

立方体图及开关函数极小化

刘 汉 龙

(湖南柴油机厂)

摘 要

本文建立了一种立方体图,无需分解单项式为最小项,能方便地解决单输出多元开关函数极小化问题。文中给出了无冗余覆盖及极小覆盖的求法,并称求极小覆盖的方法为“序号数组法”。这些方法可解决卡诺图所不能解决的多于六元的函数极小化问题,能应用于数码转换、数字控制、自动化装置的人工逻辑化简、计算机设计自动化。本方法已在 CJ-719 计算机上实现。

一、立方体图

本文用图论中的图研究 n 元单输出开关函数¹⁾极小化问题。文中有关记号、定义、算符除本文新出现的以外均见文献 [1—3]。

定义 1. 设图 G 是有 p 个点的标定图,一个立方体集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ 中每个立方体对应于图 G 中一个点²⁾,两立方体之间相容 (ϕ) 的结果对应于两点间的线,两立方体之间相容无定义,两点之间没有线,则称图 G 为集合 C 对应的立方体相容图,简称立方体图。

两立方体之间相容的结果仍是立方体,它虽对应于图 G 中的线,但不一定属于集合 C 。图 $G(V, X)$ 中的线集 X 亦对应于一个立方体集合,但它的各元素不一定等于集合 C 中立方体。

由文 [1] 中极大立方体的概念(亦即文 [2] 中的本原蕴含),给出下面的定义:

定义 2. 称由极大立方体构成的集合 C 所对应的立方体相容图为极大立方体图。

定义 3. 若 n 元开关函数 f 的一个覆盖对应一个立方体图,则称此图为覆盖图。

定义 4. 若一个极大立方体图是覆盖图,则称为极大覆盖图。

定义 5. 若从极大覆盖图 G 移去任一点后得到的主子图均不是极大覆盖图,则称图 G 为无冗余覆盖图。显然,无冗余覆盖图与无冗余覆盖相对应。

定义 6. 称 n 元开关函数的全部无冗余覆盖图中点数最少者为极小蕴含图。显然,与开关函数的一个极小覆盖对应的图一定是极小蕴含图之一。

本文于 1980 年 11 月 21 日收到,曾于 1981 年在湖南省自动化学会成立大会及中国电子学会半导体与集成电路学会第二届学术会上宣读。

1) 本文所指开关函数,为简明,未考虑有 DC 项,如考虑,稍加变化即可。

2) 本文中的“点”,不是专指 0 立方体,而可对应任一立方体 c_i ,且 c_i 的足标(序号) i 就是对应点 v_i 的足标。

二、邻接矩阵与立方体邻接权矩阵

构造一个 p 阶立方体图 $G(V, X)$, p 个立方体对应于它的 p 个点, $v_i \in V, i = 1, 2, \dots, p$. 对应确定以后, V 中两点间的邻接关系也被固定. 设图 G 的邻接矩阵为 $A(G) = (a_{ij})$, v_i 的度

$$\deg v_i = \sum_{j=1}^p a_{ji} = \sum_{j=1}^p a_{ij} = a_{ii}^{(2)}, \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

定义 7. 对于 p 阶立方体图 $G(V, X)$, 若某条线对应的立方体等于某点 $v_k (v_k \in V)$ 之相应立方体, 则称序号 k 为图 G 的图内权值 (V 中所有点的序号并不都是图内权值).

定义 8. 对于 p 阶立方体图 $G(V, X)$, 若某条线对应的立方体不等于 V 中点对应的立方体, 而等于另外的立方体 c_q (q 是另行设定的正整数, $q > p$), 则称序号 q 为图 G 的图外权值. 如果线集 X 对应的立方体集合中有 m 个立方体的序号是图外权值, 则可分别设定 q 为 $p+1, p+2, \dots, p+m$.

定义 9. 将立方体图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 中的元素 1 用对应的图内(或图外)权值代替, 而元素 0 不变, 由此构成另一矩阵 $D(G) = (d_{ij})$. 称 $D(G)$ 为图 G 的立方体邻接权矩阵, 简称权矩阵. 权矩阵是一个对称矩阵, 书写时可省略左下部.

下面举例说明立方体图及权矩阵的建立过程. 若 $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, 其中 $c_1 = (1 * 0)$, $c_2 = (01 *)$, $c_3 = (* 10)$, $c_4 = (00 *)$. C 对应于立方体图 $G(V, X)$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 因为 $c_1 \neq c_2 = c_3$, $c_1 \neq c_4 = c_5 = (* 00)$, $c_2 \neq c_4 = c_6 = (0 * *)$, $c_3 \neq c_4 = c_7 = (0 * 0)$, 故序号 3 为图内权值, 序号 5, 6, 7 为图外权值. 由此得出邻接矩阵

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

将 1 行 2 列的元素 1 换上序号数 3, 1 行 4 列元素 1 换上序号数 5 \dots , 最后得立方体图 G 的权矩阵

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ & 0 & 0 & 6 \\ & & 0 & 7 \\ & & & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{标记栏}$$

三、求开关函数的无冗余覆盖

定义 10. 若极大立方体构成的覆盖中的任意个立方体, 以任意种括号结合的相容均不在覆盖中, 则称这种覆盖为无冗余覆盖. 如果覆盖中的某些立方体以某种括号结合的相容在此覆盖中, 这相容结果一定被此覆盖中那些立方体的并所包含, 它可从下面的定理推出.

定理 1^[1]. 单输出开关函数 f 的两立方体 c 与 d 相容, 且 $e = c \neq d$, 则 $e \subseteq c \cup d$.

对一个立方体覆盖, 进行吸并运算^[4]后变为立方体集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$, 用前面建立的立方体图 G , 以及用基于定义 10 的算法 1 可得到函数的一个无冗余覆盖.

算法 1. 第一步, 计算图 G 的权矩阵 $D(G)$ 的元素 $d_{ij} (i < j)$, 计算的顺序任意选定.

1) 若 $d_{ij} = k (v_k \in V, G = G(V, X))$, 则在 $D(G)$ 中 k 行 k 列标记栏内填上 \times , 对属于此行、此列的元素 (d_{ki} 和 d_{jk}) 以后不再计算. 2) 若 $d_{ij} = q_1 (c_i \neq c_j = c_{q_1}, G$ 的图外权值 q_1 等于图 G 中点数加 1 ($q_1 = p + 1$)), 则将新点 v_{q_1} (它对应于 c_{q_1}) 添入图 G , 得到新图 G_1 , $D(G)$ 扩展为新权矩阵 $D(G_1)$. 在图 G_1 所有对应立方体之间求蕴含 (\Rightarrow), 凡被蕴含的立方体在 $D(G_1)$ 的对应行、列记上 \times . 若 c_{q_1} 蕴含了 C 中的立方体 c_i 或 c_j , 则在 q_1 行、列标记栏记上 Δ .

第二步, 计算图 G_1 之 $D(G_1)$ 的元素 $d_{ij} (i < j)$, 已计算过的不再计算, 记有 \times 的行、列不再计算, 计算的顺序任意选定. 1) 若 $d_{ij} = k_1 (v_{k_1} \in V_1, G_1 = G_1(V_1, X))$, 则在 $D(G_1)$ 中 k_1 行、 k_1 列标记栏记上 \times . 2) 若 $d_{ij} = q_2 (c_i \neq c_j = c_{q_2}, q_2 = q_1 + 1)$, 则把新点 v_{q_2} 添入图 G_1 , 得到新图 G_2 , $D(G_1)$ 扩展为新权矩阵 $D(G_2)$. 在图 G_2 所有对应的立方体之间求蕴含, 凡被蕴含的立方体在 $D(G_2)$ 的对应行、列记上 \times . 若 c_{q_2} 蕴含了 C 中之 c_i (c_j) 或者蕴含了前述带 Δ 的行(列)所对应的立方体, 则在 q_2 行、列标记栏记上 Δ .

第三步, 用第二步的办法逐步得到新图 G_3, G_4, \dots, G_m , 直至图 G_m 不能增加新点为止.

第四步, 无冗余覆盖中立方体序号的选取. 1) 原 $D(G)$ 中未记有 \times 的行(列)序号, 全部是无冗余覆盖中立方体的序号. 2) 对属于 $D(G_m)$ 而不属于 $D(G)$ 的未记 \times 之行(列)序号, 标记栏内记有 Δ 的是无冗余覆盖中立方体的序号.

需要注意的是, 某行(列)标记栏中, 不管是否记有 Δ , 只要记有 \times , 则它的序号将不被选取. 另外, 计算 d_{ij} 的顺序不同可得到不同的无冗余覆盖.

四、序号数组法与求开关函数的极小覆盖

定义 11. 数个立方体的序号用“ \cdot ”连接起来形成一个数组, 称为序号数组, 记为 $(i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_\lambda)$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_\lambda$ 均是立方体序号.

定义 12. 称序号数组里的序号为坐标, 坐标的个数为序号数组坐标数.

定义 13. 对于整数 $\lambda \geq 1$, 称坐标数等于 λ 的序号数组为 λ 序号数组.

序号数组有如下作用:

1) 序号数组可以表示立方体之间相容及包含关系. 如果将一个 λ 序号数组与某一序号数组用等号连接, 即

$$(i_\theta) = (i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_\lambda), \quad \lambda \neq 1,$$

则认为 $c_{i_\theta} = () c_{i_1} \neq c_{i_2} \neq \dots \neq c_{i_\lambda}$, 其中 $()$ 表示它后面的立方体相容可以用任意形式括号结合的某一种. 对上述形式序号数组, 还可认为

$$c_{i_\theta} \subseteq c_{i_1} \cup c_{i_2} \cup \dots \cup c_{i_\lambda}.$$

2) 序号数组可以对应为逻辑函数, 一个 λ 序号数组可对应为 λ 个变元的合取, 每一

个序号看作一个变元, 序号数组中的“·”视为逻辑乘, 但这种逻辑函数不能与求极小覆盖的函数混淆.

3) 序号数组在特定场合可表示为函数的一个覆盖, 其中序号代表覆盖中立方体序号.

定理 2 (代入定理). 对于任一含序号 i_x 的序号数组 $(i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_x \cdot \dots \cdot i_\lambda)$, 若

$$(i_\theta) = (i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_x \cdot \dots \cdot i_\lambda),$$

$$(i_x) = (i_{\lambda+1} \cdot i_{\lambda+2} \cdot \dots \cdot i_{\lambda+\phi})$$

存在, 则有

$$(i_\theta) = (i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_{\lambda+1} \cdot i_{\lambda+2} \cdot \dots \cdot i_{\lambda+\phi} \cdot \dots \cdot i_\lambda).$$

定理 2 显然是成立的.

现给出序号数组法, 并举例说明.

例. 六元函数的原始覆盖 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_7\}$, 其中 c_1 为 * 0 * 0 0 0, c_2 为 * 0 0 * 0 0, c_3 为 0 * * 0 * 0, c_4 为 0 * * 0 0 *, c_5 为 0 * 0 * * 0, c_6 为 * * 1 0 1 0, c_7 为 * 0 1 0 * *.

算法 2 (序号数组法). 第一步, 对原始覆盖 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$, 把它对应到覆盖图 G , 计算 $D(G)$ 的元素 $d_{ij} (i < j)$, 计算的顺序任意选定. 1) 若 $d_{ij} = k (v_k \in V, G = G(V, X))$, 则在 $D(G)$ i 行 j 列填上 k . 例中 $d_{27} = 1$, 2 行 7 列处填 1 (见图 1). 2) 若 $d_{ij} = q_1 (c_i \neq c_j = c_{q_1}, G$ 的图外权值 $q_1 = p + 1)$, 则把新点 v_{q_1} 添入图 G 得到新图 G_1 , $D(G)$ 扩展为 $D(G_1)$, 并在 $D(G)$ 的 i 行 j 列处填入 q_1 . 例中 $D(G)$ 的 5 行 7 列处填 8. c_8 为 0 0 * 0 * 0.

第二步, 计算 $D(G_1)$ 的元素 $d_{ij} (i < j)$, 已计算过的不再计算, 计算的顺序任意选定. 1) 若 $d_{ij} = k_1 (v_{k_1} \in V_1, G_1 = G(V_1, X))$, 将 k_1 填入 $D(G_1)$ 的 i 行 j 列处. 2) 若 $d_{ij} = q_2 (c_i \neq c_j = c_{q_2}, G_1$ 的图外权值 $q_2 = q_1 + 1)$, 则把新点 v_{q_2} 添入图 G_1 得到新图 G_2 , $D(G_1)$ 扩展为 $D(G_2)$, 并在 $D(G_1)$ 的 i 行 j 列处填上 q_2 . 例中 $D(G_1)$ 的 4 行 6 列填 9. c_9 为 0 * 1 0 * 0.

第三步, 用上述办法得到新图 G_3, G_4, \dots, G_m , 直至图 G_m 不能增加新点为止. 将计算出的权矩阵中的 d_{ij} 均填于矩阵的 i 行 j 列处. 本例中, d_{ij} 为 1, 3, 5, 8 及 10, \dots , 15, 分别填入与 $D(G_8)$ 对应的 i 行 j 列处. 各新图中的新立方体分别是: c_{10} 为 0 * * 0 1 0, c_{11} 为 * 0 1 0 * 0, c_{12} 为 0 0 * 0 0 0, c_{13} 为 0 0 1 0 * 0, c_{14} 为 0 0 0 0 * 0, c_{15} 为 0 0 * 0 1 0, 新图构造至 G_8 不能增加新点为止.

第四步, 在图 G_m 所对应的立方体之间求蕴含, 得到所有极大立方体集合 Z . 本例中, $Z = \{c_1, c_2, \dots, c_7\}$.

第五步, 在 $D(G_m)$ 标记栏填序号数组. 1) 对于 $D(G_m)$, 若 $d_{xy} = s, x, y, s \in \{1, 2, \dots, m + p\}$, 在各行(列)标记栏记上该行(列)数为坐标的 1 序号数组, 又在 s 行(列)标记栏记上 2 序号数组 $(x \cdot y)$. 本例中, 在 1 列标记栏记上 (1), (2 · 7), 在 2 列记上 (2), 在 3 列记上 (3), (4 · 6), (5 · 6), \dots . 2) 对于 $D(G_m)$, Z 中立方体序号所在行(列)里填 3 序号数组. 它们由 2 序号数组生成. 若 z 为 Z 中立方体序号, 在 z 行(列)标记处有一个 $(x \cdot y)$, 其中一个坐标 y 是 Z 中立方体序号, 而另一个坐标 x 却不是, 则把

$D(G_m)$ 中 x 行(列)标记栏中所有 2 序号数组用代入定理代入 $(x \cdot y)$, 于是得到 x 行(列)应填的所有 3 序号数组. 本例中, $D(G_8)$ 第 3 列标记栏里, $(5 \cdot 9)$ 中的 9 用 $(9) = (4 \cdot 6)$ 代入, 得 3 序号数组 $(4 \cdot 5 \cdot 6)$, $(4 \cdot 10)$ 中用 $(10) = (5 \cdot 6)$ 代入亦得 $(4 \cdot 5 \cdot 6)$.

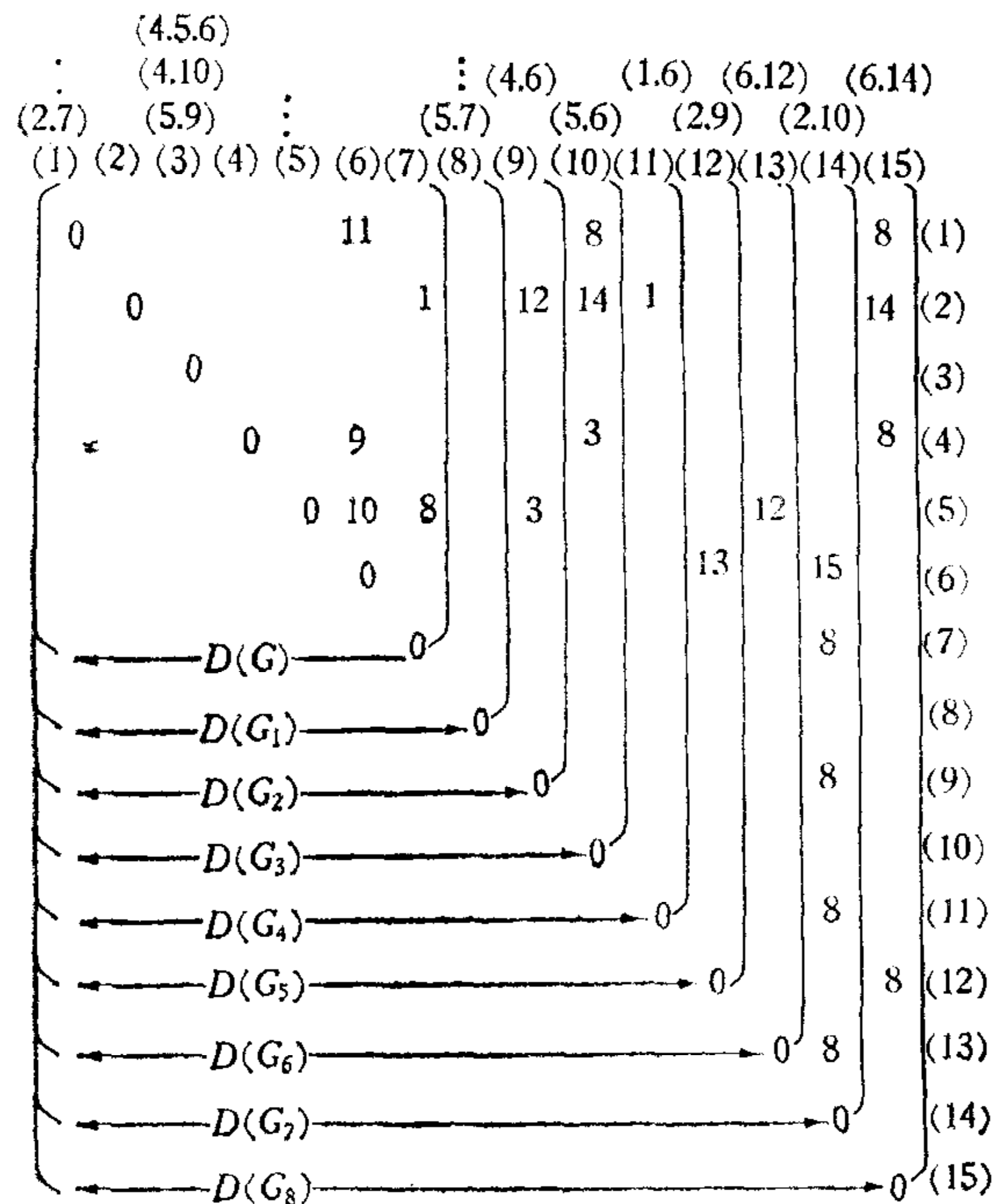


图 1

3) 在 Z 中立方体序号所在行(列)的标记栏里填写 4 序号数组. 它们由 2 序号数组和 3 序号数组生成, 生成它们的 2 序号数组中两个坐标不是 Z 中立方体序号, 生成它们的 3 序号数组中只一个坐标不是 Z 中立方体序号. 生成 4 序号数组的方法与前述相同, 所有 4 序号数组都需填入. 本例中再没有大于 3 的序号数组生成. 4) 用前述类似办法生成 5 序号数组、6 序号数组..., 直到序号数组里坐标全为 Z 中立方体序号, 而不再需要使用代入定理时为止.

第六步, 对 $D(G_m)$ 的 Z 中立方体序号所在行(列)标记栏内的序号数组, 只要其中坐标全为 Z 中立方体序号, 就把它写成逻辑和. 本例中, c_1 为 $(1) + (2 \cdot 7)$, c_2 为 (2) , c_3 为 $(3) + (4 \cdot 5 \cdot 6)$, c_4 为 (4) , c_5 为 (5) , c_6 为 (6) , c_7 为 (7) .

第七步, 将第六步得到的各个逻辑和全部进行逻辑乘, 然后经吸收得总序号数组 Q . 本例中,

$$Q = [(1) + (2 \cdot 7)] \cdot (2) \cdot [(3) + (4 \cdot 5 \cdot 6)] \cdot (4) \cdot (5) \cdot (6) \cdot (7) \\ = (2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7).$$

第八步, Q 等于数个序号数组的逻辑和, 每个序号数组对应一个覆盖图, 其中坐标数最小的覆盖图即极小蕴含图, 数组内的坐标即该图对应的立方体序号.

第九步, 从所有极小蕴含图对应的覆盖里找出总价格最小的覆盖(不一定是唯一的), 即给定开关函数的极小覆盖. 本例中, $r = \{c_2, c_4, c_5, c_6, c_7\}$.

五、结 语

立方体图的建立使开关函数极小化问题变得明朗、清楚。无冗余覆盖、极小覆盖可用 Quine 的相容运算直接构成。本方法无需分解出最小项集就能方便地解决多变量开关函数的极小化问题。当覆盖函数的极大立方体数目不多时,6元以上的函数可人工化简,这是卡诺图等方法办不到的。这些方法为多输入数字代码转换、数字控制及自动化装置的逻辑电路提供了人工化简的工具。

在集成电路及计算机设计自动化中(如在 PLA 设计中),本方法能缩短程序,减少计算与存储量。本方法已在 CJ-719 计算机上编程实算,效果良好。

在本文写作过程中丁钟琦副教授给予了许多关心与帮助,陈德初同志为本算法的机器实现做了大量工作,在此一并深致谢意。

参 考 文 献

- [1] 万哲先等,非线性移位寄存器,科学出版社,(1978),170—215.
- [2] 中国科学院计算技术研究所设计自动化组译,数字计算机设计自动化的理论和方法,科学出版社,(1978),23—117.
- [3] D. L. Dietmeyer, Logic Design of Digital Systems, Second Edition, Boston Allyn and Bacon Inc, (1978), 609—636.
- [4] 刘汉龙,逻辑关系式的直观表达——锁门图,湖南电子技术,(1980),4.

CUBIC GRAPH AND MINIMIZATION OF SWITCHING FUNCTION

LIU HANLONG

(Hunan Diesel Engine Works)

ABSTRACT

This paper presents a cubic graph by which it is unnecessary to decompose each monomial into miniterms for minimizing multivariate switching functions of single-output. The method for obtaining "non-redundant" cover and the method which is called "orded array method" for finding "minimal" cover are also presented; The minimization of switching functions with more than six variables that cannot be solved by Karnaugh graph, may be solved by these methods. Such methods can be applied to the simplification of logic circuits, digital control etc. The algorithms presented in this paper has been implemented on the computer CJ-719.