第9卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 9, No. 3
1983 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1983

动态系统预报的一种新方法

韩 志 刚

(黑龙江省应用数学研究所
黑 龙 江 大 学)

摘 要

本文给出了关于动态系统预报的一种新方法．这种方法把状态预报分成两个部分，即动态系统参数的预报和以参数的预报值为基础的状态预报．误差分析与数值实例说明该方法可以大大提高预报精度．

一、引 言

关于动态系统的状态预报，无论对系统分析还是对系统控制都有十分重要的意义．例如，一个经济系统，为了对它进行管理(或控制)，不但应该搞清这一系统的过去和目前的状态，而且还应该准确地预报其将来的情况．然而，目前通用的预报方法一般都存在一些缺点，其主要表现是预报误差较大，随着预报期间(步长)的增长，这种误差很快增大，使这些方法的应用受到了限制．发生这种现象的重要原因之一是系统的时变性与进行预报的数学模型参数非时变性之间的差异，即在预报过程中，把一个时变参数系统看成了非时变参数系统，用非时变参数模型预报时变参数系统的状态，其预报误差必然随着预报期间(步长)的增长而加大．

为克服上述缺点，本文提出了关于时变参数系统状态预报的一种新方法，称之为多层递阶预报方法．这种方法的基本思想是把时变系统的状态预报分离成为对时变参数的预报和在此基础上对系统状态的预报两部分．对时变参数的预报导致预报误差的减小．这种方法已应用于解决不同领域的预报问题．例如，对油田的产油量和产水量进行了向前六年的预报，其预报误差缩小为原来的 1/10 到 1/5．对轻工产品的产量和产值预报的相对误差为 4% 左右，对市场销售量预报的相对误差为 10% 左右．应用这种方法对某地区的某些气象要素进行向前三年的预报，也获得了很理想的结果，还对某地区的工业总产值、农业总产值、主要农作物的单位面积产量、农业人口的人均收入等进行了长期预报，都得到了较好的结果．

二、时变参数的预报和多层递阶预报方法

设所考虑的系统的数学模型是

本文曾于 1982 年 5 月在中国自动化学会控制理论及其应用会议上宣读，修改稿于 1982 年 7 月 9 日收到．

$$\boldsymbol{y}(k)=f[Y_{k-1},U_k,\boldsymbol{\theta},k]+\boldsymbol{v}(k). \tag{1}$$

其中 $Y_{k-1}=\{\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{y}(1),\cdots,\boldsymbol{y}(k-1)\}$, $U_k=\{\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(k)\}$, $\boldsymbol{y}(k)$ 是 n 维的输出, $\boldsymbol{u}(k)$ 是 p 维的输入, $\boldsymbol{\theta}$ 是 m 维的参量, $\boldsymbol{v}(k)$ 是 n 维的随机噪声, k 是离散的流动时间.

根据文献 [1] 的递推算法可导出关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的跟踪公式如下:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\delta A(k)^{-1}\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\{y(k)\\-f[Y_{k-1},U_k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1),k]\}.\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的第 k 次估值,而

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}f[Y_{k-1},U_k,\boldsymbol{\theta},k]_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)},$$

$$A(k)=B_k+\frac{1}{a_{r_k}}\phi_k(B_k),$$

$$B_k=\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]^T.$$

$\phi_k(\lambda)$ 和 a_{r_k} 通过下述步骤确定:

设 $\operatorname{rank}B_k=r_k$,用 $\varphi_k(\lambda)$ 表示 B_k 的特征多项式, 则有 $\phi_k(\lambda)=\varphi_k(\lambda)/(\lambda^{m-r_k})$, $a_{r_k}=\phi_k(0)$.

文献 [2] 指出,在系统 (1) 为单输出时,跟踪公式 (2) 为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\frac{\delta}{\|\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\|^2}\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\{y(k)\\-f[Y(k-1),U_k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1),k]\}.\end{aligned} \tag{3}$$

δ 为适当选取的正数. 当系统的模型为下述形式时

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}(k)^T\boldsymbol{\theta}+v(k),$$

则公式 (3) 变成了

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\frac{\delta}{\|\varphi(k)\|^2}\boldsymbol{\varphi}(k)\{y(k)-\boldsymbol{\varphi}(k)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\}. \tag{4}$$

可以证明, 一般条件下, 在寻求参数跟踪估值的过程中, n 输出系统总可以化为在一定意义下等效的 n 个单输出系统. 所以,参数跟踪公式可以采用 (3) 或 (4), 跟踪公式中的 δ 满足 $0<\delta<A$. A 是适当的常数.

设应用前述参数跟踪公式得到的参数跟踪估值序列是:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(1)=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(1)\\\hat{\theta}_2(0)\\\vdots\\\hat{\theta}_m(1)\end{pmatrix},\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(2)=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(2)\\\hat{\theta}_2(2)\\\vdots\\\hat{\theta}_m(2)\end{pmatrix},\ \cdots\cdots,\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(N)=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(N)\\\hat{\theta}_2(N)\\\vdots\\\hat{\theta}_m(N)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

其中 N 表示现在时刻. 以下分两种情形讨论时变参数的预报问题.

1. 线性情形

以序列 (5) 为依据, 对时变参数进行预报的方法可分为两个途径: 一是按分量处理的途径,此时考虑 m 个序列 $\hat{\theta}_i(1),\hat{\theta}_i(2),\cdots\cdots,\hat{\theta}_i(N)$, $i=1,2,\cdots,m$; 二是对序列 (5) 按整体处理的途径.

对于线性的情形，经常要用到的是 AR 模型．即有

$$\hat{\theta}_i(k) = a_1(i)\hat{\theta}_i(k-1) + a_2(i)\hat{\theta}_i(k-2) + \cdots\cdots + a_{p_i}(i)\hat{\theta}_i(k-p_i) + e_i(k), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{6}$$

或者

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = A_1\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + A_2\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-2) + \cdots\cdots + A_p\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-p) + \boldsymbol{e}(k). \tag{7}$$

其中 $a_j(i)$ 是数，A_j 是矩阵．式 (6) 或 (7) 的阶数都可用 F-检验法或 Akaike 准则来确定．如果置

$$\boldsymbol{a}(i) = \begin{pmatrix} a_1(i) \\ a_2(i) \\ \vdots \\ a_{p_i}(i) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(i, k) = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_i(k-1) \\ \hat{\theta}_i(k-2) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_i(k-p_i) \end{pmatrix},$$

则 (6) 式可化成

$$\hat{\theta}_i(k) = \boldsymbol{\varphi}(i, k)^T\boldsymbol{a}(i) + e_i(k), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m. \tag{8}$$

不难看出，系统 (7) 也可以分离成为 m 个形如 (8) 式的系统，所以仅需考虑 (8) 式．于是关于参数 $\boldsymbol{a}(i)$ 的跟踪估值可由下式计算：

$$\hat{\boldsymbol{a}}(i, k) = \hat{\boldsymbol{a}}(i, k-1) + \frac{\delta}{\|\boldsymbol{\varphi}(i,k)\|^2}\boldsymbol{\varphi}(i,k)\{\hat{\theta}_i(k) - \boldsymbol{\varphi}(i,k)^T\hat{\boldsymbol{a}}(i,k-1)\}.$$

应用数理统计的假设检验法可判断 $\{\hat{\boldsymbol{a}}(i, k)\}$ 是否为非时变的．

1) $\hat{\boldsymbol{a}}(i, k)$ 为非时变的情形．设 $\boldsymbol{a}^*(i)$ 是它的估值．如果假定 $e_i(k)$ 与 $\boldsymbol{\varphi}(i, k)$ 独立，以模型 (6) 为例，其向前一步的预报公式是

$$\hat{\theta}_i^*(N+1) = \boldsymbol{\varphi}(i, N+1)^T\boldsymbol{a}^*(i) = a_1^* \cdot (i)\hat{\theta}_i(N) + a_2^*(i)\hat{\theta}_i(N-1)\cdots + a_{p_i}^*(i)\hat{\theta}_i(N-p_i+1);$$

向前两步的预报公式是

$$\hat{\theta}_i^*(N+2) = a_1^*(i)\hat{\theta}_i^*(N+1) + a_2^*(i)\hat{\theta}_i(N) + \cdots\cdots + a_{p_i}^*(i)\hat{\theta}_i(N-p_i+2).$$

一般可以得出向前 h 步的预报公式

$$\hat{\theta}_i^*(N+h) = a_1^*(i)\hat{\theta}_i^*(N+h-1) + \cdots + a_{h-1}^*(i)\hat{\theta}_i^*(N+1) + a_h^*(i)\hat{\theta}_i(N) + \cdots + a_{p_i}^*(i)\hat{\theta}_i(N-p_i+h), \text{ 当 } h \leqslant p_i.$$

$$\hat{\theta}_i^*(N+h) = a_1^*(i)\hat{\theta}_i^*(N+h-1) + a_2^*(i)\hat{\theta}_i^*(N+h-2) + \cdots + a_{p_i}^*(i)\hat{\theta}_i^*(N-p_i+h), \text{ 当 } h > p_i.$$

2) $\hat{\boldsymbol{a}}(i, k)$ 为时变的情形．此时可重复对 $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)\}$ 所进行的手续．如果这种手续重复进行 r 次，所得的参数估值已为非时变的，则称原时变参数序列 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$ 为 r 层 AR 时变参数序列．在此基础上可以逐层建立预报公式，进行分层预报，最终得出关于 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$ 的预报值：

$$\hat{\theta}_i^*(N+1), \hat{\theta}_i^*(N+2), \cdots, \hat{\theta}_i^*(N+h), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

2. 非线性情形

如果时变参数序列 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$ 的AR层数 r 过大，则 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$ 的数学模型可改用其它的非线性形式．一般可采用如下的预报误差模型：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)=G[\Theta_k,\boldsymbol{a},k]+\boldsymbol{e}(k). \tag{9}$$

其中 $\Theta_k=\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(0),\hat{\boldsymbol{\theta}}(1),\cdots,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)\}$; $\boldsymbol{a}$ 是待定的参量; $\boldsymbol{e}(k)$ 是 m 维的随机噪声. 不难证明, 在适当的条件下,可以把 (9) 式分解成 m 个单输出系统,每个单输出系统的未知参量都可以用跟踪公式 (3) 来确定,并可判定这些参数是否为非时变的.

如果 $\boldsymbol{a}$ 是非时变的, $\hat{\boldsymbol{a}}$ 表示它的估值,则关于时变参数 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的向前一步预报公式是

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1)=G[\Theta_N,\boldsymbol{a},N].$$

令

$$\Theta^*_{N+1}=\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(0),\cdots,\hat{\boldsymbol{\theta}}(N),\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1)\},$$

则向前两步的预报公式是

$$\boldsymbol{\theta}^*(N+2)=G[\Theta^*_{N+1},\boldsymbol{a},N+1].$$

可得出向前 h 步的预报公式

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)=G[\Theta^*_{N+h-1},\boldsymbol{a},N+h-1].$$

其中 $\Theta^*_{N+h-1}=\{\hat{\boldsymbol{\theta}}(0),\cdots,\hat{\boldsymbol{\theta}}(N),\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1),\cdots,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h-1)\}$.

如果 $\boldsymbol{a}$ 是时变的,则应进一步建立 $\boldsymbol{a}(k)$ 所满足的数学模型. 如果这个模型的未知参数仍为时变的, 则再建立这些参数所满足的数学模型, 直至参数非时变时为止. 然后依次寻求各层参数的预报估值,直至得出 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的预报估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1),\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+2),\cdots,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$.

最后,用参数的预报值对输出量 $y(k)$ 进行预报,可导出如下的逐步预报公式:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(N+1)=f[Y_N,U^*_{N+1},\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1),N+1].$$

其中 $Y_N=\{\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{y}(1),\cdots,\boldsymbol{y}(N)\}$, $U^*_{N+1}=\{\boldsymbol{u}(0),\cdots,\boldsymbol{u}(N),\hat{\boldsymbol{u}}(N+1)\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}(N+1)$ 表示预计的输入值.

$$\hat{\boldsymbol{y}}(N+2)=f[Y^*_{N+1},U^*_{N+2},\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+2),N+2].$$

其中 $Y^*_{N+1}=\{\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{y}(1),\cdots,\boldsymbol{y}(N),\hat{\boldsymbol{y}}(N+1)\}$, $U^*_{N+2}=\{\boldsymbol{u}(0),\cdots,\boldsymbol{u}(N),\hat{\boldsymbol{u}}(N+1),\hat{\boldsymbol{u}}(N+2)\}$.

向前 h 步的预报公式是

$$\hat{\boldsymbol{y}}(N+h)=f[Y^*_{N+h-1},U^*_{N+h},\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h),N+h].$$

其中 $Y^*_{N+h-1}=\{\boldsymbol{y}(0),\cdots\boldsymbol{y}(N),\hat{\boldsymbol{y}}(N+1),\cdots,\hat{\boldsymbol{y}}(N+h-1)\}$, $U^*_{N+h}=\{\boldsymbol{u}(0),\cdots,\boldsymbol{u}(N),\hat{\boldsymbol{u}}(N+1),\cdots,\hat{\boldsymbol{u}}(N+h)\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}(N+i)$ 表示向前 i 步的预计的输入, $i=1,2,\cdots,h$.

三、预报结果的误差分析

1. 线性情形

考虑系统

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}(k)^T\boldsymbol{\theta}(k)+e(k),$$

其中 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 是 m 维时变参数, $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 是 m 维向量值函数, 依赖于 k 时刻及其以前的输入和 $k-1$ 时刻及其以前的输出. 根据前面的讨论, 不妨假设这个系统是单输出的. 所要估计的预报误差是

$$\varepsilon(N+h,\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h))=y(N+h)-\hat{y}(N+h).$$

其中 h 是预报的步长．以 AR 模型为例：

$$y(k)+a_1(k)y(k-1)+\cdots+a_m(k)y(k-m)=e(k).$$

此时有

$$\boldsymbol{\varphi}(k)=[-y(k-1),\cdots,-y(k-m)]^T,$$
$$\boldsymbol{\theta}(k)=[a_1(k),\cdots,a_m(k)]^T.$$

向前一步的预报公式是

$$\hat{y}(N+1)=\boldsymbol{\varphi}(N+1)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+1),$$
$$\boldsymbol{\varphi}(N+1)=[-y(N),-y(N-1),\cdots,-y(N+1-m)]^T.$$

向前两步的预报公式是

$$\hat{y}(N+2)=\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+2)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+2),$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+2)=[-\hat{y}(N+1),-y(N),\cdots,-y(N+2-m)]^T.$$

向前 h 步的预报公式是

$$\hat{y}(N+h)=\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h),$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)=[-\hat{y}(N+h-1),-\hat{y}(N+h-2),\cdots]^T.$$

不难得出

$$\|\boldsymbol{\varphi}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)\|\leqslant\sqrt{m\wedge(h-1)}$$
$$\times\max_{1\vee(h-m)\leqslant i\leqslant h-1}\{|y(N+i)-\hat{y}(N+i)|\}\ \text{a.s.}$$

由于预报误差是

$$\varepsilon(N+h;\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h))=\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\boldsymbol{\theta}(N+h)$$
$$-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)+\boldsymbol{e}(N+h),$$

噪声 $\boldsymbol{e}(N+h)$ 是不可避免的，所以误差的可变部分是 $\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\boldsymbol{\theta}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$．这时有

$$|\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\boldsymbol{\theta}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)|$$
$$=|\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\boldsymbol{\theta}(N+h)-\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)+\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$$
$$-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)|$$
$$\leqslant|\boldsymbol{\varphi}(N+h)^T\tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h)|+|(\boldsymbol{\varphi}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(N+h))^T\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)|$$
$$\leqslant\|\boldsymbol{\varphi}(N+h)\|\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h)\|+\|\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)\|\sqrt{m\Lambda(h-1)}$$
$$\times\max_{1\vee(h-m)\leqslant i\leqslant h-1}\{|y(N+i)-\hat{y}(N+i)|\}\ \text{a.s.}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h)=\boldsymbol{\theta}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$.

2. 非线性情形

不妨考虑单输出系统

$$y(k)=f[Y_{k-1},U_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]+e(k).$$

在以下的讨论中，记号 Y_{k-1}，Y^*_{k-1}，U^*_k 既表示相应的集合，又表示向量．所以 $\nabla_{Y_{k-1}}f[Y_{k-1},\cdots]$ 有意义．在预计的输入为已知的情况下，有

$$\hat{y}(N+h)=f[Y^*_{N+h-1},U^*_{u+h},\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h),N+h],$$

$$y(N+h)=f[Y_{N+h-1}, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]+e(N+h).$$

如果相应的梯度都存在,则预报误差的可变部分满足

$$\begin{aligned}
&f[Y_{N+h-1}, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]-f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h), N+h] \\
&\quad=f[Y_{N+h-1}, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]-f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), \\
&\quad N+h]+f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]-f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \\
&\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h), N+h] \\
&\quad=\nabla_{Y_{N+h-1}^*} f[\overline{Y_{N+h-1}^*}, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]^T(Y_{N+h-1}-Y_{N+h-1}^*) \\
&\quad\quad+\nabla_{\hat{\theta}^*(N+h)} f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \overline{\boldsymbol{\theta}^*(N+h)}, N+h]^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h).
\end{aligned}$$

其中 $\overline{Y_{N+h-1}^*}$ 表示 Y_{N+h-1}^* 与 Y_{N+h-1} 的连线上的一点; $\overline{\boldsymbol{\theta}^*(N+h)}$ 表示 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$ 与 $\boldsymbol{\theta}(N+h)$ 的连线上的一点;而 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h)=\boldsymbol{\theta}(N+h)-\hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h)$. 如果有常数 C,使得

$$\|\nabla_{Y^*} f[Y^*, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]\|<C, \quad \text{a.s.}$$

$$\|\nabla_{\theta} f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}, N+h]\|<C. \quad \text{a.s.}$$

则有

$$\begin{aligned}
&|f[Y_{N+h-1}, U_{N+h}^*, \boldsymbol{\theta}(N+h), N+h]-f[Y_{N+h-1}^*, U_{N+h}^*, \hat{\boldsymbol{\theta}}^*(N+h), N+h]| \\
&\quad \leqslant hC \max_{1 \leqslant i \leqslant h-1}|y(N+i)-\hat{y}(N+i)|+C\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}(N+h)\|. \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

上述分析表明,向前 h 步的预报误差,依赖于时变参数的预报误差 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(N+h)$ 和以前各步的预报误差 $y(N+i)-\hat{y}(N+i)$, $i=1,2,\cdots\cdots,h-1$. 由于对参量 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 进行了预报,所以预报精度能有较大的提高.

四、计算实例

考虑时变参数系统

$$y(k)=\theta_1[y(k-1)u(k-1)]^{\theta_2}+e(k)$$

的预报问题. $e(k)$ 是零均值的白噪声; $\theta=(\theta_1, \theta_2)^T$ 是时变参数. 得到的观测数据见表 1.

表 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$u(k)$	1	2	2.2	2.4	2.2	2.6	2.5	2	1.5	1.3	1	0.8	0.9	0.5	1.1
$y(k)$	2	2.13	1.21	1.28	1.44	1.51	1.69	1.84	1.96	1.92	1.96	1.86	1.76	1.92	1.58
k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$u(k)$	0.7	0.8	0.6	0.5	0.9	0.4	0.54	0.7	0.4	0.6	0.5	0.5	0.4	0.6	
$y(k)$	2.15	2.08	2.23	2.11	1.86	2.45	1.82	1.85	2.36	1.92	2.29	2.34	2.41	2.10	2.7

现考虑依据前面 20 组数据对 $y(20+i)$, $i=1,2,\cdots\cdots,10$ 的预报问题. 不难看出,参数跟踪公式是

$$\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(k)\\ \hat{\theta}_2(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(k-1)\\ \hat{\theta}_2(k-1)\end{pmatrix}+\frac{\delta}{\alpha_{k-1}^2+\beta_{k-1}^2}\begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\\ \beta_{k-1}\end{pmatrix}\{y(k)-\hat{\theta}_1(k-1)\times[y(k-1)u(k-1)]^{\hat{\theta}_2(k-1)}\}.$$

其中 $\alpha_{k-1}=[y(k-1)u(k-1)]^{\hat{\theta}_2(k-1)}$,

$$\beta_{k-1}=\hat{\theta}_1(k-1)[y(k-1)u(k-1)]^{\hat{\theta}_2(k-1)}\ln[y(k-1)u(k-1)].$$

取初值 $\hat{\theta}_1(1)=1.04$，$\hat{\theta}_2(1)=0.03$，得出前 20 组参数的估值如表 2.

表 2

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\hat{\theta}_1(k)$	1.04	1.08	1.11	1.13	1.17	1.20	1.23	1.25	1.28	1.31	1.35	1.38	1.45	1.50	1.59	1.61	1.66	1.67	1.76	1.80
$\hat{\theta}_2(k)$	0.03	0.06	0.09	0.11	0.16	0.19	0.23	0.26	0.31	0.35	0.39	0.42	0.46	0.50	0.49	0.51	0.54	0.55	0.59	0.59

从上述估值序列，可以看出 $\hat{\theta}_1(k)$ 和 $\hat{\theta}_2(k)$ 分别满足 $\hat{\theta}_1(k+1)=\hat{\theta}_1(k)+a_1+e_1(k)$ 和 $\hat{\theta}_2(k+1)=\hat{\theta}_2(k)+a_2+e_2(k)$. 这里 a_1 和 a_2 为非时变的常数；$e_1(k)$ 和 $e_2(k)$ 为零均值随机噪声. a_1 和 a_2 的估值分别是

$$a_1=\frac{1}{19}\sum_{k=2}^{20}\{\hat{\theta}_1(k)-\hat{\theta}_1(k-1)\}=0.4,$$

$$a_2=\frac{1}{19}\sum_{k=2}^{20}\{\hat{\theta}_2(k)-\hat{\theta}_2(k-1)\}=0.3.$$

于是得出时变参数 $\theta_i(k)(i=1,2)$ 向前 h 步的预报公式为

$$\hat{\theta}_i^*(20+h)=\hat{\theta}_i(20)+ha_i,\quad i=1,2.$$

$y(N+h)$ 的预报估值公式为

$$\hat{y}(N+h)=\hat{\theta}_1^*(N+h)[\hat{y}(N+h-1)\hat{u}(u+h-1)]^{\hat{\theta}_2^*(N+h)}.$$

应用这个公式得出关于 $y(20+h)$，$h=1,2,\cdots\cdots,10$ 的预报值及其误差如表 3.

表 3

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$y(k)$	2.45	1.82	1.85	2.36	1.92	2.29	2.34	2.41	2.10	2.70
$\hat{y}(k)$	2.44	1.81	1.89	2.39	1.93	2.23	2.31	2.39	2.08	2.68
δ	0.01	0.01	−0.04	−0.03	−0.01	0.06	0.03	0.02	0.02	0.02
Δ	0.4%	0.5%	2.2%	1.3%	0.5%	2.6%	1.3%	0.8%	1%	0.7%

其中 $y(k)$ 是观测值；$\hat{y}(k)$ 是预报值. $\delta=y(k)-\hat{y}(k)$，$\Delta=|\delta/y|$ 为相对误差.

如果用一般自适应预报方法，则预报公式为

$$\hat{y}(20+1)=1.8[y(20)u(20)]^{0.59},$$

$$\hat{y}(20+h)=1.8[\hat{y}(20+h-1)\hat{u}(20+h-1)]^{0.59},\qquad h\geqslant 2.$$

用这种方法得到的预报值及其误差如表 4.

由上述计算结果可见，向前第十步预报的相对误差，旧方法为 40.7%，新方法只有

表 4

K	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\hat{y}(k)$	2.44	1.77	1.69	1.98	1.57	1.74	1.66	1.61	1.39	1.62
δ	0.01	0.05	0.16	0.38	0.35	0.55	0.68	0.8	0.71	1.1
Δ	0.4%	2.7%	8.6%	16.1%	18.2%	24%	29.1%	33.2%	33.8%	40.7%

0.7%. 向前十步预报的平均相对误差，旧方法为 20.68%，而新方法却为 1.13%，可见，新方法比旧方法优越得多.

参 考 文 献

[1] Z. G. Han, A Recursive Estimates Method of the Nonlinear Stochastic System and Its Convergence Analysis. Identification and System Parameter Estimation. Sixth IFAC Symposium, Virginia, U. S. A., 1982.

[2] 姜继忱，关于一类递推算法的进一步探讨，黑龙江大学自然科学学报，1982，第一期，20—29.

A NEW METHOD OF DYNAMIC SYSTEM PREDICTION

HAN ZHIGANG

(*Heilongjiang Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University*)

ABSTRACT

In this paper, we obtain a new method of dynamic system prediction. The predictor is divided into two parts, the prediction of time-varying parameters and the prediction of state or output of system. For the estimation of time-varying parameter $\theta(k)$, we applied "extension recursive gradient method". This method can be applied to both linear and non-linear cases.

According to the estimation value sequence $\{\hat{\theta}(k)\}$, we obtain prediction estimation value $\{\hat{\theta}^*(k+h)\}$ of $\theta(k)$. From this we be get h-step ahead prediction of output $y(k)$. Computation results and error analysis are given to the effectiveness of this method.