第9卷 第3期 自动化学报 Vol. 9, No. 3
1983年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1983

# 采样控制系统中线性二次型最优控制器的设计

孙增圻
（清华大学）

**摘　　要**

在计算机控制系统中，受控对象是连续的，相应的二次型性能指标函数也是连续函数，而控制器则由于计算机的参与而属离散型．本文给出了这种采样控制系统的线性二次型最优设计的一整套算法．计算的关键在于性能函数及对象模型的离散化．本文导出了离散化的公式及适合计算机计算的算法，同时也给出了用于采样周期加倍时的计算公式，从而保证了计算机可按该算法及相应的计算程序可靠地运行．最后举例说明了这套算法的应用．

## 一、引　　言

在计算机控制系统中，受控对象是连续的，控制器是离散的．对这样的采样控制系统进行线性二次型最优控制器的设计时，需首先将连续的受控对象模型离散化，然后设计一个线性离散控制器，使给定的离散二次型性能指标函数达到最优．在有些情况下，例如当采样周期比较长以及控制量的加权系数比较小时，按上述步骤设计的最优控制系统的输出在采样点具有很好的动态响应性能，而在采样点之间的响应性能不好，甚至隐藏有振荡．因而，如何设计一个离散的控制器，使连续的二次型性能指标达到最优，从而使系统具有满意的连续动态响应性能，这就是本文所要解决的问题．

解决这个问题的途径有两条：（1）首先计算连续系统的最优控制器 $L_c$，然后设法找到近似等效的离散控制器 $L_d$．文献[1—4]报道了这方面的研究成果．所有这些结果都有一个共同的缺点，就是其近似等效性只适用于采样周期较小的情况．（2）首先将连续的受控对象模型及性能函数离散化，然后按照完全离散的系统来进行最优化设计．文献[5—8]讨论了这个问题．本文将二次型性能函数与受控对象模型的离散化结合在一起，从不同的途径导出了更为简单的离散化算法．同时给出了计算无穷级数时的截尾误差上限的估计及采样周期加倍时的计算公式，最后给出了计算离散控制器的递推公式．

## 二、问题的描述

给定连续的受控过程及二次型性能函数为

本文于1982年7月30日收到．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.1}$$

$$J = \boldsymbol{x}^T(t_N)Q_0\boldsymbol{x}(t_N) + \int_0^{t_N} [\boldsymbol{x}^T(t)\bar{Q}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\bar{Q}_2\boldsymbol{u}(t)dt, \tag{2.2}$$

要求计算离散的控制器 $L$，使

$$\boldsymbol{u}(k) = -L\boldsymbol{x}(k), \tag{2.3}$$

并且

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(k),\ kT_0 \leqslant t < (k+1)T_0, \tag{2.4}$$

同时使式(2.2)所示的性能函数 $J$ 取极小．其中 $\boldsymbol{x}$ 为状态向量；$\boldsymbol{u}$ 为控制向量；$T_0$ 是采样周期；$\boldsymbol{u}(k)$ 和 $\boldsymbol{x}(k)$ 是 $\boldsymbol{u}(kT_0)$ 和 $\boldsymbol{x}(kT_0)$ 的简写．并且假定 $t_N = NT_0$．实际常常要求计算 $t_N \to \infty$ 时的定常解．

连续的状态方程 (2.1) 可以离散化为

$$\boldsymbol{x}(k) = F\boldsymbol{x}(k-1) + G\boldsymbol{u}(k-1). \tag{2.5}$$

其中$F = e^{AT_0}$；$G = \left(\int_0^{T_0} e^{At}dt\right)B$.

式(2.2)所示的连续性能函数可以写为

$$J = \boldsymbol{x}^T(t_N)Q_0\boldsymbol{x}(t_N) + \sum_{k=0}^{N-1} J(k). \tag{2.6}$$

其中

$$J(k) = \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} [\boldsymbol{x}^T(t)\bar{Q}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\bar{Q}_2\boldsymbol{u}(t)]dt. \tag{2.7}$$

根据(2.1)和(2.4)式，可解得

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-kT_0)}\boldsymbol{x}(k) + \left[\int_{kT_0}^{t} e^{A(t-\tau)}d\tau\right]B\boldsymbol{u}(k). \tag{2.8}$$

其中 $kT_0 \leqslant t < (k+1)T_0$．将式 (2.8) 和 (2.4) 代入 (2.7) 并整理化简，最后得到

$$J(k) = \boldsymbol{x}^T(k)Q_1\boldsymbol{x}(k) + 2\boldsymbol{x}^T(k)Q_{12}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)Q_2\boldsymbol{u}(k). \tag{2.9}$$

其中

$$Q_1 = \int_0^{T_0} e^{A^Tt}\bar{Q}_1e^{At}dt, \tag{2.10}$$

$$Q_{12} = \left[\int_0^{T_0} e^{A^Tt}\bar{Q}_1\left(\int_0^t e^{A\tau}d\tau\right)dt\right]B, \tag{2.11}$$

$$Q_2 = B^T\left[\int_0^{T_0}\left(\int_0^t e^{A^T\tau}d\tau\right)\bar{Q}_1\left(\int_0^t e^{A\tau}d\tau\right)dt\right]B + \bar{Q}_2T_0. \tag{2.12}$$

将式(2.9)代入(2.6)得到等价的离散二次型性能函数为

$$J = x^T(N)Q_0x(N) + \sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Q_1x(k) + 2x^T(k)Q_{12}u(k) + u^T(k)Q_2u(k)]. \tag{2.13}$$

## 三、对象模型及性能函数离散化算法

令

$$F(T_0) = e^{AT_0} = \sum_{k=0}^{\infty}(A^kT_0^k/k!), \tag{3.1}$$

$$G_1(T_0) = \int_0^{T_0} F(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{k-1}T_0^k/k!). \tag{3.2}$$

根据式 (3.1)，(3.2)，则有

$$F = F(T_0) = I + G_1(T_0)A, \tag{3.3}$$

$$G = G_1(T_0)B. \tag{3.4}$$

令

$$Z = \int_0^{T_0} G_1(t)dt = \sum_{k=2}^{\infty} (A^{k-2}T_0^k/k!), \tag{3.5}$$

比较式 (3.2) 和 (3.5)，有

$$G_1(T_0) = IT_0 + ZA. \tag{3.6}$$

令

$$W = \int_0^{T_0} G_1^T(t)\bar{Q}_1 G_1(t)dt, \tag{3.7}$$

根据 (2.10)—(2.12) 及 (3.1)—(3.7)，有

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_0^{T_0} (I + G_1(t)A)^T\bar{Q}_1(I + G_1(t)A)dt \\ &= \bar{Q}_1T_0 + \bar{Q}_1ZA + A^TZ^T\bar{Q}_1 + A^TWA \\ &= \bar{Q}_1G_1(T_0) + A^TD^T, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \left[\int_0^{T_0} (I + G_1(t)A)^T\bar{Q}_1G_1(t)dt\right] B \\ &= [\bar{Q}_1Z + A^TW]B = DB, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$Q_2 = B^TWB + \bar{Q}_2T_0. \tag{3.10}$$

(3.8) 式中

$$D = \bar{Q}_1Z + A^TW. \tag{3.11}$$

由此可见，离散化算法的关键在于计算 $Z$ 和 $W$．根据式(3.5)，计算 $Z$ 的递推公式为

$$Z = \sum_{k=2}^{\infty} Z_k, \tag{3.12}$$

$$Z_k = \frac{AT_0}{k} Z_{k-1}, \tag{3.13}$$

$$Z_2 = \frac{T_0^2}{2} I. \tag{3.14}$$

根据式 (3.2) 和 (3.7)，

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{T_0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (A^T)^{i-1}\frac{t^i}{i!}\bar{Q}_1 \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1}\frac{t^i}{i!}\right)dt \\ &= \int_0^{T_0} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-i-1}}{i!(k-i)!}\right) t^k dt \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} W_k, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$W_k=\frac{T_0^{k+1}}{k+1}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-i-1}}{i!(k-i)!} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{T_0^{k+1}}{k+1}\left[\sum_{i=2}^{k-2}\frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-1-i}}{i!(k-i)!}+\frac{\bar{Q}_1A^{k-2}}{(k-1)!}+\frac{(A^T)^{k-2}\bar{Q}_1}{(k-1)!}\right]\\&=\frac{T_0^{k+1}}{k+1}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=2}^{k-2}\left(\frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-1-i}}{(i-1)!(k-i)!}+\frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-1-i}}{i!(k-1-i)!}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\bar{Q}_1A^{k-2}}{k(k-2)!}+\frac{\bar{Q}_1A^{k-2}}{k!}\right)+\left(\frac{(A^T)^{k-2}\bar{Q}_1}{k(k-2)!}+\frac{(A^T)^{k-2}\bar{Q}_1}{k!}\right)\right]\\&=\frac{T_0}{k+1}\left[A^T\frac{T_0^k}{k}\sum_{j=1}^{k-2}\frac{(A^T)^{j-1}\bar{Q}_1A^{k-2-j}}{j!(k-1-j)!}+\frac{T_0^k}{k}\sum_{i=1}^{k-2}\frac{(A^T)^{i-1}\bar{Q}_1A^{k-2-i}}{i!(k-1-i)!}A\right.\\&\quad\left.+\frac{\bar{Q}_1A^{k-2}T_0^k}{k!}+\frac{(A^T)^{k-2}\bar{Q}_1T_0^k}{k!}\right].\end{aligned} \tag{3.17}$$

由式(3.16)和(3.5)可以得到

$$W_k=\frac{T_0}{k+1}[A^TW_{k-1}+W_{k-1}A+\bar{Q}_1Z_k+Z_k^T\bar{Q}_1]. \tag{3.18}$$

根据式(3.16)可求得 $W_k$ 的初始值

$$W_2=\bar{Q}_1T_0^3/3. \tag{3.19}$$

全部离散化算法可以归纳如下:

1) 利用递推公式(3.12)—(3.19)计算无穷级数 $Z$ 和 $W$.

2) 利用公式(3.3), (3.4), (3.6)以及(3.8)—(3.11)计算 $F$, $G$, $Q_1$, $Q_{12}$ 和 $Q_2$.

## 四、截尾误差上限的估计及加倍公式

实际计算时,用无穷级数之和表示的 $Z$ 和 $W$ (式(3.5)和(3.15))只能取有限项相加来近似表示,因此,应对由于截尾而产生的误差进行估计.

假定无穷级数 $Z$ 逐项相加到 $k=k_z\geqslant 2$, 利用任何矩阵范数的定义及式(3.5), $Z$ 的截尾误差矩阵范数应为

$$\begin{aligned}\|E_z\|&=\left\|\sum_{k=k_z+1}^{\infty}\frac{A^{k-2}T_0^k}{k!}\right\|\leqslant\sum_{k=k_z+1}^{\infty}\frac{T_0^2}{k!}\|AT_0\|^{k-2}\\&=\frac{T_0^2\|AT_0\|^{k_z-1}}{(k_z+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k_z+1)!\|AT_0\|^j}{(j+k_z+1)!}\leqslant\frac{T_0^2\|AT_0\|^{k_z-1}}{(k_z+1)!}e^{\|AT_0\|}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

根据式(3.16), $W_k$ 的矩阵范数应为

$$\begin{aligned}\|W_k\|&\leqslant\frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3}{k+1}\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\|A^TT_0\|^j\|AT_0\|^{k-j-2}}{(j+1)!(k-j-1)!}\\&=\frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3}{(k+1)(k-2)!}\sum_{j=0}^{k-2}\frac{(k-2)!\|A^TT_0\|^j\|AT_0\|^{k-2-j}}{(j+1)(k-j-1)j!(k-2-j)!}\\&\leqslant\frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3}{(k+1)(k-1)!}(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^{k-2}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

假定无穷级数$W$逐项相加到 $k=k\omega\geqslant 2$，根据式(3.15)和(4.2)，$W$ 的截尾误差矩阵范数应为

$$\begin{aligned}\|E_\omega\| &= \left\|\sum_{k=k_\omega+1}^{\infty} W_k\right\| \leqslant \sum_{k=k_\omega+1}^{\infty} \frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3}{(k+1)(k-1)!}(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^{k-2}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3}{(j+k_\omega+2)(j+k_\omega)!}(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^{j+k_\omega-1}\\ &= \frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^{k_\omega-1}}{k_\omega!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k_\omega!(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^j}{(j+k_\omega+2)(j+k_\omega)!}\\ &\leqslant \frac{\|\bar{Q}_1\|T_0^3(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)^{k_\omega-1}}{(k_\omega+2)k_\omega!}e^{(\|A^TT_0\|+\|AT_0\|)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

在求得了$\|E_z\|$和$\|E_\omega\|$后，根据上一节的公式，可以很容易地估算出 $F$, $G$, $Q_1$, $Q_{12}$ 和 $Q_2$ 的误差矩阵范数.

从公式(4.1)和(4.3)可以看到，如果$\|AT_0\|$太大，为了达到一定的计算精度，需要计算很多项. 更为严重的是，$Z_k$ 或 $W_k$ 的值可能很大，以至使计算机溢出. 因此，如果碰到由于$\|AT_0\|$太大，而使计算发生困难时，可首先使采样周期减小，用 $T_0/2^d$ 进行离散化计算，然后再连续 $d$ 次应用加倍公式，最终获得给定采样周期的离散化结果. 这里称 $d$ 为加倍因子. 下面给出关于采样周期的加倍公式(推导过程见附录):

$$F(T_0)=F(T_0/2)F(T_0/2), \tag{4.4}$$

$$G(T_0)=G(T_0/2)+F(T_0/2)G(T_0/2), \tag{4.5}$$

$$Q_1(T_0)=Q_1(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)F(T_0/2), \tag{4.6}$$

$$Q_{12}(T_0)=Q_{12}(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_{12}(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)G(T_0/2), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}Q_2(T_0)={}&2Q_2(T_0/2)+Q_{12}^T(T_0/2)G(T_0/2)+G^T(T_0/2)Q_{12}(T_0/2)\\ &+G^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)G(T_0/2).\end{aligned} \tag{4.8}$$

加倍因子 $d$ 应该合理地选择. 如果 $d$ 选得太大，虽然计算级数 $Z$ 和$W$时可以取较少的项，但利用公式(4.4—4.8)进行采样周期加倍计算的次数将增加. 相反，如果 $d$ 太小，则可能增加计算级数 $Z$ 和$W$的困难. 建议加倍因子 $d$ 的选择，以使得 $\|AT_0\|/2^d\leqslant 5$，即让 $d=\max(a, 0)$. 其中 $a$ 为大于 $\log_2\|AT_0\|/5$ 的最小的整数.

## 五、计算最优控制器的递推公式

在连续的状态方程系数矩阵 $A$, $B$ 及二次型性能函数 $J$ 离散化后，原来的采样控制系统就变成了完全的离散系统，于是最优设计就变成了计算式(2.3)所示的离散控制器 $L$，使式(2.13)所示的离散二次型性能函数极小. 它与一般的离散系统最优控制器设计的不同点是在它的性能函数表达式中多了交叉相乘项 $2x^T(k)Q_{12}u(k)$. 文献[5]中给出了在这种情况下计算最优控制器的公式. 这里作者得到了不同型式的递推公式:

$$\boldsymbol{u}(k)=-L(k)\boldsymbol{x}(k), \tag{5.1}$$

$$L(k)=[Q_2+G^TS(k+1)G]^{-1}[G^TS(k+1)F+Q_{12}^T], \tag{5.2}$$

$$S(k)=[F-GL(k)]^TS(k+1)[F-GL(k)]+L^T(k)Q_2L(k)+Q_1 \\ -L^T(k)Q_{12}^T-Q_{12}L(k), \tag{5.3}$$

$$S(N)=Q_0, \tag{5.4}$$

$$J_k=\boldsymbol{x}^T(k)S(k)\boldsymbol{x}(k),\ k=N-1,N-2,\cdots\cdots. \tag{5.5}$$

**例.** 考虑飞机纵向运动分量的计算机控制[9],受控对象的线性模型可以表示为

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{u}=(T,\delta)^T.$$

其中 $\boldsymbol{x}=(v\ \ \gamma\ \ q\ \ \theta)^T$; $v$ 为飞行速度; $\gamma$ 为纵向航行角; $q$ 为俯仰角速度; $\theta$ 为俯仰角; $T$ 为飞机推力; $\delta$ 为升降舵角. 以上各量均指偏离工作点的变化量.

$$A=\begin{bmatrix} -2.3516E-02 & -5.4299 & 0 & -4.3695 \\ 5.4184E-03 & -6.1233E-01 & 0 & 6.0416E-01 \\ 2.1348E-04 & 6.2459E-01 & -2.5434E-01 & -6.2491E-01 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 2.1908E-05 & 0 \\ 6.2084E-08 & 0 \\ 2.4379E-09 & -6.4256E-01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

连续的二次型性能指标函数为

$$J=\int_0^\infty [x^T(t)\bar{Q}_1x(t)+u^T(t)\bar{Q}_2u(t)]\,dt. \tag{5.6}$$

其中

$$\bar{Q}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_2=\begin{bmatrix} 3.3E-9 & 0 \\ 0 & 3.3 \end{bmatrix}.$$

离散的控制器由计算机实现，采样周期选为 $T_0=1.5$ 秒. 要求计算离散的控制器 $L$，以使式(5.6)极小. 利用本文给出的算法以及相应的计算程序[10],求得结果如下:

$$L=\begin{bmatrix} 9999.4 & -40405 & -27552 & -67306 \\ 0.021269 & -1.1296 & -1.4917 & -0.8007 \end{bmatrix}.$$

本文给出了在计算机控制系统中计算离散最优控制器的一套完整的算法. 这个控制器能使得时间连续的二次型性能函数最优. 它特别适用于那些需要尽可能长的采样周期的计算机控制系统的最优设计. 这套算法已用 BASIC 和 PASCAL 两种语言编成程序[10]. 由于采样周期加倍公式的应用,使计算机可按该程序可靠地运行,即使对于很长的采样周期,计算也不困难.

本文的工作得到瑞典卡尔摩斯 (Chalmers) 大学的 B. Qvarnström 教授和 B. Lennartson 的指导和帮助,在此谨表感谢.

## 附录：采样周期加倍公式的推导

根据式 (3.1) 和 (3.2)

$$F(t+\tau)=e^{A(t+\tau)}=e^{At}e^{A\tau}=F(t)F(\tau), \tag{A.1}$$

$$G_1(t+\tau)=\int_0^{t+\tau}F(s)ds=\int_0^{\tau}F(s)ds+\int_{\tau}^{t+\tau}F(s)ds$$

$$=G_1(\tau)+\int_0^{t}F(\sigma+\tau)d\sigma=G_1(\tau)+F(\tau)G_1(t). \tag{A.2}$$

根据式 ($A$.1) 和 ($A$.2) 得

$$F(T_0)=(F(T_0/2)F(T_0/2), \tag{A.3}$$

$$G_1(T_0)=G_1(T_0/2)+F(T_0/2)G_1(T_0/2). \tag{A.4}$$

由式 ($A$.4) 和 (3.4) 可得

$$G(T_0)=G_1(T_0)B=G(T_0/2)+F(T_0/2)G(T_0/2). \tag{A.5}$$

由式 (2.10), (3.1) 和 ($A$.1) 得

$$\begin{aligned}Q_1(T_0)&=\int_0^{T_0}F^T(t)\bar{Q}_1F(t)dt\\&=\int_0^{T_0/2}F^T(t)\bar{Q}_1F(t)dt+\int_{T_0/2}^{T_0}F^T(t)\bar{Q}_1F(t)dt\\&=Q_1(T_0/2)+\int_0^{T_0/2}F^T(\tau+T_0/2)\bar{Q}_1F(\tau+T_0/2)d\tau\\&=Q_1(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)F(T_0/2).\end{aligned} \tag{A.6}$$

由式 (2.11), (3.2), (3.3), ($A$.1) 和 ($A$.2) 得

$$\begin{aligned}Q_{12}(T_0)&=\left[\int_0^{T_0}F^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt\right]B\\&=\left[\int_0^{T_0/2}F^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt+\int_{T_0/2}^{T_0}F^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt\right]B\\&=Q_{12}(T_0/2)+\left[\int_0^{T_0/2}F^T(\tau+T_0/2)\bar{Q}_1G_1(\tau+T_0/2)d\tau\right]B\\&=Q_{12}(T_0/2)+\left\{F^T(T_0/2)\int_0^{T_0/2}F^T(\tau)\bar{Q}_1[G_1(\tau)+F(\tau)G_1(T_0/2)]d\tau\right\}B\\&=Q_{12}(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_{12}(T_0/2)+F^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)G(T_0/2).\end{aligned} \tag{A.7}$$

由式 (3.7) 和 ($A$.2) 得

$$\begin{aligned}W(T_0)&=\int_0^{T_0}G_1^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt\\&=\int_0^{T_0/2}G_1^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt+\int_{T_0/2}^{T_0}G_1^T(t)\bar{Q}_1G_1(t)dt\\&=W(T_0/2)+\int_0^{T_0/2}G_1^T(\tau+T_0/2)\bar{Q}_1G_1(\tau+T_0/2)d\tau\\&=W(T_0/2)+\int_0^{T_0/2}[G_1^T(\tau)+G_1^T(T_0/2)F^T(\tau)]\bar{Q}_1[G_1(\tau)+F(\tau)G_1(T_0/2)]d\tau\\&=2W(T_0/2)+\int_0^{T_0/2}G_1^T(\tau)\bar{Q}_1F(\tau)d\tau\, G_1(T_0/2)\\&\quad+G_1^T(T_0/2)\int_0^{T_0/2}F^T(\tau)\bar{Q}_1G_1(\tau)d\tau+G_1^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)G_1(T_0/2).\end{aligned} \tag{A.8}$$

由式(3.11)和(A.8)得

$$Q_2(T_0) = 2Q_2(T_0/2) + Q_{12}^T(T_0/2)G(T_0/2) + G^T(T_0/2)Q_{12}(T_0/2) + G^T(T_0/2)Q_1(T_0/2)G(T_0/2). \tag{A.9}$$

## 参 考 文 献


[1] Kleinman, D. L. and Rao, P. K., Continuous-Discrete Gain Transformation Method for Linear Feedback Control. *Automatica*, **13**, (1977).

[2] Kuo, B. C. and Peterson, D. W., Optimal Discretization of Continuous Data Control System. *Automatica*, **9**, (1973).

[3] Kuo, B. C., Singh, G. and Yackel, R., Digital Approximation of Continuous-Data Control System by Point-by-point State Comparison. *Compt. Elec. Engng.* **1**, (1973).

[4] Melzer, S. M. and Kuo, B. C., Sampling Period Sensitivity of the Optimal Sampled Data Linear Regulator. *Automatica*, **7**, (1971).

[5] Dora'o, P. and Levis, A., Optimal Linear Regulators-the Discrete Time Case. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-**16**(6), (1971).

[6] Armstrong, E. S., Series Representation for the Weighting Matrices in the Sampled-Data Optimal Linear Regulator Problem. *IEEE. Trans. Aut. Control,* AC-**23**, (1978).

[7] Leondes, C. T. and Salami, M. A., Algorithms for the Weighting Matrices in Sampled-Data Linear Time-Invariant Optimal Regulator Problems. *Comput & Elect. Engng.*, **7**, (1980).

[8] Mårtensson, K., Linear Quadratic Control Package Part II- the Discrete Problem. Report 6904, Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden. 1969.

[9] Sun Zengqi and Qvarnström, B., Aircraft Longitudinal Control by Long Sampling Interval Controllers. Ph. D. Thesis, Chalmers University of Technology, Sweden. 1981.

[10] Sun Zengqi, Program for the Computation of a Time-discrete Optimal Controller that Minimizes the Time Continuous Loss Function. Report, R81—08, Dept. of Control Engineering, Chalmers University of Technology, Sweden. 1981.


# DESIGN OF LINEAR QUADRATIC OPTIMAL CONTROLLERS IN SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS


Sun Zengqi

(*Tsinghua University*)



### Abstract

For a computer system, the process as well as the linear quadratic performance index are time-continuous, but the controller is time-discrete. A set of algorithms for optimal design of sampled-data control system is given in this paper. The key problem for the computation lies in the discretization of the process model and the performance index. Formulas and algorithms for the discretization are developed. Besides, an interval doubling procedure for increasing reliability of the algorithms and the corresponding programs are introduced. Finally, an example is given to illustrate the application of such algorithms.