第9卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 9, No. 3
1983年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1983

具有不可测输入的线性系统观测器

何 堃　　　　张朝池
（大连工学院）　　（南开大学）

摘　　要

具有不可测输入的多变量线性系统状态观测器的设计方法有判定法和建模法. 本文给出了在系统输出直接含有系统输入时应用判定法的充要条件. 在此基础上，提出了综合设计的方法，举例说明了设计步骤.

一、引　　言

对于一个能观的线性多变量系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ 分别为 n, m, p 维状态向量，A, B, C 和 D 是具有相应维数的常数矩阵. 当 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为可测时，可以设计一个 n 阶或 $n-p$ 阶 Luenberger 状态观测器[1]. 在实际系统中，输入 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{u}$ 的一些分量往往是不可测的. 设计具有不可测输入观测器的一种方法是判定法[2,3]. 判定法仅应用于 $D=0$ 的情况. 另一种是建模法[4,5]. 这两种方法各有优缺点. 用判定法设计观测器时，不必增加任何新的积分器，但是观测器极点的配置一般并非是任意的. 用建模法设计观测器时，虽然整个扩张系统的极点是任意配置的，但它随着模型系统阶数的增高而大幅度地增加积分器，这是不经济的. 本文把这两种方法结合起来进行综合设计，既可充分利用输入信息，又可大量地减少积分器，降低成本.

二、判定法和建模法的主要结果

1. 判定法

对于能观系统 (1.1)，当 $D \neq 0$，且 $\boldsymbol{u}$ 为不可测时，它的全阶状态观测器为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}} &= (A-LC)\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y} + (B-LD)\boldsymbol{u},\\ \hat{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{z}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{z}$ 为 n 维向量，L 是 $n\times p$ 阶常数矩阵. 为方便起见，本文始终假定 B 为列满秩. 要使式 (2.1) 成为不需要输入 $\boldsymbol{u}$ 信息的状态观测器，只需寻求 L，使得

$$B - LD = 0, \tag{2.2}$$

而且

$$F \triangleq A - LC \tag{2.3}$$

本文于1981年1月10日收到.

是稳定的．如果这样的L存在，则称系统(1.1)的输入$\boldsymbol{u}$是能判定的．由(2.2)式显见D是列满秩的，从而有$p \geqslant m$．设矩阵$P(s) \triangleq \begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & -D \end{bmatrix}$，称满足$P(s_i)$的秩小于$n+m$的复数$s_i$为$P(s)$的零点；实部为负值的零点称为$P(s)$的稳定的零点．

定理 2.1. 对于系统(1.1)输入$\boldsymbol{u}$能判定的充分必要条件是：D列满秩，而且$P(s)$的零点都是稳定的(证明见附录)．

2. 建模法

对于系统(1.1)文献[5]指出，若$\boldsymbol{u}(t)$由下面方程组建模：

$$\dot{\boldsymbol{v}} = E\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u} = H\boldsymbol{v}. \tag{2.4}$$

其中$\boldsymbol{v}$是l维向量，E，H具有相应维数的常数矩阵．系统(1.1)和(2.4)组成的扩张系统是

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & BH \\ \hline 0 & E \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = [C \,\vdots\, DH] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

定理 2.2. 扩张系统(2.5)能观的充分必要条件是[5]：

1) (A, C)能观； 2) $\begin{bmatrix} A-\lambda_i I & BH \\ 0 & E-\lambda_i I \\ C & DH \end{bmatrix}$的秩为$n+l$.

其中λ_i是E的特征值，$i=1, 2, \cdots, l$．当条件1)，2)成立时，则称系统(1.1)的输入$\boldsymbol{u}$是能建模的．

文献[4]指出，若输入$\boldsymbol{u}(t)$具有多项式形式$\sum_{i=0}^{h-1} a_i t^i$，其中整数$h \geqslant 1$，$\{a_i\}$是未知的系数向量．于是(2.4)式中的E和H分别为：

$$E = \begin{bmatrix} 0_{(h-1)m \times m} & I_{(h-1)m} \\ 0_{m \times m} & 0_{m \times (h-1)m} \end{bmatrix}, \quad H = [I_m \quad 0_{m \times (h-1)m}]. \tag{2.6}$$

定理 2.3. 当输入$\boldsymbol{u}(t)$用多项式建模时，扩张系统(2.5)能观的充分必要条件是[4]：

1) (A, C)能观； 2) $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$的秩为$n+m$.

三、综 合 设 计

已知能观的线性系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{u}_1 + B_2\boldsymbol{u}_2 + B_3\boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D_1\boldsymbol{u}_1 + D_2\boldsymbol{u}_2 + D_3\boldsymbol{u}_3. \tag{3.1}$$

其中$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$分别为n，p，m_1，m_2，m_3维向量；A，B_1，B_2，B_3，C，D_1，D_2和D_3为相应维数的常数矩阵．令B_1，B_2的秩为m_1，m_2．若$\boldsymbol{u}_3$可测，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$均不可测，对$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$分别用判定法和建模法设计观测器．

这里讨论常见的用多项式建模．为方便起见，不妨考虑$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 t$，$\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1\}$为未知系数向量．此时(2.4)式中，

$$E = \begin{bmatrix} 0_{m_2 \times m_2} & I_{m_2} \\ 0_{m_2 \times m_2} & 0_{m_2 \times m_2} \end{bmatrix}, \quad H = [I_{m_2} \quad 0_{m_2 \times m_2}].$$

这时的扩张系统是

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2H \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 + \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_3,$$
$$\boldsymbol{y} = [C \ \ D_2H] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} + D_1\boldsymbol{u}_1 + D_3\boldsymbol{u}_3. \tag{3.2}$$

由定理 2.3，扩张系统 (3.2) 能观的充分必要条件是

$$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D_2 \end{bmatrix} \text{的秩是 } n + m_2. \tag{3.3}$$

由定理 2.1，对扩张系统 (3.2)$\boldsymbol{u}_1$ 能判定的充分必要条件是 D_1 列满秩，且，

$$\overline{P(s)} \triangleq \begin{bmatrix} sI-A & -B_2H & B_1 \\ 0 & sI-E & 0 \\ C & D_2H & -D_1 \end{bmatrix}$$

的零点是稳定的．因此有

定理 3.1. 对于系统 (3.1)，如果 $\boldsymbol{u}_2$ 已建模，则 $\boldsymbol{u}_1$ 能判定的充分必要条件是：1) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}$ 对原系统 (3.1) 同时能建模，即 $\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \end{bmatrix}$ 的秩为 $n + m_1 + m_2$；2) $\boldsymbol{u}_1$ 对原系统 (3.1) 是能判定的，即 D_1 列满秩，且 $P_1(s) \triangleq \begin{bmatrix} sI-A & B_1 \\ C & -D_1 \end{bmatrix}$ 的零点是稳定的．

证明．充分性．由条件 1)，$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D_2 \end{bmatrix}$ 的秩必为 $n + m_2$，即 (3.3) 式成立．又由于

$$\overline{P(s)} \sim \begin{bmatrix} sI-A & B_1 & B_2 & 0 \\ C & -D_1 & -D_2 & 0 \\ 0 & 0 & -sI_{m_2} & -I_{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & sI_{m_2} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

因此，当 $s = 0$ 时，

$$\overline{P(0)} \sim \begin{bmatrix} -A & B_1 & B_2 & 0 \\ C & -D_1 & -D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

由条件 1) 知 0 不是 $\overline{P(s)}$ 的零点．当 $s \neq 0$ 时，由 (3.4) 式，显然 $\overline{P(s)}$ 的零点与 $P_1(s)$ 的零点一致；而由条件 2)，$P_1(s)$ 的零点是稳定的，因此 $\overline{P(s)}$ 的零点也是稳定的．

必要性．由 (3.4) 式，显见 $P_1(s)$ 的零点必是 $\overline{P(s)}$ 的零点，所以，要求 $\overline{P(s)}$ 的零点稳定，$P_1(s)$ 的零点也必须是稳定的．因此条件 2) 成立．由于 $\overline{P(s)}$ 的零点是稳定的，所以 0 不是 $\overline{P(s)}$ 的零点，即 $\overline{P(0)}$ 必满秩．由 (3.5) 式，显然条件 1) 成立．定理获证[1]．

---

1) 对于系统 (3.1)，由于定理 3.1 要求 $\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \end{bmatrix}$ 的秩为 $n + m_1 + m_2$，所以一个明显的必要条件是 $p \geqslant m_1 + m_2$．
由于 $\overline{P(s)}$ 和 $P_1(s)$ 的零点相同，所以扩张系统 (3.2) 对 $\boldsymbol{u}_1$ 判定时的状态观测器的不可观极点，与原系统(3.1)对 $\boldsymbol{u}_1$ 判定时状态观测器的不可观极点是相同的．

对系统 (1.1)，当 $D=0$ 时可以进行类似的讨论．当然它可以设计 $n-p$ 阶具有不可测输入的 Luenberger 观测器．在适当的坐标系下，系统可写为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{12}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_1+\begin{bmatrix}B_{21}\\ B_{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_2+\begin{bmatrix}B_{31}\\ B_{32}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_3,$$
$$\boldsymbol{y}=[0\quad I_p]\boldsymbol{x}. \tag{3.6}$$

其中所有矩阵具有相应的维数．对应于定理 3.1 的结论是：

定理 3.2. 对于系统 (3.6)，如果 $\boldsymbol{u}_2$ 已建模，则 $\boldsymbol{u}_1$ 能判定的充分必要条件是：1) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 对原系统 (3.6) 同时能建模，即 $\begin{bmatrix}A_{11} & B_{11} & B_{21}\\ A_{21} & B_{12} & B_{22}\end{bmatrix}$ 的秩为 $(n-p)+m_1+m_2$；2) u_1 对原系统 (3.6) 能判定，即 B_{12} 是列满秩，且 $\begin{bmatrix}sI-A_{11} & B_{11}\\ -A_{21} & B_{12}\end{bmatrix}$ 的零点是稳定的．

下面举例说明综合设计的方法步骤．

例. 一个三阶线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B_1\boldsymbol{u}_1+B_2\boldsymbol{u}_2,$$
$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}+D_1\boldsymbol{u}_1+D_2\boldsymbol{u}_2.$$

其中：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad D_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad D_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 均不可测．

首先作必要的检验：1) (A, C) 能观，$[B_1B_2]$ 列满秩；2) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 对系统同时能建模；3) D_1 列满秩．因为 $\begin{bmatrix}sI-A & B_1\\ C & -D_1\end{bmatrix}\sim[I_4]$，所以不仅对 $\boldsymbol{u}_2$ 建模后 $\boldsymbol{u}_1$ 能判定，而且扩张系统的状态观测器的所有极点可以自由配置．

如果令 $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1t$，$\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_1$ 的意义同前，则 $\boldsymbol{u}_2$ 的模型方程 (2.4) 中的 $E=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$H=[1,0]$．此时的扩张系统为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}+\bar{B}_1\boldsymbol{u}_1,\qquad \boldsymbol{y}=\bar{C}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}+D_1\boldsymbol{u}_1.$$

其中

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \bar{B}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \bar{C}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix},\quad D_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

扩张系统的状态观测器为:

$$\dot{z} = (\bar{A} - L\bar{C})z + Ly + (\bar{B}_1 - LD_1)u_1, \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = z.$$

若观测器的极点指定为 $-1 \pm i$, -1, -1, -1, 由附录介绍的方法求出 L. 具体解法如下:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad VD_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{其中 } \bar{D} = [1].$$

$$VC = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad KV^T = K = [K_1 K_2].$$

所以

$$F_1 = \bar{A} - \bar{B}_1(\bar{D})^{-1}C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 0].$$

用待定系数法解得 $K_2 = [11.5,\ -15\ 1.5\ 4.5\ 1]^T$ 时,观测器的特征值为指定集合. 因此 $L = [\bar{B}_1(\bar{D})^{-1} \vdots K_2]V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11.5 & -15 & 1.5 & 4.5 & 1 \end{bmatrix}^T$. 所求的观测器为:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10.5 & -11.5 & 0 \\ 1 & 0 & 16 & 15 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5 & -4.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 11.5 \\ 1 & -15 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & 4.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y, \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = z.$$

最后指出,本文的所有结果都可推广到离散系统上去.

附　　录

定理 2.1 的证明.

当 D 列满秩时, 由 (2.2) 式解得 $L = BD^+ + K(I_p - DD^+)$, 其中 $D^+ = (D^T \cdot D)^{-1} \cdot D^T$, K 为 $n \times p$ 阶的任意常数矩阵. 把它代入 (2.3) 式,则 $F = (A - BD^+C) - K(I_p - DD^+)C$.

引理 1. 对于系统 (1.1) 输入 u 能判定的充分必要条件是: D 列满秩,且 $(A - BD^+C, (I_p - D \cdot D^+)C)$ 是能检的.

在实际计算时,可以求一正交阵 V, 使 $VD = \begin{bmatrix} \bar{D} \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 $\bar{D}$ 为满秩的 $m \times m$ 矩阵, 记 $VC = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $KV^T = [K_1 K_2]$, 其中 C_1, C_2, K_1, K_2 分别为 $m \times m$, $(p-m) \times n$, $n \times m$, $n \times (p-m)$ 阶矩阵. 于是由计算得: $D^+ = [(\bar{D})^{-1} \mid 0]V$, $I_p - DD^+ = V^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} V$, $L = [B(\bar{D})^{-1} \mid K_2]V$, 从而 $F = F_1 - K_2C_2$, 其中 $F_1 \triangleq A - B(\bar{D})^{-1}C_1$.

引理 2. 对系统 (1.1) 输入 u 能判定的充分必要条件是: D 列满秩,而且 (C_2, F_1) 是能检的.

令 $Q(s) \triangleq \begin{bmatrix} sI - F_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$.

引理 3. 当D列满秩时，$Q(s)$ 和$P(s)$ 的 Smith 典范形的不变因子[6]相同.

证明. 由于D列满秩，所以存在L，使 $B-LD=0$，于是，

$$P(s)\sim\begin{bmatrix} sI-A+LC & B-LD \\ C & -D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sI-F & 0 \\ C & -D \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} sI-F & 0 \\ C_1 & \bar{D} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & sI-F \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & sI-F_1+K_2C_2 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & sI-F_1 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}.$$

引理获证.

因为 (C_2, F_1) 能检的充分必要条件是 $Q(s)$ 的 Smith 典范形不变因子的零点是稳定的[7]，所以，由引理 2，3，定理 2.1 获证.

参 考 文 献

[1] Luenberger, D. G., An Introduction to Observers, *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-**16** (1971), 596—602.

[2] Wang Shihho et al., Observing the States of Systems with Unmeasurable Disturbances, *IEEE Trans. Automat. Contr*, AC-**20** (1975), 716—717.

[3] Kudva, P. et al., Observers for Linear Systems with Unknown Input, *IEEE Trans. Automat. Contr*, **25** (1980), 113—115.

[4] Gourishankar, V. et al., Reduced-order Observers for Multivariable Systems with Inaccessible Disturbance Inputs, *Int. J. Control*, **25** (1977), 311—319.

[5] O'Reilly, J., Further Comments on ''Minimal-Order Observers for Linear Multivariable Systems with Unmeasurable Disturbances'', *Int. J. Control*, **31** (1980), 605—608.

[6] 须田信英等，自动控制中的矩阵理论，曹长修译，科学出社版，(1979).

[7] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974).

THE DESIGN OF OBSERVERS FOR LINEAR SYSTEM WITH UNMEASURABLE INPUTS

HE KUN

(Dalian Institute of Technology)

ZHANG CHAOCHI

(Nankai University)

ABSTRACT

It is well known, the design methods of an observer for linear multivariable systems are decision method and modeling method. This paper gives sufficient and necessary condition of the decision method which can be applied to the design of system with outputs directly involving inputs. Based on these conditions, a synthetic design method is provided. And an example is given to illustrate the design procedure.