第 10 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 2
1984 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1984

关于非线性大系统的集结方程与稳定性

高 为 炳
(北京航空学院)

摘　　要

本文研究了非线性大系统的稳定性问题．讨论了子系统的稳定强度以及子系统间连接强度的定义，指出利用这些概念可以直接建立大系统的集结方程．文中提出了三类集结模型：线性的、定范围线性的以及非线性的集结模型．分析和例子表明这种集结方程给出的稳定性判据，是较少保守的．

一、引　　言

大系统理论已有了相当程度的发展，且在不少领域里得到应用．关于大系统稳定性问题的文献很多，如专著[1, 2]，国内文[3]中有专章．文[4]中给出了子系统稳定强度和子系统间连接强度的数学定义．本文二中改进并发展了这些定义，同时指出可用它直接建立大系统的集结方程．

设大系统方程为

$$S_i:\quad \dot{x}_i=f_{ii}(x_i,t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}h_{ij}(x_j,t),\quad x_i\in R^{n_i},\ i\in \underline{N}. \tag{1}$$

在孤立子系统

$$S_i':\quad \dot{x}_i=f_{ii}(x_i,t),\quad i\in\underline{N}, \tag{2}$$

全局渐近稳定(或按指数稳定)的假定下[2]，通常设

$$\begin{cases}\phi_{i1}(|x_i|)\leqslant v_i(x_i,t)\leqslant \phi_{i2}(|x_i|)\\ \dot{v}_i|_{S_i'}\leqslant -\phi_{i3}(|x_i|)\\ [\nabla v_i(x_i,t)]^T h_{ij}(x_j,t)\leqslant [\phi_{i3}(|x_i|)]^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\alpha_{ij}[\phi_{j3}(|x_j|)]^{\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{3}$$

这就对非线性大系统(1)加了很强的限制．除了(3)型的限制外，还有其它类型的限制，但它们实质上是类似的．

可以看出，若大系统是线性的，即 f_{ii}, h_{ij} 都是 x_i 与 x_j 的线性函数，v_i 取二次型，条件(3)总是可以实现的．其它情况，除了对于编出的解说性的例子外，一般很难满足(3)．这时不得不转而要求大系统在原点周围的一定范围内稳定[5]．　本文提出了三种集结方程：

本文于 1983 年 3 月 26 日收到．

线性集结方程、定范围线性集结方程和非线性集结方程. 任意一个非线性大系统,若不能集结成线性方程,必可集结为后二者. 本文研究了大系统的稳定性问题,并分析比较了不同集结方法,研究了在有限区域中的集结方法,以及它的几个一般性质.

二、大系统的线性集结方程

一般地设非线性大系统的方程为

$$S_i:\quad \dot{x}_i = f_{ii}(x_i, t) + h_i(x, t), \quad i \in \underline{N}. \tag{4}$$

它是由N个孤立子系统

$$S_i':\quad \dot{x}_i = f_{ii}(x_i, t), \quad i \in \underline{N}, \tag{5}$$

通过连接函数 $h_i(x, t)$ 连接起来的. $x_i \in R^{n_i}$ 为第 i 个子系统的状态向量,且

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = n,$$

x 为大系统的状态向量, $x^T = [x_1^T, \cdots, x_N^T]^T$.

关于孤立子系统有两种情况: 一是全局稳定的,一是不稳定的. 对不稳定的子系统,必须采用局部分散控制使其稳定. 这样我们将假定 S_i' 全局渐近稳定 (对定范围稳定情况,将分开研究).

采用李亚普诺夫函数作为对大系统进行集结的手段. 设对 S_i' 构造了函数 $v_i(x_i, t)$, 该函数是正定、渐减、径向无限大的,而且

$$\dot{v}_i|_{S_i'} = w_i(x_i, t)$$

是负定的.

定义 1. 孤立子系统 S_i' 的稳定强度定义为

$$\gamma_{ii} = \operatorname*{Inf}_{\substack{x_i \in R^{n_i} \\ t \in [t_0, \infty)}} \left[\frac{-w_i(x_i, t)}{2v_i(x_i, t)}\right], \quad (>0). \tag{6}$$

定义中的下确界 γ_{ii} 一般是存在的,故有

$$-\frac{1}{2} w_i(x_i, t) \geqslant \gamma_{ii} v_i(x_i, t), \quad \forall x_i \in R^{n_i}, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

关于连接函数 $h_i(x, t)$, 情况比较复杂,最简单的可能情况是

$$h_i(x, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} h_{ij}(x_j, t). \tag{7}$$

定义 2. 若

$$\max\left\{0, \operatorname*{Sup}_{\substack{x_i \in R^{n_i} \\ x_j \in R^{n_j} \\ t \in [t_0, \infty)}} \frac{(\nabla v_i)^T h_{ij}(x_j, t)}{2 v_i^{\frac{1}{2}}(x_i, t) v_j^{\frac{1}{2}}(x_j, t)}\right\} = \gamma_{ij}, \quad (\geqslant 0) \tag{8}$$

存在,则称 γ_{ij} 为 S_j' 到 S_i' 的连接强度.

若 γ_{ij} 存在,则有

$$\dot{v}_i|_{S_i} = \dot{v}_i|_{S_i'} + (\nabla v_i)^T h_i(x, t) = w_i(x_i, t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\nabla v_i)^T h_{ij}(x_j, t)$$

$$\leqslant -2\gamma_{ii} v_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \gamma_{ij} v_i^{\frac{1}{2}} v_j^{\frac{1}{2}}, \qquad i \in \underline{N}.$$

引入向量 $r = [v_1^{\frac{1}{2}}, \cdots, v_N^{\frac{1}{2}}]^T$ 作为向量李亚普诺夫函数，可将上式表示为

$$\dot{r} \leqslant \Gamma r, \ \Gamma = (\tilde{\gamma}_{ij}), \ \tilde{\gamma}_{ij} = \begin{cases} -\gamma_{ii} < 0, & (i = j), \\ \gamma_{ij} \geqslant 0, & (i \neq j). \end{cases} \tag{9}$$

(9) 式即为大系统 (4), (7) 的线性集结方程. 阵 Γ 是 Metzler 矩阵，由微分方程比较原理及 M-矩阵性质[1]知，若 Γ 满足 Hicks 条件[1]，则非线性大系统 (4), (7) 渐近稳定.

若各孤立子系统 S_i' 按指数稳定，由克拉索夫斯基定理，其充要条件为存在 $v_i(x_i, t)$ 连续可微，$v_i(0, t) = 0$，满足

$$\begin{cases} c_{i1}\|x_i\|^2 \leqslant v_i(x_i, t) \leqslant c_{i2}\|x_i\|^2, \\ \dot{v}_i(x_i, t) \leqslant -c_{i3}\|x_i\|^2, \\ \|\nabla v_i(x_i, t)\| \leqslant c_{i4}\|x_i\|, \end{cases} \qquad (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4} \text{ 均为正数}).$$

设 $\|h_{ij}(x_j, t)\| \leqslant H_{ij}\|x_j\|$，一般文献给出估值式：

$$\|(\nabla v_i)^T h_{ij}(x_j, t)\| \leqslant \|\nabla v_i\| \cdot \|h_{ij}(x_j, t)\|$$

$$\leqslant c_{i4}\|x_i\| H_{ij}\|x_j\| \leqslant \frac{c_{i4}H_{ij}}{\sqrt{c_{i1}c_{j1}}} \sqrt{v_i}\sqrt{v_j} = \bar{\gamma}_{ij}\sqrt{v_i}\sqrt{v_j}.$$

取 $\bar{\gamma}_{ij}$ 为连接强度，由于进行了多次放大，是大可能出现的保守上界，而 γ_{ij} 是上确界（定义 2).

对线性定常大系统

$$S_i: \quad \dot{x}_i = A_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_{ij}x_j, \qquad i \in \underline{N}, \tag{10}$$

设孤立子系统

$$S_i': \ \dot{x}_i = A_{ii}x_i$$

是渐近稳定的，则存在正定阵 V_i, W_i 满足李亚普诺夫方程

$$V_iA_{ii} + A_{ii}^T V_i = -W_i. \tag{11}$$

这意味着 $v_i(x_i) = x_i^T V_i x_i$ 是孤立子系统 S_i' 的李亚普诺夫函数. 由 (6) 式知

$$\gamma_{ii} = \operatorname*{Inf}_{x_i \in R^{n_i}} \frac{x_i^T W_i x_i}{2x_i^T V_i x_i}.$$

一般可以做到[4]：

$$\gamma_{ii} = \min_s \{Re[-\lambda_s(A_{ii})]\}. \tag{12}$$

式中 $\lambda_s(A_{ii})$, $s = 1, 2, \cdots, n_i$ 表示 A_{ii} 的 n_i 个特征值. 由 (8) 式

$$\gamma_{ij} = \operatorname*{Sup}_{\substack{x_i \in R^{n_i} \\ x_j \in R^{n_j}}} \left\{ \frac{x_i^T V_i A_{ij} x_j}{(x_i^T V_i x_i)^{1/2}(x_j^T V_j x_j)^{1/2}} \right\},$$

并考虑到 V_i, V_j 是正定阵,存在合同关系:

$$O_i^T V_i O_i = I_{n_i}, \quad O_j^T V_j O_j = I_{n_j}.$$

式中 O_i, O_j 是正交矩阵. 作线性变换

$$x_i = O_i \xi_i, \quad x_j = O_j \xi_j,$$

得到

$$\gamma_{ij} = \operatorname*{Sup}_{\|\xi_i\| = \|\xi_j\| = 1} J, \qquad J = \xi_i^T S_{ij} \xi_j, \ S_{ij} \triangleq O_i^T V_i A_{ij} O_j.$$

这样, 求 γ_{ij} 的问题转化为: 求 J 在条件 $\|\xi_i\| = \|\xi_j\| = 1$ 下的极大值问题. 用拉格朗日乘子法,第一步求解

$$\xi_i^T S_{ij} \xi_j + \lambda_i(\sqrt{\xi_i^T \xi_i} - 1) = \max,$$

解得

$$J_1 = (\xi_j S_{ij}^T S_{ij} \xi_j)^{1/2},$$

再求 J_1 在条件 $\|\xi_j\| = 1$ 下的极大值. 设对称阵 $S_{ij}^T S_{ij}$ 的特征值为$0 \leqslant \nu_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu_{n_j}$, 显然

$$\nu_1^{\frac{1}{2}} \leqslant J_1 \leqslant \nu_{n_j}^{\frac{1}{2}}.$$

从而可知

$$\gamma_{ij} = \nu_{n_j}^{\frac{1}{2}} = \max_k \{\lambda_k^{\frac{1}{2}}(S_{ij}^T S_{ij})\}. \tag{13}$$

作为一个与之比较的例子,考虑以下大系统.

$$S_1: \quad \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_2: \quad \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

取 $W_1 = W_2 = I_2$, 由方程 (11) 得到唯一解:

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad V_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

由 (12), (13) 式得到

$$\gamma_{11} = 1, \ \gamma_{22} = 0.1, \ \gamma_{12} = \frac{\varepsilon}{2}, \ \gamma_{21} = \frac{\sqrt{101}}{2}.$$

大系统渐近稳定的充分条件是

$$\gamma_{11}\gamma_{22} > \gamma_{12}\gamma_{21}, \quad \text{即} \ \varepsilon < \frac{0.4}{\sqrt{101}} \approx 0.04.$$

而利用通常的估值方法得

$$\gamma_{ij} = 2\lambda_M(V_i)\lambda_m^{-\frac{1}{2}}(V_i)\lambda_m^{-\frac{1}{2}}(V_j)\lambda_M^{\frac{1}{2}}(A_{ij}^T A_{ij}).$$

式中$\lambda_M(\cdot)$,$\lambda_m(\cdot)$分别表示阵的最大、最小特征值,从而可算出 $\gamma_{12} = \sqrt{2}\,\varepsilon$, $\gamma_{21} = 20$. 由稳定的充分条件得

$$\gamma_{11}\gamma_{22} > \gamma_{12}\gamma_{21}, \text{得 } \varepsilon < \frac{0.1}{20\sqrt{2}} \approx 0.0036.$$

比前面所得结果保守 11 倍.

按定义 2,连接强度 γ_{ij} 不一定存在. 因为在 $x_i \in R^{n_i}$ 整个子空间上,除线性连接函数外，定义 2 中的 Sup，一般都不存在. 这时有三种可能的解决问题的途径：1）忽略高次项,仅研究原点 $x=0$ 邻域内系统的稳定性,这是线性大系统情况；2）在原点的足够大的邻域中,研究系统的定范围稳定性问题；3）建立非线性集结方程. 下面将分别讨论后两种情况.

关于稳定强度和连接强度的定义，还可有其它形式，例如将 (6)，(8) 式分母中的 $v_i(x_i, t)$ 代以 $w_i(x_i, t)$，不过这时只能用加权李亚普诺夫函数，才能获得较少保守的稳定性判据.

三、大系统的非线性集结方程

将连接函数 $h_i(x,t)$ 按子系统状态向量 x_i 分解成相加项,再依它包含哪些子系统的状态分类：

$$\sum_{\alpha} h_{i\alpha}(x_i, x_\alpha, t), \qquad (\alpha \neq i)$$

$$\sum_{\alpha,\beta} h_{i\alpha\beta}(x_i, x_\alpha, x_\beta, t), \qquad (\alpha, \beta \neq i)$$

$$\cdots,$$

然后再按状态向量的幂次对 $h_{i\alpha}$, $h_{i\alpha\beta}$ 进行分解：

$$h_{i\alpha}(x_i, x_\alpha, t) = \sum_{l,m} h_{i\alpha}^{lm}(x_i, x_\alpha, t),$$

$$h_{i\alpha\beta}(x_i, x_\alpha, x_\beta, t) = \sum_{l,m,n} h_{i\alpha\beta}^{lmn}(x_i, x_\alpha, x_\beta, t),$$

$$\cdots\cdots.$$

其中 $l = 0, 1, 2, \cdots$表示 x_i 出现的幂次，m, n 表示 x_α, x_β 出现的幂次，α, $\beta = 1, 2, \cdots, N$.

定义 3. 若

$$\max\left\{0, \mathrm{Sup}\frac{(\nabla v_i)^T h_{i\alpha}^{lm}}{2(v_i^{\frac{1}{2}})^{1+l}(v_j^{\frac{1}{2}})^m}\right\} = \gamma_{i\alpha}^{lm}, \ (\geqslant 0),$$

$$\max\left\{0, \mathrm{Sup}\frac{(\nabla v_i)^T h_{i\alpha\beta}^{lmn}}{2(v_i^{\frac{1}{2}})^{1+l}(v_\alpha^{\frac{1}{2}})^m(v_\beta^{\frac{1}{2}})^n}\right\} = \gamma_{i\alpha\beta}^{lmn}, (\geqslant 0),$$

$$\cdots\cdots$$

存在,则称 $\gamma_{i\alpha}^{lm}$, $\gamma_{i\alpha\beta}^{lmn}, \cdots$, 为非线性连接系数,式中 Sup 是在 $x_i \in R^{n_i}$, $x_\alpha \in R^{n_\alpha}$, $\cdots$, $t \in [t_0, \infty)$ 上的上确界.

由定义,可得

$$\begin{aligned}\dot{v}_i|_{S_i} &= \dot{v}_i|_{S_i'} + (\nabla v_i)^T h_i(x,t) \\ &= w_i + (\nabla v_i)^T \sum_{\alpha} h_{i\alpha} + (\nabla v_i)^T \sum_{\alpha,\beta} h_{i\alpha\beta} + \cdots \\ &= w_i + \sum_{\alpha}\sum_{l,m} (\nabla v_i)^T h_{i\alpha}^{lm} + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{l,m,n} (\nabla v_i)^T h_{i\alpha\beta}^{lmn} + \cdots \\ &\leqslant -2\gamma_{ii}v_i + \sum_{\alpha}\sum_{l,m} 2\gamma_{i\alpha}^{lm}(v_i^{\frac{1}{2}})^{1+l}(v_\alpha^{\frac{1}{2}})^m \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{l,m,n} 2\gamma_{i\alpha\beta}^{lmn}(v_i^{\frac{1}{2}})^{1+l}(v_\alpha^{\frac{1}{2}})^m(v_\beta^{\frac{1}{2}})^n + \cdots, \quad i\in \underline{N}.\end{aligned}$$

记 $v_i^{\frac{1}{2}} = r_i$，则上式可改写为:

$$\dot{r}_i \leqslant -\gamma_{ii}r_i + \sum_{\alpha}\sum_{l,m}\gamma_{i\alpha}^{lm}r_i^l r_\alpha^m + \sum_{\alpha,\beta}\sum_{l,m,n}\gamma_{i\alpha\beta}^{lmn}r_i^l r_\alpha^m r_\beta^n + \cdots, \quad i\in\underline{N}$$

即

$$\dot{r} \leqslant \phi(r), \quad r^T \triangleq [r_1, r_2, \cdots, r_N]^T. \tag{14}$$

(14) 式即为大系统 (4) 的非线性集结方程．其线性部分即方程 (9)．

从一些实际例子来看，事实上，子系统间的非线性连接是稀疏的，很大一部分 $\gamma_{i\alpha}^{lm}$, $\gamma_{i\alpha\beta}^{lmn}$,$\cdots$都等于零,而异于零者很少．非线性集结方程的稳定性问题，即一般的稳定性问题．显然,在确定原点的稳定域时,此形式是好的．

四、有限域中的线性集结方程

设 $R_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为子系统 S_i 状态空间 R^{n_i} 中任一包含 $x_i=0$ 的有限域，定义R为 $R_1,\cdots,R_N$ 的笛卡尔积,即 $R=R_1\times R_2\times\cdots\times R_N$. 显然$R$是大系统(4)状态空间 R^n 中包含 $x=0$ 的有限域．设连接函数为

$$h_i(x,t) = h_{i1}(x_1,\cdots,t) + h_{i2}(x_2,\cdots,t) + \cdots + h_{iN}(x_N,\cdots,t), \quad i\in\underline{N}. \tag{15}$$

式中“…”表示可能出现的所有其它状态向量．

定义 4. 若

$$\max\left\{0, \operatorname*{Sup}_{x\in R, t\in[t_0,\infty)}\left[\frac{(\nabla v_i)^T h_{ij}(x_j,\cdots,t)}{2\sqrt{v_i}\sqrt{v_j}}\right]\right\} = \gamma_{ij}(\geqslant 0)$$

存在,则称 γ_{ij} 为域R内 S_j' 到 S_i' 的连接强度． 若 γ_{ij} 存在,则可用与上面完全相同的方法得到大系统 (4) 和 (15) 在有限域R内的线性集结方程,它与 (9) 式有完全相同的形式:

$$\dot{r} \leqslant \Gamma r. \tag{16}$$

若矩阵Γ满足 Hicks 条件,则大系统 (4)和(15) 在原点 $x=0$ 是 (局部) 渐近稳定的．

设大系统 (4), (15) 在 $x=0$ 时是渐近稳定的,下面找出它的渐近稳定区(简记为RAS)．这个问题[5]中有详细研究．先引入以下定义．

定义 5. 大系统 (4) 的渐近稳定区(RAS)定义为

$$R = \{x_0 | x(t,x_0,t_0)\in R, x_0\in R, t\in[t_0,\infty)\}.$$

定义 6. 设 $v_0=(v_{10},\cdots,v_{N0})^T$ 是个任意给定的N维正向量,定义

$$D_i(v_{i0}) = \{x_i | x_i \in R^{n_i},\ v_i(x_i, t) \leqslant v_{i0},\ t \in [t_0, \infty)\}, \quad i \in \underline{N}.$$

$$D(v_0) = D_1(v_{10}) \times D_2(v_{20}) \times \cdots \times D_N(v_{N0}).$$

由定义显然可知 $D(v_0)$ 是由N个孤立子系统组成的大系统 (5) 的 RAS，且当 $v_0' \leqslant v_0''$ 时，有 $D(v_0') \subset D(v_0'')$。考虑大系统(1)，(15)在有限域 $D(v_0)$ 上的线性集结方程：

$$\dot{r} \leqslant \Gamma r,\ \Gamma = (\gamma_{ij}),\ \gamma_{ii} < 0,\ \gamma_{ij} \geqslant 0 (j \neq i), \quad i, j \in \underline{N}, \tag{17}$$

可以证明$-\Gamma^{-1}$是非负矩阵[6]．同时还应注意到 γ_{ij} 依赖于向量 v_0 的取值．

定义 7. 定义

$$S(v_0) = \mathrm{span}^+(-\Gamma^{-1}) = \{-\Gamma^{-1}s | s \geqslant 0\}.$$

考虑N维向量空间 $V = \{r\}, r = (r_1, \cdots, r_N)^T$，记其第 I 象限为 V_1，显然 $S(v_0) \subset V_1$.

引理. $S(v_0)$ 具有以下性质：

1) $S(v_0'') \subset S(v_0')$，当 $v_0' \leqslant v_0''$.

2) $S(v_0) \to V_1$，当 $v_0 \to 0$.

证．1) 由定义，γ_{ii}, γ_{ij} 是在有限域 $D(v_0)$ 上的 Inf 和 Sup，故当 $v_0' \leqslant v_0''$ 时，有

$$\gamma_{ii}(v_0') = \gamma_{ii}(v_0''), \quad \gamma_{ij}(v_0') \leqslant \gamma_{ij}(v_0''),$$

$$\therefore \qquad \Gamma' \leqslant \Gamma''. \tag{18}$$

因 Γ' 和 Γ'' 是 M-矩阵，故有[6]

$$-\Gamma''^{-1} \geqslant -\Gamma'^{-1} \geqslant 0.$$

若正向量 v 满足 $v \in S(v_0'')$，则存在非负向量 s''，使$-\Gamma''^{-1}s'' = v$，即$-\Gamma''v = s'' \geqslant 0$．由 (18) 式知

$$s' \triangleq -\Gamma'v \geqslant -\Gamma''v = s'' \geqslant 0,$$

$$-\Gamma'^{-1}s' = v, \quad v \in S(v_0'),$$

$$\therefore \qquad S(v_0'') \subset S(v_0').$$

2) 是定义 4 的直接推论．因当 $v_0 \to 0$ 时，$\gamma_{ij} \to 0$，而 γ_{ii} 一般保持不变，故这时对几乎每个正向量 $v \in V_1$，均有$-\Gamma v > 0$，从而对这些 $v (\neq 0)$ 存在相应的 $s > 0$，使得

$$-\Gamma^{-1}s = v, \quad v \in S(v_0).$$

定理. 若大系统 (4)，(15) 的原点渐近稳定，则当 $v_0 \in S(v_0)$ 时，$D(v_0)$ 是该系统的 RAS，且满足上述条件的 v_0 总是存在的．

证．考虑大系统 (4)，(15) 的定范围线性集结方程 (17)

$$\dot{r} = \Gamma r,\ 即\ \dot{r}_i = \gamma_{ii} r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \gamma_{ij} r_j, \quad i \in \underline{N}.$$

当 $r_i = 0$ 且 $r_j \geqslant 0$ 时，有 $\dot{r}_i > 0$，这意味着所有轨线通过坐标平面 $r_i = 0$ 进入第 I 象限 V_1．取李亚普诺夫函数为

$$v(r) = \max_i (v_{i0}^{-1} r_i),$$

$v(r) = C (C > 0)$ 表示 V_1 中一个边界与坐标平面平行的N维立方体．当 $v_{i0}^{-1} r_i$ 达到其最大值C时，$v(r)$ 沿方程轨线的导数为

$$\dot{v}(r)=v_{i0}^{-1}\dot{r}_i=v_0^{-1}\left[\gamma_{ii}r_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\gamma_{ij}r_j\right].$$

因 $v_{j0}^{-1}r_j<C(j\neq i)$，故

$$\dot{v}(r)<v_{i0}^{-1}\left[\gamma_{ii}Cv_{i0}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\gamma_{ij}Cv_{j0}\right]=Cv_{i0}^{-1}(\Gamma v_0)_i.$$

不论 $C>0$ 为何值,只要

$$\Gamma v_0\leqslant 0, \tag{19}$$

就有 $\dot{v}(r)<0$. 而(19)式等价于

$$v_0\in S(v_0). \tag{20}$$

显然条件(19)比条件(20)更简单些，但利用条件(20)可得出以下结论：当 v_0 很大时，$S(v_0)$ 可能是空集；当取更小些的 v_0 时，仍有可能使 $v_0\notin S(v_0)$. 然而由引理知当 $v_0\to 0$ 时，$S(v_0)\to V_1$，这时 $S(v_0)$ 一定包含 v_0，故满足(20)式的 v_0 是一定存在的.

参 考 文 献

[1] Siljak D. D., Large-scale Dynamic Systems, North-Holland, 1978.
[2] Michel A. N., Miller R. K., Qualitative Analysis of Large-scale Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1977.
[3] 秦元勋、王联、王慕秋，运动稳定性理论与应用，科学出版社，北京，1981.
[4] 高为炳，大系统的多层结构、稳定性与镇定，中国科学(A 辑)，1981，第一期，81—88.
[5] Weissenberger S., Stability Regions of Large-scale Systems, *Automatica*, 9(1973). 653—663.
[6] Feildler M., Ptak V., On Matrices With Non-positive Off-diagonal Elements and Positive Principle Minors, Чехос. Math. Журнал, **12**(1962), 382—400.

ON THE AGGREGATION EQUATION AND STABILITY OF NONLINEAR LARGE SYSTEMS

Gao Weibin

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics*)

Abstract

The stability of nonlinear large systems is studied in this paper. The strength of stability of subsystems and the strength of interconnections between subsystems are defined. The aggregation equations of large systems may be obtained directly from these definitions. Three kinds of aggregative models are presented: linear, linear in finite region and nonlinear. Analysis and examples show that the stabilit criteria established by aggregation equations are less conservative.