

随机离散图象的统计模型研究

彭嘉雄 张天序
(华中工学院)

摘 要

本文根据高斯-马尔可夫过程的自相关特性和图象样本自相关序列的变化规律,提出了一个二维相关函数模型. 用此模型对一些实际图象的统计特性所作的研究,证实了本文研究结果的正确性. 文中还研究了图象相关长度的意义和确定方法.

随机图象的统计模型是统计图象处理和图象匹配的基础. 现有的图象统计模型^[1-4]较简单,但有相当大的局限性,不适用于各种不同的实际图象. 本文根据理论分析和一些图象的统计性质,提出一个比现有模型适用范围更广的新的统计模型.

一、二维相关函数的近似可分性

假定 $\{A(x, y), (x, y) \in E^2\}$ 是一个零均值各态历经的宽平稳二维随机场,其中 E^2 是欧氏平面, (x, y) 是平面上的点. 该随机场的自相关函数为

$$EA(x_1, y_1)A(x_2, y_2) = R_A(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = R_A(\tau_x, \tau_y).$$

考虑 $\{A(x, i), x \in [0, X], i \in S\}$ 为上述随机场在一个有限宽度无限长度带形域上的一次实现,其中 S 是整数集. 以单位速度作逐行扫描,则 $\{A(x, i), x \in [0, X], i \in S\}$ 变换成一维随机过程 $\{B(t), t \in (-\infty, \infty)\}$, 每扫描一行的时间是 $T = X$. 变量 t 和 τ_i 可表示为

$$\begin{cases} t = iT + \sigma, & i \in S, \sigma \in [0, T], \\ \tau_i = kT + r, & k \in S, r \in [0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

此一维过程与原随机场的关系是

$$B(t) = A(\sigma, i + 1), \quad (2)$$

$$B(t + \tau_i) = \begin{cases} A(\sigma + r, i + k + 1), & \sigma + r \leq T, \\ A(\sigma + r - T, i + k + 2), & \sigma + r > T. \end{cases} \quad (3)$$

利用(2), (3)两式,得 $\{B(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ 的自相关函数为

$$R_B(t, \tau_B) = \begin{cases} R_A(r, k), & \sigma + r \leq T, \\ R_A(r - T, k + 1), & \sigma + r > T. \end{cases} \quad (4)$$

显然, $R_B(t, \tau_B)$ 依赖于 σ, r (即 t, τ_i) 两个参数,故该过程是非平稳的. 把 σ 认为是一个取值于区间 $[0, T]$ 上的随机变量,服从均匀分布,则由(1), (4)两式可得

$$\phi_B(\tau_i) = E_i R_B(t, \tau_i) = E_\sigma R_B(iT + \sigma, iT + kT + \sigma + r). \quad (5)$$

事件 $\sigma + |r| \leq T$ 的概率为

$$q_T(\tau_i - kT) = \begin{cases} \frac{T - |\tau_i - kT|}{T}, & |\tau_i - kT| \leq T. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (6)$$

由 (4), (5), (6) 三式得

$$\phi_B(\tau_i) = E_t R_B(t, \tau_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_A(\tau_i - kT, k) q_T(\tau_i - kT), \quad (7)$$

$\phi_B(\tau_i)$ 就是 $R_B(t, \tau_i)$ 的平稳近似. 可以证明^[1]当 $T \gg 1$ 时, $\phi_B(\tau_i)$ 的功率谱密度可近似表示为

$$\Phi_B(f) \approx H(f, 0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(0, T\left(f - \frac{m}{T}\right)\right). \quad (8)$$

式中

$$H(f, u) \approx \iint_{-\infty}^{\infty} R_A(\tau_i, \theta) e^{-j2\pi(f\tau_i + u\theta)} d\tau_i d\theta. \quad (9)$$

(8) 式表示功率谱密度 $H(f, u)$ 近似具有可分离性质, 故相关函数 $R_A(\tau_i, \theta)$ 也近似具有可分离性:

$$R_A(\tau_i, \theta) = R_A(0, 0) \phi_x(\tau_i) \phi_y(\theta). \quad (10)$$

式中 $\phi_x(\tau_i)$ 和 $\phi_y(\theta)$ 分别表示沿 x 和 y 轴方向不考虑行间相关性时扫描一维信号的归一化自相关函数.

二、相关函数模型的构造

文献[2]证明了 $\phi_B(\tau_i)$ 亦可表示为

$$\phi_B(\tau_i) = \frac{T-r}{T} R_A(r, k) + \frac{r}{T} R_A(T-r, k+1). \quad (11)$$

当 $r=0$ 时, $\tau_i = kT$, 则

$$\phi_B(kT) = R_A(0, k). \quad (12)$$

由相关函数的性质有 $R_A(0, k) \geq R_A(r, k)$, 一般还有 $R_A(0, k) \geq R_A(0, k+1)$. 则由 (11), (12) 两式可知

$$\frac{\phi_B(kT+r)}{\phi_B(kT)} \leq 1, \quad \forall k, r, \quad (13)$$

故 $\phi_B(\tau_i)$ 一般具有周期性.

马尔可夫型方程已是各种连续随机过程最成功的模型^[5], 这种方程解过程的相关函数是指数型的. 因相关函数 $R_A(\tau_i, \theta)$ 一般不是 θ 的周期函数, 可用指数函数的代数和来近似 $\phi_y(\theta)$, 在离散的情况下就是

$$\phi_y(k) = \sum_{l=1}^L c_{yl} e^{-\lambda_{yl}|k|}. \quad (14)$$

式中 c_{yl} 和 λ_{yl} 是常数. 因 $\phi_B(\tau_i)$ 是周期为 T 的周期函数, 故只要研究它在一个周期

内的变化 $\phi_x(r) = R_A(r, 0)$ 即可。但在一周期内, $\phi_x(r)$ 又可能是周期为 $T_0 < T$ 的 r 的周期函数, 用指数函数的代数和与有限三角多项式的乘积来近似它, 则 $\phi_x(r)$ 为

$$\phi_x(r) = \sum_{\mu=1}^M c_{x\mu} e^{-\lambda_{x\mu}|r|} \left(\sum_{q=0}^Q c_q \cos \frac{2\pi q|r|}{T_0} + \sum_{q=1}^Q p_q \sin \frac{2\pi q|r|}{T_0} \right). \quad (15)$$

式中 $c_{x\mu}$, $\lambda_{x\mu}$, c_q 和 p_q 都是常数, c_q 满足条件

$$\sum_{q=0}^Q c_q = 1. \quad (16)$$

此外, $\phi_A(r, k)$ 往往还可能含有 τ_t 的某个缓慢下降的函数分量。作为一次近似, 用线性衰减函数 $-(c_c + c_s \tau_t)$ 来近似它。因 $R_A(r, k)$ 是 r 的偶函数, 以 (14), (15) 式代入 (10) 式, 即得规一化二维自相关函数的理论模型为

$$\begin{aligned} \phi_A(r, k) = & \sum_{\mu=1}^M c_{x\mu} e^{-\lambda_{x\mu}|r|} \left(\sum_{q=0}^Q c_q \cos \frac{2\pi q|r|}{T_0} + \sum_{q=1}^Q p_q \sin \frac{2\pi q|r|}{T_0} \right) \\ & \times \sum_{l=1}^L c_{yl} e^{-\lambda_{yl}|k|} - c_s(kT + |r|) - c_c. \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\phi_A(r, k) = R_A(r, k)/R_A(0, 0)$; c_s , c_c 是常数。 c_c 应满足

$$c_c = \left(\sum_{\mu=1}^M c_{x\mu} \right) \times \left(\sum_{l=1}^L c_{yl} \right) - 1. \quad (18)$$

三、图象相关长度

方程

$$\frac{dU(t)}{dt} + \lambda U(t) = N(t) \quad (19)$$

的解过程是一维的高斯-马尔可夫过程, 式中 $N(t)$ 是高斯白噪声, 且

$$\begin{cases} EN(t) = 0, \\ EN(t_1)N(t_2) = 2D\delta(t_2 - t_1). \end{cases} \quad (20)$$

(19) 式是一阶线性随机系统, $N(t)$ 是输入, $U(t)$ 是输出, 系统的脉冲响应函数为

$$h(t) = e^{-\lambda t}, \quad (21)$$

系统的输入、输出关系为^[6]

$$U(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)N(s)ds. \quad (22)$$

$U(t)$ 的数学期望为

$$EU(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)EN(s)ds = 0. \quad (23)$$

当 $t_1 \leq t_2$ 时有

$$\begin{aligned} U(t_1)U(t_2) &= \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1-r)N(r)dr \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2-s)N(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1-r)h(t_2-s)N(r)N(s)drds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EU(t_1)U(t_2) &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{-\lambda(t_1-r)} e^{-\lambda(t_2-s)} E[N(r)N(s)] dr ds \\ &= \frac{D}{\lambda} e^{-\lambda(t_2-t_1)}. \end{aligned}$$

当 $t_1 \geq t_2$ 时, 同理可证

$$EU(t_1)U(t_2) = \frac{D}{\lambda} e^{-\lambda(t_1-t_2)}.$$

故 $U(t)$ 具有性质

$$\begin{cases} EU(t) = 0, \\ EU(t)U(t + \tau_t) = \frac{D}{\lambda} e^{-\lambda|\tau_t|}. \end{cases} \quad (24)$$

显然, $U(t)$ 的规一化自相关函数为

$$\phi_U(\tau_t) = e^{-\lambda|\tau_t|}. \quad (25)$$

当 τ_t 从零开始增大时, $\phi_U(\tau_t)$ 从 1 开始单调减小. 当 τ_t 增大到 $5/\lambda$ 时, $\phi_U(\tau_t)$ 减小到 0.007, 即 $U(t)$ 与 $U(t + \tau_t)$ 基本上不相关了, 因 $U(t)$ 是高斯过程, 不相关就是独立. 在确定性动态系统中, 指数函数表示一阶线性系统的过渡过程, 参数 $1/\lambda$ 被定义为时间常数. 现在, 指数函数表示图象的相关函数, 故将 $1/\lambda$ 定义为图象的相关长度. 在(15)式的相关函数中, 周期项是被指数项调制的. 因为只考虑相关程度的强弱, 故只要考虑慢变的调制分量即可. 于是, 在二维可分的相关函数中, x, y 两个方向上的相关长度分别定义为

$$\begin{cases} x_{T\mu} = 1/\lambda_{x\mu}, \mu = 1, 2, \dots, M, \\ y_{Tl} = 1/\lambda_{yl}, l = 1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (26)$$

四、实 例

研究一个 $J \times I$ 随机离散图象, 任一象元的行、列号记为 (j, i) , $j \in S_j = \{0, 1, 2, \dots, J-1\}$, $i \in S_i = \{0, 1, 2, \dots, I-1\}$. 该图象表示为 $\{a(j, i), j \in S_j, i \in S_i\}$, 其中 $a(j, i)$ 是单元 (j, i) 上的平均灰度. 经逐行扫描后得到的一维随机序列记为 $\{a_n, n \in S_n\}$, 其中 $S_n = \{0, 1, 2, \dots, I \times (J-1)\}$, 变量 n 与单元 (j, i) 的关系为

$$n = iJ + j. \quad (27)$$

假定该序列是各态历经平稳过程长度为 N_s 的一次采样实现序列, 则该序列的规一化自相关序列为

$$R_a(\tau_n) = \frac{1}{N_s - \tau_n} \sum_{n=0}^{N_s - \tau_n - 1} \left(\frac{a_n - \bar{a}}{\beta} \right) \left(\frac{a_{n+\tau_n} - \bar{a}}{\beta} \right). \quad (28)$$

式中 \bar{a} 和 β^2 是序列的样本均值和方差, 且

$$N_s = I \times (J-1). \quad (29)$$

考虑到 (12), (13) 两式和相关函数的偶函数性质, 为了使 $\phi_B(kT + r)$ 的变化关于 $\phi_B(kT)$ 是对称的, 用 $j - (J-1)/2$ 代替 (17) 式中的 r . 经代换后有

$$\alpha = j - (J-1)/2, \alpha \in S_\alpha. \quad (30)$$

式中 $S_a = \{-(J-1)/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (J-1)/2\}$. 于是, 当 $M = L = Q = 1$ 时, 由 (17) 式得到采样的相关函数模型为

$$\begin{aligned} \phi_A(\alpha, k) = c_A e^{-\lambda_x |\alpha|} & \left(c_0 + c_1 \cos \frac{2\pi |\alpha|}{T_0} + p_1 \sin \frac{2\pi |\alpha|}{T_0} \right) e^{-\lambda_y |k|} \\ & - c_s (kJ + |\alpha|) - c_c. \end{aligned} \quad (31)$$

式中 $c_A = c_x c_y$, 且

$$\phi_A \left(\frac{J-1}{2}, 0 \right) = 1. \quad (32)$$

已用此模型对六幅 $I = 70$ 和 $J = 100$ 的图象作了计算. 表 1 中只列出了用试错法确定的三幅图象的模型参数, 表中 x_{TS} , y_{TS} 是由样本自相关序列求得的相关长度, 即在 x , y 的变化范围内, 当样本自相关序列从 1 下降到 e^{-1} 时的 x , y 值. 根据表中参数计算的理论相关函数与样本自相关序列的对比曲线见图 1—3, 图中实线和虚线分别表示理论相关曲线和实际的自相关序列. 这些曲线显示了满意的拟合精度, 证实了本方法的正确性和模型的精确性.

表 1 模型的参数

图象号 \ 参数	C_A	x_{TS}	y_{TS}	$\frac{1}{\lambda_x}$	$\frac{1}{\lambda_y}$	C_0	C_1	p_1	C_c	C_s	T_0
图象 1	1.00	19	8	20	13	1	0	0	0	0.00015	
图象 2	1.00	9	25	14	30	0	1	0.4	0	0.0000375	50
图象 3	1.35	10	21	16	33	1	0	0	0.35	0	

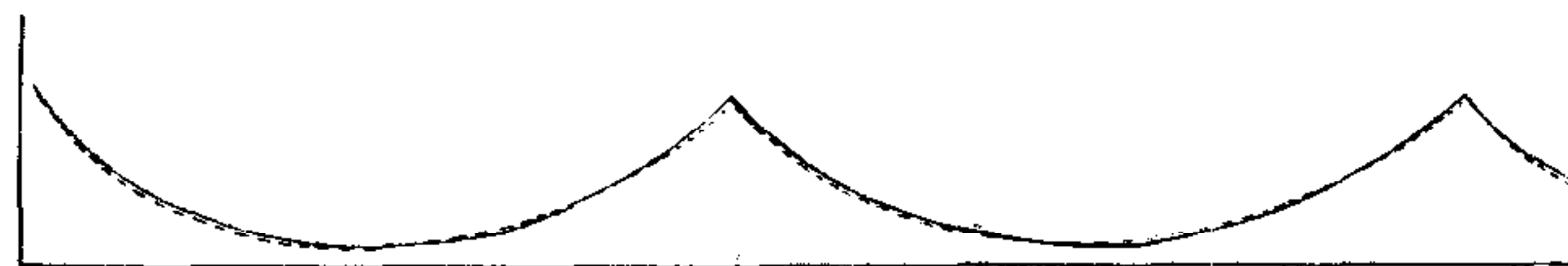


图 1 图象 1

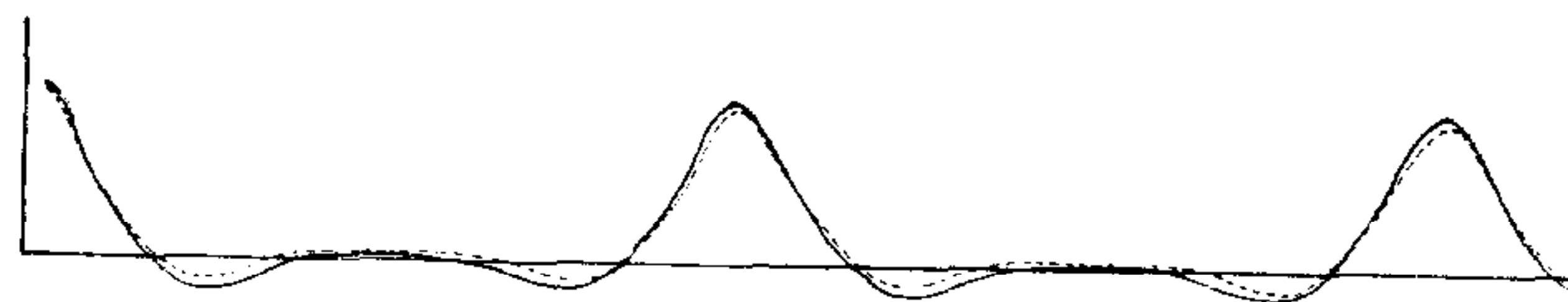


图 2 图象 2

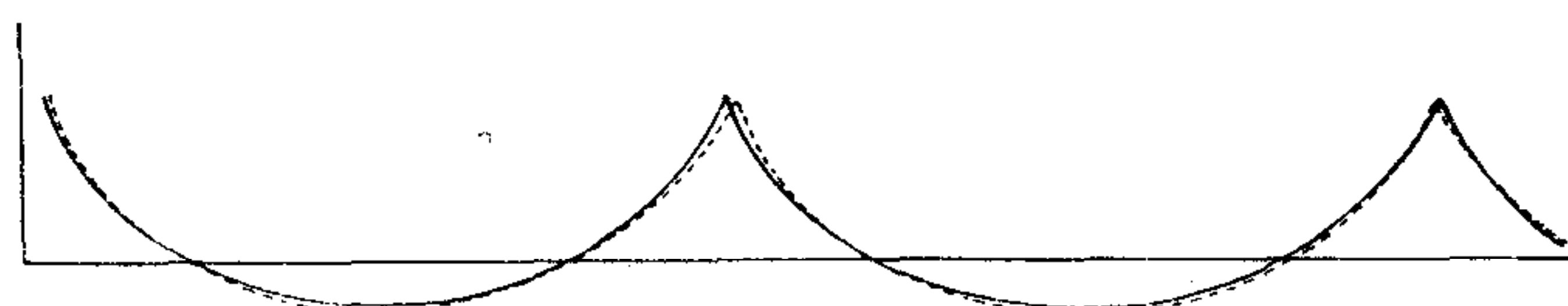


图 3 图象 3

五、结 论

应当指出,通常的二维可分的指数型图象相关函数仅是(31)式所示模型的特例,只要在(31)式中令 $c_A = c_0 = 1$ 和 $c_1 = p_1 = c_s = c_c = 0$ 就证明了这一点. 然而,通常的图象相关函数往往无法与许多实际图象的自相关序列进行拟合. 本文考虑到实际图象自相关序列的变化规律,在 $\phi_x(r)$ 中引进了快变的周期分量和在 $\phi_A(r, k)$ 中引入了慢变的线性衰减成分,大大提高了模型的拟合精度和应用价值. 模型中的图象相关长度则是象元间相关性在二维随机场中变化快慢的一种表征.

参 考 文 献

- [1] Franks L. E., A Model for the Random Video Process, *Bell Syst. Tech. J.*, 45(1966), 609—630.
- [2] Assefi T., Stochastic Processes and Estimation Theory with Applications, John Wiley & Sons (1979), 202—243.
- [3] Rosenfeld A. and Kak A. C., Digital Picture Processing, Academic Press (1976), 235—249.
- [4] Fogle D. A. and Goebel R. H., The Two-dimensional Accuracy of a One-dimensional Correlator, Proc. of 1976 IEEE Southeastern Region 3 Conf., 230—232.
- [5] Hinrichs P. R., Advanced Terrain Correlation Techniques, IEEE 1976 Position Location and Navigation Symp., 89—96.
- [6] Laning J. H. Jr. and Battin R. H., Random Processes in Automatic Control, (1956), 177—222.

THE INVESTIGATION OF STATISTICAL MODEL OF DISCRETE RANDOM IMAGES

PENG JIAXIONG ZHANG TIANXU

(Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

Based on the autocorrelation characterization of Gauss-Markov process and varying rule of sample autocorrelation sequence of the image, a two-dimensional autocorrelation function model is proposed in this paper. Using this model, the statistical characterization of several practical images has been investigated and the validity of the research results has been justified. The significance of image correlation length and its determination method is also discussed.