对角线的下方.

例 6.1 对于

$$[E^\tau \vdots F^\tau]=\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & -3 & -4 & -8 & -8 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

依次取到的 Householder 矩阵为

$$T_1=0.5\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

使得 $[E^\tau \vdots F^\tau]$ 化为上三角梯形

$$\widetilde{[E^\tau \vdots F^\tau]}_2=\left[\begin{array}{rr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right],$$

再依次取上三角正线矩阵

$$Q_1^\tau=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad Q_2^\tau=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_3^\tau=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad Q_4^\tau=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

即得可观测行化梯典范形

$$[\tilde{E}^\tau \vdots \tilde{F}^\tau]=\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\end{array}}\right\}\mu_1 \\ \}\mu_2 \\ \}\mu_3 \end{array}.$$

由此可知 $\mu_1=2$, $\mu_2=1$, $\mu_3=1$, $u=3$.

二、最小阶 Kx-观测器线性设计法

现代控制理论与古典控制论的重要区别之一是在对控制系统作性能分析和控制综合时要利用系统内部的状态信号(最常需要的是状态的线性向量函数 Kx). 在这些信号不能都从外部直接测量时,就需要进行估值,这就需设计最小阶 Kx-观测器[6-9]. 研究线性

非时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n,\ \boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^m,\ \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^l, \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = F\boldsymbol{z} + G\boldsymbol{y} + N\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w} = E\boldsymbol{z} + M\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} \in \mathrm{R}^p,\ \boldsymbol{w} \in R^r. \tag{2.2}$$

其中 A, B, C, F, G, N, E, M 皆是常数矩阵．对于常数矩阵 $K \in \mathrm{R}^{r\times n}$，若系统 (2.1) 和 (2.2) 对任何 $\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0), \boldsymbol{u}(\cdot)$ 皆有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{w}(t) - K\boldsymbol{x}(t)) = 0. \tag{2.3}$$

则称 $\boldsymbol{w}(t)$ 是 $K\boldsymbol{x}(t)$ 的一种估值，系统 (2.2) 是 (2.1) 的一个 $K\boldsymbol{x}$-观测器 (Luenberger 型，$M \neq 0$ 或 Kalman 型，$M = 0$)．本文只介绍 Kalman 型．所有结果都能推广到 Luenberger 型．文献 [6—9] 把最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器的设计归纳为求解矩阵组 $(F, E, G, N, P)_p$．其中 $P \in \mathrm{R}^{p\times n}$，使满足

$$PA = FP + GC,\ K = EP, \tag{2.4}$$

$$N = PB,\ \mathrm{Re}\lambda_i(F) < 0,\ i \in \underline{p},\ p \text{ 值最小}. \tag{2.5}$$

且知，最小阶解的阵偶 $(F, E)_p$ 一定是可观测的．

1. 线性设计法

由式 (2.4) 和 (2.5) 可分两步设计最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器：1) 逐一寻找式 (2.4) 的一切四阵组解 $(F, E, G, P)_p$ (对于 $(F, E)_p$ 不可观测的解可以不找，而特征值集 $\{\lambda_i(F)\}$ 相同的解可以只找一个)．2) 对 1) 的结果逐一检查 $\mathrm{Re}\lambda_i(F) < 0$，$i \in \underline{p}$ 是否成立．只要 1) 和 2) 按 p 值从小到大逐一交替进行，就可保证最先找到的满足式 (2.4) 和 (2.5) 的 $(F, E, G, N, P)_p$ 是最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器．显然，1) 中的一切二字很重要，如有漏解，就难确保是最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器．但式 (2.4) 是非线性代数方程，未知数众多，直接求解是很困难的．用可观测行化梯典范形可把式 (2.4) 化为一系列可解的线性代数方程组．详见附录 A．

实质上，附录 A 中的命题 $A1$ 是可观测 $K\boldsymbol{x}$-观测器的结构定理，指出了 $(F, E)_p$ 的 u，$\{\mu_i\}$，$\{\bar{\bar{S}}_{ii}\}$ 的可能取值．由 $\{\bar{\bar{S}}_{ii}\}$ 可知 Kronecker 指标 $\{\nu_j\}$．

利用附录 A 的分析结果和定基形的特性，再作一些分析简化，就可得到设计最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器的一种新方法．该方法从寻找 Ψ_0 集到解代数方程组皆为线性运算，故名为线性设计法．详见附录 B．具体推导过程略．

例．(为简洁只到附录 B 第 $B5$)步，故仅需 A, C, K)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -6 & -10 & -1 & 7 \\ -9 & 23 & 27 & 8 & 6 & 0 \\ 3 & 14 & 25 & 6 & 71 & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

查有 $n = 6, l = 2, r = 2$．$(A, C)_n$ 可观测指标为 3，故有

$$\tilde{J}_3=\left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc:cc:cc}1&0&0&0&0&0&0&2&-9&10&3&10\\0&1&0&0&0&0&0&-5&23&-25&14&125\\ \hdashline 0&0&1&0&0&4&0&-6&27&-30&25&188\\0&0&0&1&0&5&0&-10&8&-50&6&109\\0&0&0&0&1&0&0&-1&6&-5&71&503\\0&0&0&0&0&0&1&-7&0&39&8&-20\end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}p_1\\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}p_2\\ \}p_3\\ \}p_4\end{array}.$$

$\tilde{J}_3$已是行化梯形．查知 $q=2$，$p_1=2$，$p_3=1$，故集 Ψ_0 为

$$\{\bar{L}_i\}_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}_{p=3},\qquad \{\bar{L}_i\}_2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}_{p=4},$$

$$\{\bar{L}_i\}_3=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{p=4},\qquad\cdots$$

对 $\{\bar{L}_i\}_1$ 解方程（$\mu_1=2$，$\mu_2=1$）

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0&0&-5\\0&0&0&1&0&0&-6\\0&0&0&0&1&0&-10\\0&0&1&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F^{\tau}_{1,1}&F^{\tau}_{2,1}\\ F^{\tau}_{1,2}&F^{\tau}_{2,2}\\ X_{1,1}&X_{2,1}\\ &X_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-9\\0&0&32\\0&4&27\\0&5&8\\1&0&6\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

可直接写出通解表达式

$$F=\begin{bmatrix}F_{1,1}&F_{1,2}\\ F_{2,1}&F_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-9&23&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}m_2[-2\ \ 5\ \ 1]$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-9-2m_2&23+5m_2&6+m_2\end{bmatrix},$$

$$X^{\tau}=\begin{bmatrix}X^{\tau}_{1,1}&\\ X^{\tau}_{2,1}&X^{\tau}_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\4&5&0&0\\27&8&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}m_2[6\ \ 10-7\ \ 1].$$

无论怎样选择 m_2，矩阵 F 总有全零行，不可能满足 $\mathrm{Re}\lambda_i(F)<0$, $i\in\underline{3}$.

对 $\{\bar{L}_i\}_2$ 作类似求解，有

$$F=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & m_1\\ 0 & 0 & 0 & m_2\\ -9-2m_5 & 23+5m_5 & 6+m_5 & m_3\\ -2m_6 & 5m_6 & m_6 & m_4\end{bmatrix}.$$

通过选择 $\{m_i\}$，可使 F 有任意共轭极点集 $\{\lambda_i\}$，故可使 $\mathrm{Re}\lambda_i(F)<0$, $i\in\underline{4}$ 成立．可设计最小阶数为 4 的 $K\boldsymbol{x}$-观测器．$4<6$ 即 $p<n$.

本例若使用 Sirisena 设计法，只能考查 $\{\bar{L}_i\}_1$, $\{\bar{L}_i\}_3$, $\{\bar{L}_i\}_5\cdots$ 以至永远求不到解．

2. 线性设计法的优特点

1）所得观测器的系数矩阵皆可写成自由参数 $\{M_i\}$ 的函数矩阵形式，为参数优化创造了条件．

2）新方法较 Roman-Bullock 方法减少了计算层次（4 层化为一层），并减少了对 $\{\lambda_i(F)\}$ 的考查次数(后者是按（$A22$）式的 $\Sigma_{\{L_i\}}$ 而不是按（$B2$）式的 $\tilde{\Sigma}_{\{\bar{L}_i\}}$ 进行的)，从而显著减少了计算量和误差．

3）用新方法解方程组时无乘除运算，其运算已汇入附录 $B1$）中，从而更便于使用计算机．

本工作进行中，得到高为炳教授，王振钧、黄琳、程勉副教授和韩京清副研究员的热情指导，特表示深切的感谢．

附　录　A

非线性代数方程组 (2.4) 的 $(F,E)_p$ 可观测的一切解在代数等价类的意义上皆可通过一族线性代数方程组逐一求得．

A1．基本符号． 对于 A, C, K，记

$$\left.\begin{array}{l} J_1\triangleq[K^\tau]_{n\times r},\ J_i\triangleq[\tilde{J}_{i-1}\vdots A^{\tau^{i-1}}K^\tau],\ i=2,3,\cdots\\ \tilde{J}_i\triangleq[J_i\vdots A^{\tau^{i-1}}C^\tau]_{n\times i(r+l)},\ i=1,2,3,\cdots\end{array}\right\}\tag{A1}$$

$$p_1\triangleq\mathrm{rank}[J_1],\ p_{2i-1}\triangleq\mathrm{rank}[J_i]-\mathrm{rank}[\tilde{J}_{i-1}],\ i=2,3,\cdots\tag{A2}$$

$$q\triangleq\min\{i\,|\,p_{2i+1}=0\}.\tag{A3}$$

显然矩阵 $\tilde{J}_n^\tau$ 就是可观测阵偶 $\left(A,\begin{bmatrix}K\\C\end{bmatrix}\right)_n$ 的可观测矩阵，故有非奇异矩阵 T 存在，使得：

$$H=T\tilde{J}_n=\begin{bmatrix}H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} & H_{1,4}\cdots H_{1,2n-1} & H_{1,2n}\\ & H_{2,2} & H_{2,3} & H_{2,4}\cdots H_{2,2n-1} & H_{2,2n}\\ & & H_{3,3} & H_{3,4}\cdots H_{3,2n-1} & H_{3,2n}\\ & & & H_{4,4}\cdots H_{4,2n-1} & H_{4,2n}\\ & & & \ddots\ \vdots & \vdots\end{bmatrix}\begin{array}{l}\}p_1\\ \}p_2\\ \}p_3\\ \}p_4\\ \\ \end{array}.\tag{A4}$$

其中 H 和 $H_{i,i}$, $i=1,2,\cdots$ 都是满行秩的行化梯形．且有

$$\bar{\bar{H}}{}^\tau_{i+2,i+2}\in\mathrm{Span}[\bar{\bar{H}}{}^\tau_{i,i}],\ i=1,2,\cdots,\tag{A5}$$

而 $W_i \triangleq A^{\tau^{i-1}}K^\tau \bar{\bar{H}}^\tau_{2i-1,2i-1}$ 是 $\tilde{J}_n$ 在 $A^{\tau^{i-1}}K^\tau, i \in \underline{p}$ 中的全部左基列依原序排成的矩阵。(A6)

假定 $(F, E)_p$ 是可观测行化梯典范形,则可取(1.5)—(1.16)式的符号和关系式. 再对方程 (2.4) 式引入下列符号:

$$L_i \triangleq A^{\tau^{i-1}}K^\tau \bar{\bar{S}}^\tau_{i,i},\ L_i \in \boldsymbol{R}^{n\times\mu_i},\ i \in \underline{u}, \tag{A7}$$

$$R_{i,j+1} \triangleq G^\tau F^{\tau^{i-j-1}} E^\tau \bar{\bar{S}}^\tau_{i,i},\ R_{i,j+1} \in \boldsymbol{R}^{l\times\mu_i},\ i \in \underline{u},\ j \in \underline{i}, \tag{A8}$$

$$P^\tau \triangleq [\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_u]_{n\times p},\ \tilde{L}_i \in \boldsymbol{R}^{n\times\mu_i},\ i \in \underline{u}, \tag{A9}$$

$$G^\tau \triangleq [R_{1,1}, R_{2,1}, \cdots, R_{u,1}]_{l\times p},\ R_{i,1} \in \boldsymbol{R}^{l\times\mu_i},\ i \in \underline{u}. \tag{A10}$$

注意到 (1.13) 式,有

$$R_{i,1} = G^\tau F^{\tau^{i-1}} E^\tau \bar{\bar{S}}^\tau_{i,i},\ i \in \underline{u}. \tag{A11}$$

A2. 方程的演变. 转置 (2.4) 式各项有

$$A^\tau P^\tau = P^\tau F^\tau + C^\tau G^\tau,\ P^\tau E^\tau = K^\tau. \tag{A12}$$

前式各项右乘 E^τ, 利用后式则有

$$P^\tau F^\tau E^\tau + C^\tau G^\tau E^\tau = A^\tau P^\tau E^\tau = A^\tau K^\tau. \tag{A13}$$

(A13) 式各项逐次左乘 A^τ, 利用 (A12) 式有

$$P^\tau F^{\tau^i} E^\tau + \sum_{j=1}^{i} A^{\tau^{j-1}} C^\tau G^\tau F^{\tau^{i-j}} E^\tau = A^\tau K^\tau,\ i = 1, 2, 3, \cdots. \tag{A14}$$

命题 A1. 若可观测阵偶 $(F, E)_p$ 是方程组 (2.4) 的解,则有

$$u \geqslant q,\ \mu_i \geqslant p_{2i-1},\ \bar{\bar{H}}^\tau_{2i-1,2i-1} \in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}^\tau_{i,i}],\ i \in \underline{q}, \tag{A15}$$

$$\tilde{L}_i = L_i - \sum_{j=1}^{i-1} A^{\tau^{j-1}} C^\tau R_{i,j+1},\ i \in \underline{u}. \tag{A16}$$

证: $(F, E)_p$ 满足 (2.4) 式就一定满足 (A14) 式. 假定 $(F, E)_p$ 已是可观测行化梯典范形, 利用 (A1)—(A11) 式的符号和引理 1.2, 将 (A14) 对 i 用数学归纳法可以证明: 对 $i \leqslant u$ 的一切整数, (A16) 式都成立,且有

$$\bar{\bar{H}}^\tau_{2i-1,2i-1} \in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}^\tau_{i,i}],\ \mu_i \geqslant p_i,\ i \in \underline{u}, \tag{A17}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Span}[\tilde{L}_1, \cdots, \tilde{L}_{i-1}, \tilde{L}_i, C^\tau, A^\tau C^\tau, \cdots, A^{\tau^{i-2}} C^\tau] \\ &= \mathrm{Span}[\tilde{L}_1, \cdots, \tilde{L}_{i-1}, L_i, C^\tau, A^\tau C^\tau, \cdots, A^{\tau^{i-2}} C^\tau] \\ &= \mathrm{Span}[\tilde{J}_{i-1} \vdots L_i] = \mathrm{Span}[J_i],\ i \in \underline{u}. \end{aligned} \tag{A18}$$

(A14) 式的第 $u+1$ 个方程组为 $P^\tau F^{\tau^u} E^\tau + \sum_{j=1}^{u} A^{\tau^{j-1}} C^\tau G^\tau F^{\tau^{u-j}} E^\tau = A^{\tau^u} K^\tau$, 因此有:

$$\begin{aligned} A^{\tau^u} K^\tau &\in \mathrm{Span}[P^\tau \vdots C^\tau, \cdots, A^{\tau^{u-1}} C^\tau] = \mathrm{Span}[\tilde{L}_1, \cdots, \tilde{L}_u \vdots C^\tau, \cdots, A^{\tau^{u-1}} C^\tau] \\ &\overset{(A18)}{=} \mathrm{Span}[J_u \vdots A^{\tau^{u-1}} C^\tau] = \mathrm{Span}[\tilde{J}_u], \end{aligned}$$

$$\mathrm{Span}[\tilde{J}_u] = \mathrm{Span}[\tilde{J}_u \vdots A^{\tau^u} K^\tau] = \mathrm{Span}[J_{u+1}],$$

$$p_{2u+1} = \mathrm{rank}[J_{u+1}] - \mathrm{rank}[\tilde{J}_u] = 0.$$

由 (A3) 式可知,定有 $u \geqslant q$.

若选 $\{L_i\}$ 同时满足 (1.15), (A7) 和 (A15) 式,则可使 $\{L_i\}$ 成为已知量.

条件 A2. $\{\bar{\bar{S}}_{1,1}, \cdots, \bar{\bar{S}}_{u,u}\}$, $u \geqslant q$ 是一组满行秩的定基形, $\bar{\bar{S}}_{i,i} \in \boldsymbol{R}^{\mu_i \times r}$, $i \in \underline{u}$. 且有

$$\bar{\bar{S}}^{\tau}_{i+1,i+1}\in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}^{\tau}_{i,i}],\ i\in \underline{u-1},\quad p\triangleq\sum_{i=1}^{u}\mu_i, \tag{A19}$$

$$\mu_i\geqslant p_{2i-1},\ \bar{\bar{H}}^{\tau}_{2i-1,2i-1}\in \mathrm{Span}[\bar{\bar{S}}^{\tau}_{i,i}],\ i\in \underline{q}, \tag{A20}$$

$$L_i=A^{\tau^{i-1}}K^{\tau}\bar{\bar{S}}^{\tau}_{i,i},\ i\in \underline{u}. \tag{A21}$$

其中，(A19) 式表明 $\{\bar{\bar{S}}_{i,i}\}$ 可作为某个 p 阶可观测阵偶的定基形集，(A20) 式和 (A21) 式表明 L_i 含有 W_i 各列，$i\in\underline{q}$. 显然，这样的 $\{L_i\}$ 可由 A, C, K 逐一找到. 因为若记 $\bar{\bar{S}}_{ii}$ 的左基列位置指标集为 $\{t_{i,1},\cdots,t_{i,\mu_i}\}$，则可对 $\{L_i\}$ 定义整数指标集

$$\Sigma_{\{L_i\}}\triangleq\{p;(r-\mu_1),\cdots,(r-\mu_u);t_{1,1},\cdots,t_{1,\mu_1};\cdots;t_{u,1},\cdots,t_{u,\mu_u}\}, \tag{A22}$$

从而对于满足条件 $A2$ 的所有 $\{L_i\}$ 可按其指标集 $\Sigma_{\{L_i\}}$ 的字典顺序从小到大排成一个全序可列集 Ψ_1. 现 $\{L_i\}$ 已是已知量，且 (A16) 式成立，回到方程组 (A14)，对 $i=1,2,\cdots,u$ 分别右乘 $\bar{\bar{S}}^{\tau}_{i,i}$，利用 (A8)—(A11) 式的符号，有

$$\sum_{j=1}^{i+1}\tilde{L}_jF^{\tau}_{i,j}+\sum_{j=1}^{i}A^{\tau^{j-1}}C^{\tau}R_{i,j}=A^{\tau}L_i,\ i\in\underline{u}. \tag{A25}$$

取

$$E=[S^{\tau}_{1,1}\vdots 0]_{r\times p},\ S_{1,1}\in\boldsymbol{R}^{\mu_1\times r},\ \tilde{L}_1S_{1,1}=K^{\tau}, \tag{A26}$$

则 (A25) 和 (A26) 式可合写为

$$[\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\cdots,\tilde{L}_u,C^{\tau},\cdots,A^{\tau^{u-1}}C^{\tau}]\begin{bmatrix} S_{1,1} & F^{\tau}_{1,1}\cdots F^{\tau}_{u-1,1} & F^{\tau}_{u,1}\\ & F^{\tau}_{1,2}\cdots F^{\tau}_{u-1,2} & F^{\tau}_{u,2}\\ & \ddots\ \vdots & \vdots\\ & F^{\tau}_{u-1,u} & F^{\tau}_{u,u}\\ 0 & R_{1,1}\cdots R_{u-1,1} & R_{u,1}\\ & \ddots\ \vdots & \vdots\\ & R_{u-1,u-1} & R_{u,u-1}\\ & & R_{u,u}\end{bmatrix}$$

$$=[K^{\tau},A^{\tau}L_1,\cdots,A^{\tau}L_{u-1},A^{\tau}L_u]. \tag{A27}$$

利用 (A16), (A26) 和 (A9), (A10) 式查 (A27) 式

$$\text{左边}=[P^{\tau}\vdots C^{\tau}]\left[\begin{array}{c|c} E^{\tau} & F^{\tau}\\ \hline & G^{\tau}\end{array}\right]+[A^{\tau}C^{\tau},\cdots,A^{\tau^u}C^{\tau}][0\vdots R_0],$$

$$\text{右边}=[K^{\tau}\vdots A^{\tau}P^{\tau}]+[A^{\tau}C^{\tau},\cdots,A^{\tau^u}C^{\tau}][0\vdots R_0],$$

其中

$$R_0\triangleq\begin{bmatrix} 0 & R_{2,2}\cdots R_{u-1,2} & R_{u,2}\\ & \ddots\ \ddots & \vdots\\ & \ddots\ R_{u-1,u-1} & R_{u,u-1}\\ & 0 & R_{u,u}\\ & & 0\end{bmatrix}_{ul\times p},$$

因此有 $[P^{\tau}C^{\tau}]\begin{bmatrix}E^{\tau} & F^{\tau}\\ & G^{\tau}\end{bmatrix}=[K^{\tau}A^{\tau}P^{\tau}]$，此即方程(2.4). 上述分析表明：

$\{(2.4)$ 式的可观测 $(F, E)_p$ 解$\} \xleftrightarrow{\text{(代数等价类)}} \{(2.4)$ 式可观测行化梯典范形解$\} \subseteq$
$\{(A27$ 式的解$|\forall\{L_i\}\in\Psi_1$, 且 (A16) 式成立$\} \subseteq \{(2.4)$ 式的解$\}$, (A28)
即在代数等价类的意义上,(A28)式中任一解集$\{\cdot\}$,都包含了(2.4)式的一切$(F, E)_p$可观测的解,且都是(2.4)式的解.

命题 A3. 若 (A16) 式成立,对于已知的 $\{L_1, \cdots, L_u\}$ (不一定满足条件 $A2$),若

$$A^\tau L_i \in \mathrm{Span}[L_1, \cdots, L_{i+1}, C^\tau, \cdots, A^{\tau^{i-1}}C^\tau], i \in \underline{u},\ L_{u+1} = 0, \tag{A29}$$

则方程 (A27) 可化为线性代数方程组,且可写出其通解表达式.

这个命题是不难证明的,附录 B 中给出了这类方程的类似结构和解法. 条件 $A2$ 保证了 (A29) 式成立,从而可通过线性代数方程组求解集:

$$\{(A27)\ 式的解 | \forall\{L_i\}\in\Psi_1,\ 且\ (A16)\ 式成立\},$$

从而也求出了 (2.4) 式的一切 $(F, E)_p$ 可观测的解.

附 录 B

Kalman 型最小阶 $K\boldsymbol{x}$-观测器线性设计法的算法.

B1) 按照 (A1)—(A6) 式构造矩阵 $\tilde{J}_n$ 并化为行化梯形 H. 由(A4)式分块可知$\{p_i\}$, q, $\{W_i\}$, $\{TW_i\}$, $\{TA^\tau W_i\}$, $\{TA^{\tau^{i-1}}C^\tau\}$, $H_{1,1}$ 诸值[1].

B2) 构造集 Ψ_0. Ψ_0 为满足如下条件的集$\{T\bar{L}_i\}$全体:

$$\left.\begin{aligned} &u \geqslant q,\ \mu_1 = p_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_u,\ p \triangleq \sum_{i=1}^{u} \mu_i \leqslant n, \\ &\bar{L}_i = [W_i \vdots 0]_{n\times\mu_i},\ \mu_i \geqslant p_i,\ i \in \underline{u}. \end{aligned}\right\} \tag{B1}$$

记

$$\tilde{\Sigma}_{\{\bar{L}_i\}} \triangleq \{p, (p_1 - \mu_2), (p_1 - \mu_3), \cdots, (p_1 - \mu_u)\}, \tag{B2}$$

则 $\tilde{\Sigma}_{\{\bar{L}_i\}}$ 是 $\{T\bar{L}_i\}$ 的整数指标集. 对 Ψ_0 的全部元皆按其 $\tilde{\Sigma}_{\{\bar{L}_i\}}$ 的字典顺序由小到大排序,把序号 k 作脚码. 如极小元为 $\{T\bar{L}_i\}_1$, $u = q$, $p = \sum_i^q p_{2i-1}$, $\mu_i = p_i \cdots$.

B3) 令 $k = 1$.

B4) 对 Ψ_0 的第 k 个元 $\{T\bar{L}_i\}_k$ 直接写出线性方程组 (B3)[2]:

$$T[\bar{L}_1, \bar{L}_2, \cdots, \bar{L}_u, C^\tau, \cdots, A^{\tau^{u-1}}C^\tau] \begin{bmatrix} F^\tau_{1,1}\cdots F^\tau_{u-1,1} & F^\tau_{u,1} \\ F^\tau_{1,2}\cdots F^\tau_{u-1,2} & F^\tau_{u,2} \\ \ddots\ \vdots & \vdots \\ F^\tau_{u-1,u} & F^\tau_{u,u} \\ X_{1,1}\cdots X_{u-1,1} & X_{u,1} \\ \ddots\ \vdots & \vdots \\ X_{u-1,u-1} & X_{u,u-1} \\ & X_{u,u} \end{bmatrix}$$
$$= TA^\tau[\bar{L}_1, \cdots, \bar{L}_{u-1}, \bar{L}_u] \tag{B3}$$

1) 对于既非 $\tilde{J}_n$ 左基列又非 $\tilde{J}_n$ 左初相关列的 $A_\tau^{i}K^\tau$, $i \in \underline{n-1}$ 中的列可不必计算. 若已知 $(A, C)_{n,l}$的可观测指标是 v, 则可只对矩阵 $\tilde{J}_{v+1}$ 进行计算即可.

2) 显然 (B3) 的系数阵包含了H的全部左基列,而H是行化梯形,故解可直接写出而勿需乘除运算.

的通解表达式：

$$\left.\begin{aligned}&[F_{i,1},\cdots,F_{i,i+1}]=Y_i+M_iZ_i,\quad i\in \underline{u},\\&[X^\tau_{i,1},\cdots,X^\tau_{i,i}]=Y^0_i+M_iZ^0_i,\quad i\in \underline{u},\\&F=\sum_{i=1}^{u}U_i[Y_i+M_iZ_i]V_i=\hat{F}+\sum_{i=1}^{u}U_iM_i\hat{V}_i.\end{aligned}\right\}\tag{B4}$$

这里，U_i 和 V_i，$i\in \underline{u}$ 是相应的位置安排矩阵；$\{M_i\}$ 是可供任意选择的自由参数矩阵集.

B5）选择合适的参数 $\{M_i\}$，使 $\mathrm{Re}\lambda_i(F)<0$，$i\in \underline{p}$. 若不成，则令 $k=k+1$，转到 B4).

B6）由 (B4) 式计算 $\{X_{i,j}\}$，递推计算

$$\left.\begin{aligned}&R_{u,u}=X_{u,u},\ R_{u,i}=X_{u,i}+\sum_{j=i+1}^{u}R_{j,i+1}F^\tau_{u,j}\\&R_{t,i}=X_{t,i}+\sum_{j=i+1}^{t+1}R_{j,i+1}F^\tau_{t,j},\ t=u-1,\cdots,i\end{aligned}\right\} i=u-1,\cdots,1.\tag{B5}$$

B7）计算或构造矩阵

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{L}_i=\bar{L}_i-\sum_{j=1}^{i-1}A^{\tau j-1}C^\tau R_{i,j+1},\ i\in \underline{u},\\&P^\tau=[\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\cdots,\tilde{L}_u]_{n\times p},\ E=[H^\tau_{1,1}\vdots 0]_{r\times p},\\&G^\tau=[R_{1,1}R_{2,1},\cdots,R_{u,1}]_{l\times p},\ N=PB.\end{aligned}\right\}\tag{B6}$$

则由 $(F,E,G,N)_p$ 组成的系统 (2.2) 就是系统 (2.1) 的 Kalman 型最小阶 Kx-观测器.

参　考　文　献

[1] Luenberger, D. G., Canonical Forms for Linear Multivariable Systems, *IEEE. Trans. Autom. Control*, **12**, (1967).

[2] Roman, J. R. and Bullock, T. E., Minimal Partial Realization in a Canonical Form, *IEEE. Trans. Auton. Control*. **20**, (1975).

[3] Lipschutz, S., Theory and Problems of Linear Algebra, 沐定夷，徐克绍译，上海科学技术出版社 (1981), 40—41

[4] Nering, E. D., Linear Algebra and Matrix Theory. second edition John Wiley & Sons. Inc. (1970), 53—83.

[5] Popov, V. M., Invariant Description of Linear Time-Invariant Controllable Systems, *SIAM. J. Control*, **10**, (1972).

[6] Luenberger, D. G., Observing the State of a Linear System, *IEEE. Trans. Mil. Electron*. **8**, (1964).

[7] Fortmann, T. E. and Williamson, D., Design of Low-order Observers for Linear Feedback Control Laws, *IEEE. Trans. Autom. Control*, **17**, (1972).

[8] Roman, J. R. and Bullock, T. E., Design of Minimal Order Stable Observers for Linear Function of the State via Realization Theory. *IEEE. Trans. Autom. Control*, **20**, (1975).

[9] Sirisena, H. R., Minimal-order Observers for Linear Functions of a State Vector, *Int. J. Control*, **29**, (1979).

SIMPLIFIED ROW TRAPEZOID CANONICAL FORM OF LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS AND LINEAR DESIGN METHOD FOR MINIMAL ORDER Kx-OBSERVER

WANG DAHAI

(*Beijing Institute of Aeronautices and Astronautices*)

ABSTRACT

In this paper a Simplified Row Trapezoid Canonical Form (SRTCF) for Linear multivariable systems is introduced. Between the SRTCF and the observability matrix or controllability matrix of a system, a set of computational expressions for their submatrices exists, which may be useful in system synthesis problems, such as the minimal order Kx-observer design problem, On this basis, new linear design method for minimal order Kx-observers is given.