

# 带钢轧机的厚度前馈最优控制

杨春江 杨自厚 李世卿  
(东北工学院)

## 摘 要

本文用极大值原理对文献[1]的带钢轧机厚度的前馈最优控制算式进行了推导,证明了美坂佳助所给出的前馈最优控制是近似的,讨论了这一近似的影响及其适用范围。计算机仿真结果证明,所得结论是正确的。

带钢厚度控制系统广泛地采用前馈控制。一般是将测出的来料厚差信息折算成辊缝调节量,选择合适的时间提前驱动压下机构,从而达到预控的目的。衡量前馈控制的品质通常是采用误差平方和指标。在阶跃输入厚差情况下,输出厚差的最大值为阶跃幅值的一半时,具有最小误差平方和指标。

本文按状态量和控制量的二次型指标推导了前馈最优控制。

## 一、前馈最优控制规律

轧机厚度控制系统一般由轧制力反馈和前馈控制组成,系统框图示于图1。设参数调整适当,压力环可等效为一阶惯性环节,在不考虑非线性因素的影响时,可将系统简化为图2。

根据图2可列出

$$(u - \Delta h)k_p = \Delta \dot{s}, \quad (1)$$

$$\frac{M}{M+Q} \Delta \dot{s} + \Delta h_d = \Delta h. \quad (2)$$

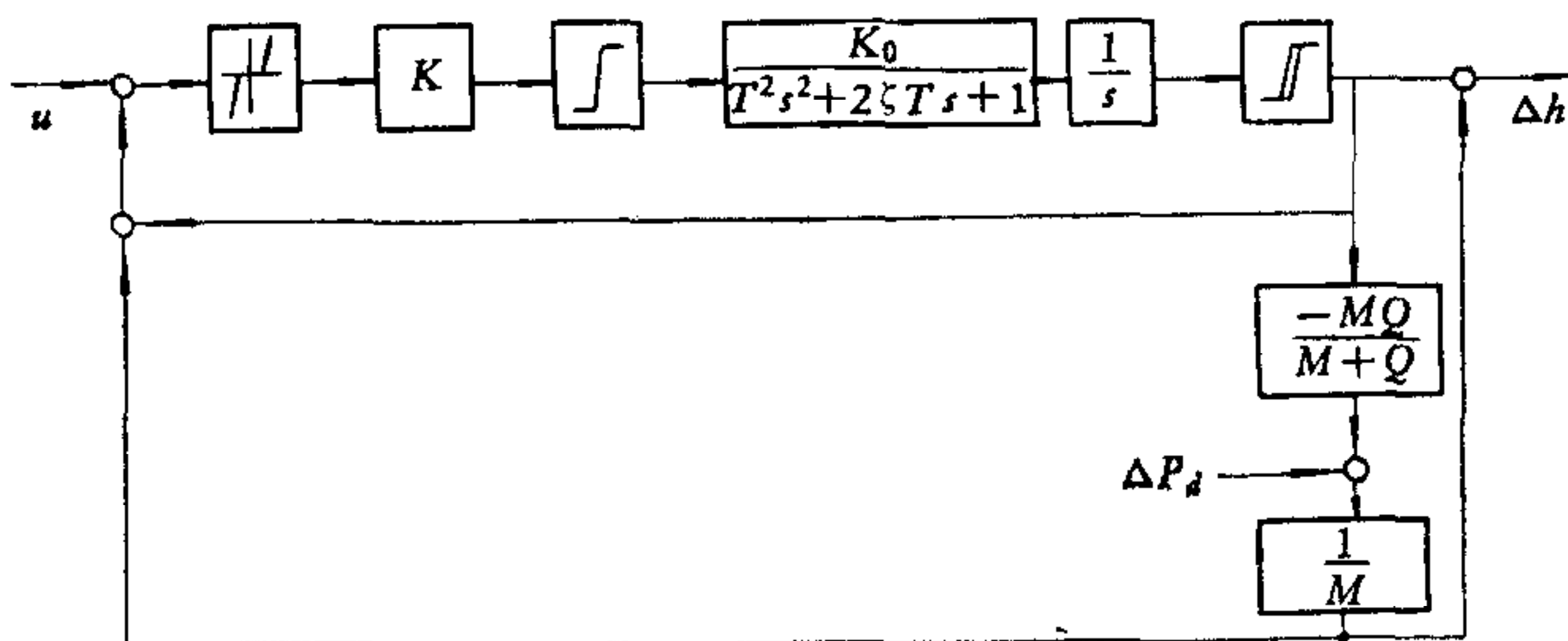


图1 厚度控制系统结构图

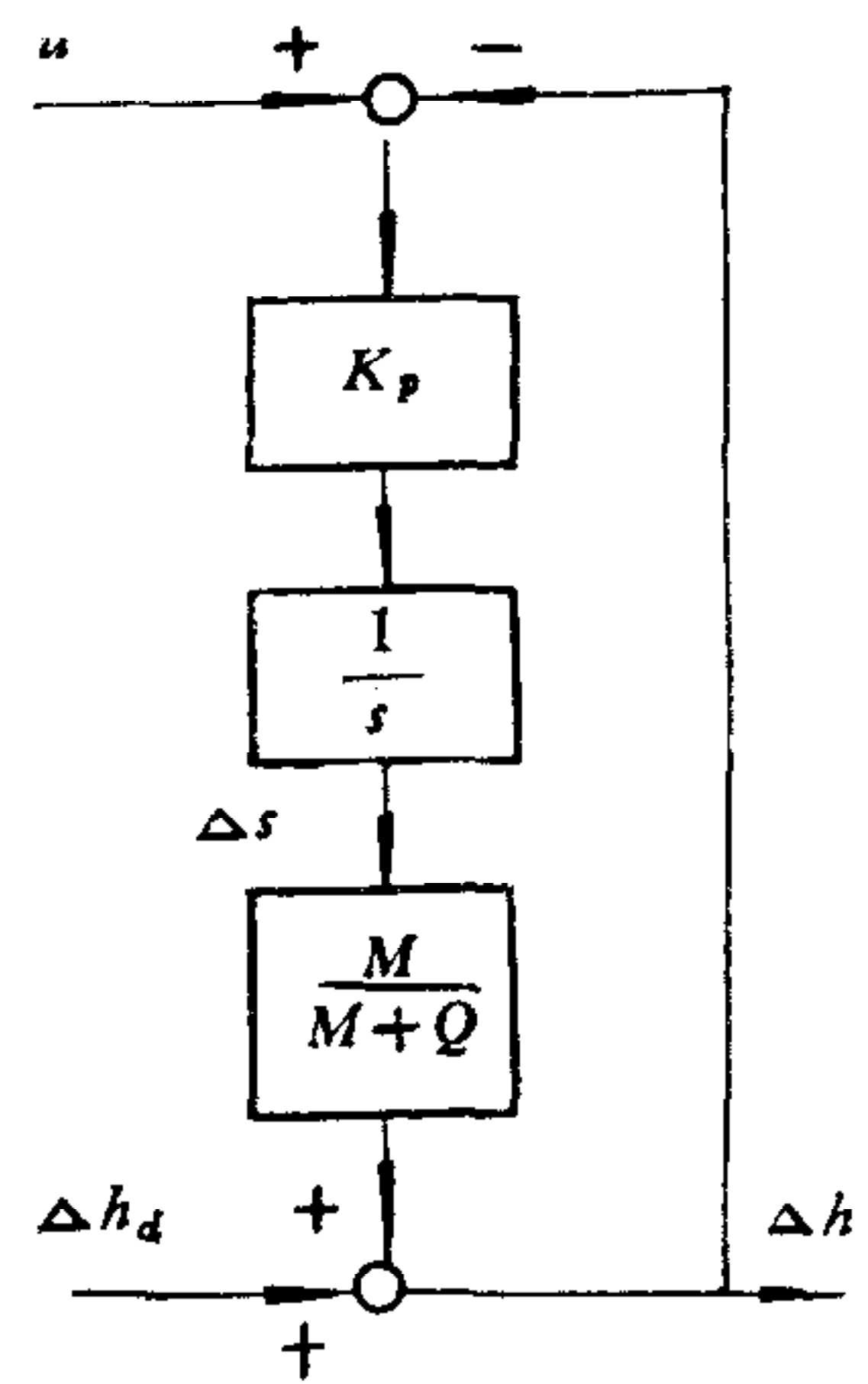


图2 等效结构图

令  $\Delta h = x$ , 上述方程可写成

$$\dot{x} = -\frac{M}{M+Q}k_p x + \frac{M}{M+Q}k_p u + \Delta \dot{h}_d.$$

式中  $\Delta \dot{h}_d$  为连续函数.

取性能指标为  $J = \int_0^{\infty} (x^2 + ru^2) d\tau$ . 写成一般形式, 得

$$\dot{x} = Ax + Bu + f,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_1 x + u^T R u) d\tau.$$

式中

$$A = -\frac{M}{M+Q}k_p, \quad B = \frac{M}{M+Q}k_p, \quad f = \Delta \dot{h}_d, \quad Q_1 = 2, \quad R = 2r.$$

用极大值原理求解上式, 哈密尔顿函数为

$$H = \lambda(Ax + Bu + f) - \frac{1}{2} (Q_1 x^2 + Ru^2). \quad (3)$$

考虑线性调节器, 由  $\partial H / \partial u = 0$  得

$$u = R^{-1} B^T \lambda. \quad (4)$$

代入后得

$$\dot{x} = Ax + BR^{-1} B^T \lambda + f, \quad (5)$$

$$\dot{\lambda} = Qx - A^T \lambda. \quad (6)$$

上面为非齐次系统, 令

$$\lambda = -K(t)x(t) + g(t),$$

代入式 (5), (6) 得

$$(\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q_1)x = \dot{g} + (A^T - KBR^{-1} B^T)g - Kf. \quad (7)$$

式 (7) 对任意  $x$  均成立, 故有

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q_1 = 0, \quad (8)$$

$$\dot{g} + (A^T - KBR^{-1} B^T)g - Kf = 0, \quad g(\infty) = 0. \quad (9)$$

$K$  是式 (8) 所示黎卡提矩阵方程的稳态解, 于是

$$K = -\frac{2(M+Q)}{Mk_p} r(1-\delta), \quad \delta = \sqrt{1 + \frac{1}{r}}. \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9), 得

$$\dot{g} + \left(-\frac{Mk_p}{M+Q}\delta\right)g + \frac{2r(M+Q)}{Mk_p}(1-\delta)f = 0, \quad (11)$$

$$g(t) = e^{\frac{Mk_p}{M+Q}\delta(t-t_0)} \left\{ -\int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q}\delta(\tau-t_0)} f d\tau + \int_{t_0}^t e^{-\frac{Mk_p}{M+Q}\delta(\tau-t_0)} f d\tau \right\} \frac{2r(M+Q)}{Mk_p}(1-\delta). \quad (12)$$

令  $\Phi(t, t_0) = e^{-\frac{Mk_p}{M+Q}\delta(t-t_0)}$  为转移矩阵, 上式可写成

$$g(t) = -\Phi(t, t_0) \int_t^{\infty} \Phi^{-1}(\tau, t_0) K f d\tau. \quad (13)$$

这是最优控制中非齐次项  $g(t)$  的表达式, 其意义如图 3 所示.

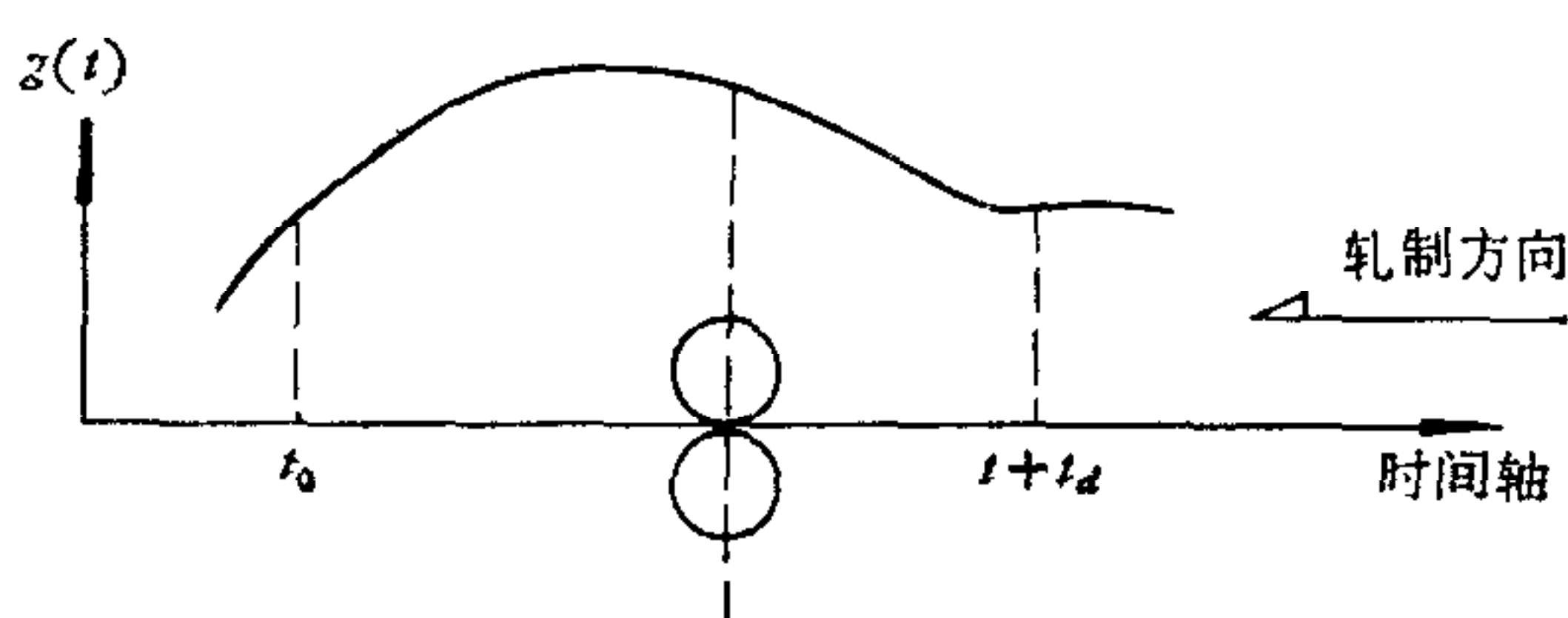


图 3  $g(t)$  的意义

若选定  $t_0 = t$ , 即以轧辊辊缝作为起始参考点, 则

$$g(t) = -\int_t^{\infty} \Phi^{-1}(\tau, t) K f d\tau. \quad (14)$$

在所讨论的问题中

$$g(t) = -\int_t^{\infty} \frac{2r}{M k_p} (M + Q)(\delta - 1) \cdot e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta(\tau-t)} \Delta \dot{h}_d d\tau, \quad (15)$$

于是得

$$u^*(t) = -\left[ \Delta h(t) + \int_t^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta(\tau-t)} \Delta \dot{h}_d(\tau) d\tau \right] (\delta - 1). \quad (16)$$

将式 (2) 代入式 (16), 并作参量变换后得

$$u^*(t) = -\left[ \Delta h_d(t) + \frac{M}{M+Q} \Delta s + \int_0^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau \right] (\delta - 1). \quad (17)$$

这就是以厚差变化率表示的前馈最优控制规律.

在上述算法中, 要求在无穷大区间测取厚差变化率信号, 这是无法实现的, 必须加以变换和简化.

1) 将厚差变化率转换为厚差信号

当  $\Delta h_d(t)$  是任意连续函数时, 可将式 (17) 中的积分项分部积分, 化简为

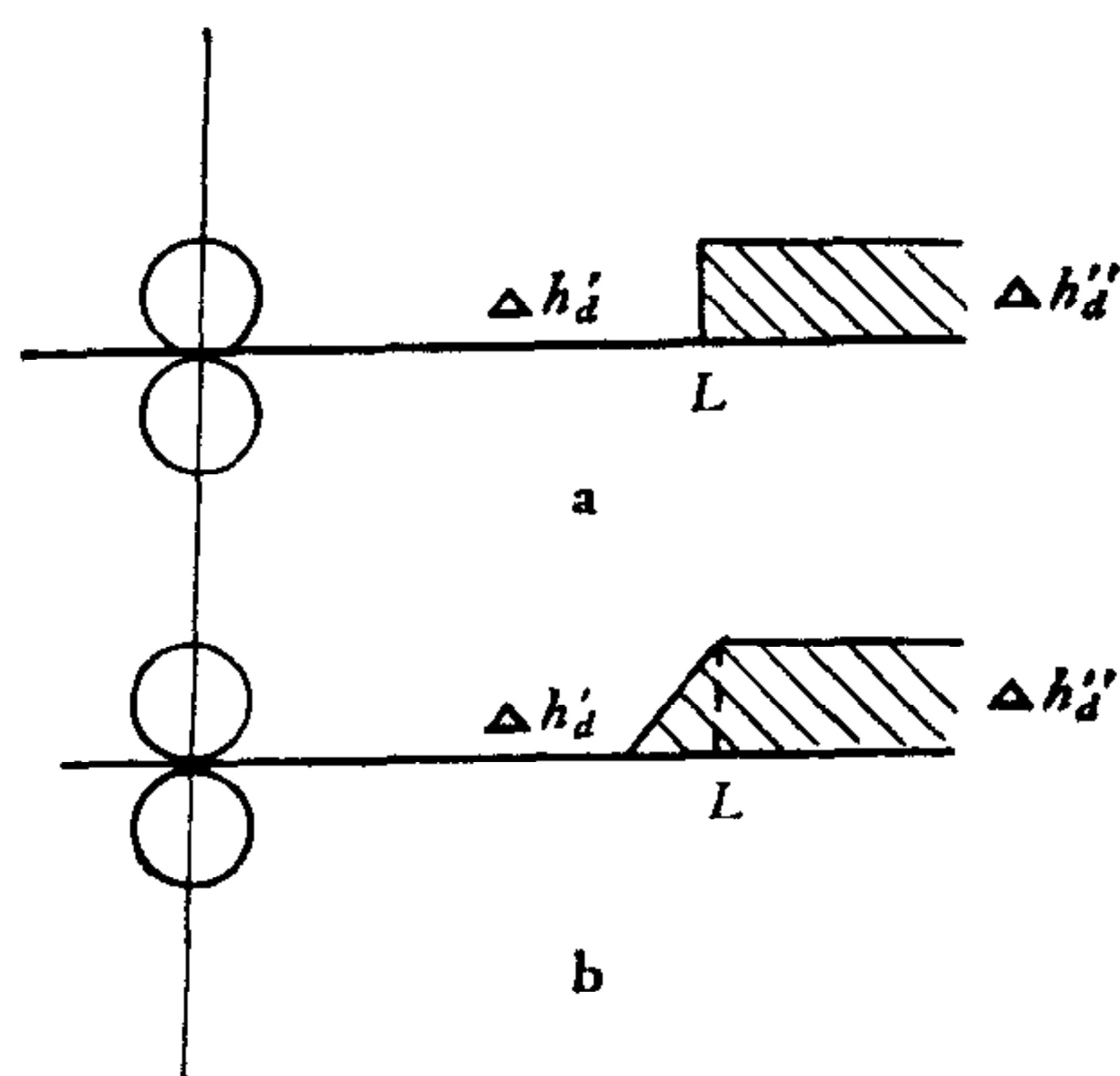
$$u^*(t) = -\left[ \frac{M}{M+Q} \Delta s + \frac{M k_p}{M+Q} \delta \int_0^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t + \tau) d\tau \right] (\delta - 1). \quad (18)$$

当  $\Delta h_d(t)$  是阶跃函数 (如图 4a 所示) 时,  $\Delta \dot{h}_d(t)$  在  $L$  出现间断点. 为解决这一问题, 用图 4b 的函数代替阶跃函数. 这样  $\Delta \dot{h}_d$  有定义, 满足极大值原理的条件. 将式 (17) 的积分项处理如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau &= \int_0^a e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau \\ &+ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{a+\Delta}^{L-\Delta} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau + \int_L^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau. \end{aligned}$$

对上式各项进行分部积分, 得

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta \dot{h}_d(t + \tau) d\tau = -\Delta h_d(t) + \int_0^{\infty} \frac{M k_p}{M+Q} \delta e^{-\frac{M k_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t + \tau) d\tau. \quad (19)$$

图4  $\Delta h_d$  的处理

$$a) \Delta h_d = \Delta h'_d, 0 < t < L, \Delta h_d = \Delta h''_d, L < t < \infty.$$

$$b) \Delta h_d = \Delta h'_d, 0 < t \leq a, \Delta h_d = \Delta h'_d + \frac{\Delta h''_d - \Delta h'_d}{L - a} (t - a), 0 < t < L, \Delta h_d = \Delta h''_d, L < t < \infty.$$

令  $a \rightarrow L$ , 因式 (19) 不显含  $a$  和  $L$ , 结果形式不变, 而  $\Delta h'_d$  信号  $e$  转换为  $\Delta h_d$  信号.

所以对任意厚差干扰, 均可得式 (18) 所示的前馈最优控制规律. 这一前馈最优控制的特点是对厚差检测信号进行加权求和, 不同时刻(或位置)的干扰信号具有不同的权.

2) 将无穷大区间信号变为有限区间信号

将式 (18) 写成下列形式

$$u^*(t) = - \left[ \frac{M}{M+Q} \Delta s + \frac{Mk_p}{M+Q} \delta \int_0^{t_d} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau + \frac{MK_p}{M+Q} \delta \int_{t_d}^{\infty} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right] (\delta - 1). \quad (20)$$

将式 (20) 的第三项忽略, 则得到

$$u^*(t) = - \left[ \frac{M}{M+Q} \Delta s + \frac{Mk_p}{M+Q} \delta \int_0^{t_d} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right] (\delta - 1). \quad (21)$$

式 (21) 就是文献 [1] 在热连轧机所采用的算法. 这种算法只是式 (18) 所示最优算法的近似算法, 由于忽略了式 (20) 的第三项, 将使系统对阶跃输入出现稳态误差.

## 二、近似前馈最优算法的误差分析

先分析式 (20) 第三项的大小.

因为  $|\Delta h_d(t)| \leq \alpha$ ,  $e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} > 0$ ,  $t_d \leq \tau < \infty$ , 故有

$$|\Delta h_d(t+\tau) e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau}| \leq \alpha e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau}.$$

可得

$$\left| \frac{MK_p}{M+Q} \delta \int_{t_d}^{\infty} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right| \leq \frac{MK_p}{M+Q} \delta \int_{t_d}^{\infty} \alpha e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} d\tau = \alpha e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta t_d}. \quad (22)$$



式(22)给出忽略式(20)中第三项所产生的控制量的误差的上限。

下面讨论近似最优算法对厚差稳态值的影响。当输入为阶跃扰动时,压下机构的稳态速度应为零,由式(1)得  $u(\infty) - \Delta h(\infty) = 0$ 。故有

$$\left[ -\frac{M}{M+Q} \Delta s(\infty) - \frac{Mk_p}{M+Q} \delta \int_0^{t_d} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right] (\delta - 1) - \Delta h(\infty) = 0, \quad (23)$$

由工艺条件,有

$$\Delta h_d(\infty) = \frac{Q}{M+Q} \Delta H, \quad \Delta h(\infty) = \frac{M}{M+Q} \Delta s(\infty) + \frac{Q}{M+Q} \Delta H, \quad (24)$$

将式(24)代入式(23),整理后得阶跃扰动时的稳态厚差:

$$\Delta h(\infty) = \frac{\delta - 1}{\delta} \cdot \frac{Q}{M+Q} \Delta H e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta t_d}. \quad (25)$$

在一个轧次中,可以认为  $M, Q, k_p$  均为常数,故稳态厚差仅与  $\delta, t_d$  有关。

当  $\delta \rightarrow 1$ , 即  $r \rightarrow \infty$  时,有  $\Delta h(\infty) = 0$ 。这相当于控制量完全受限情况,  $u = 0$ , 系统成为一个单独的压力环系统。

当  $\delta \rightarrow \infty$ , 即  $r \rightarrow 0$  时,有  $\Delta h(\infty) = 0$ 。这是由于舍去部分的权  $e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau}$  极小,系统近似于最优控制,因而阶跃响应是无差的。

一般情况下,不同的  $\delta$  将给出不同稳态误差。图5给出  $\frac{Mk_p}{M+Q} = 5$  时以  $t_d$  为参变量的稳态厚差与  $\delta$  的关系。

由式(25)对  $\delta$  求导,可以求得最大稳态厚差

$$\left( \Delta h(\infty) / \frac{Q}{M+Q} \Delta H \right)_{\max} = \frac{\delta_{\max} - 1}{\delta_{\max}} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta_{\max} t_d},$$

式中

$$\delta_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 / \frac{M}{M+Q} k_p t_d}}{2}.$$

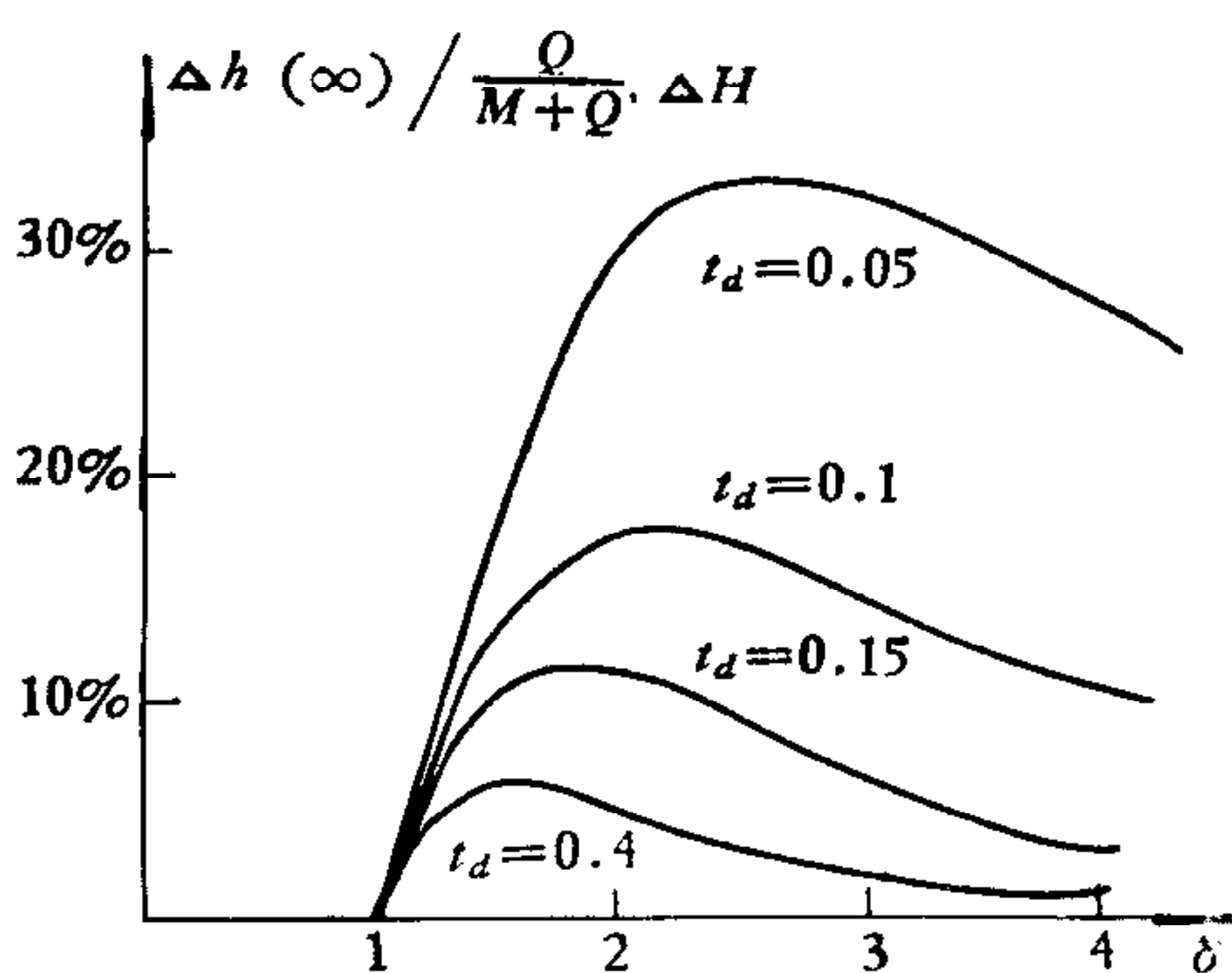


图5 稳态误差与  $\delta$  的关系

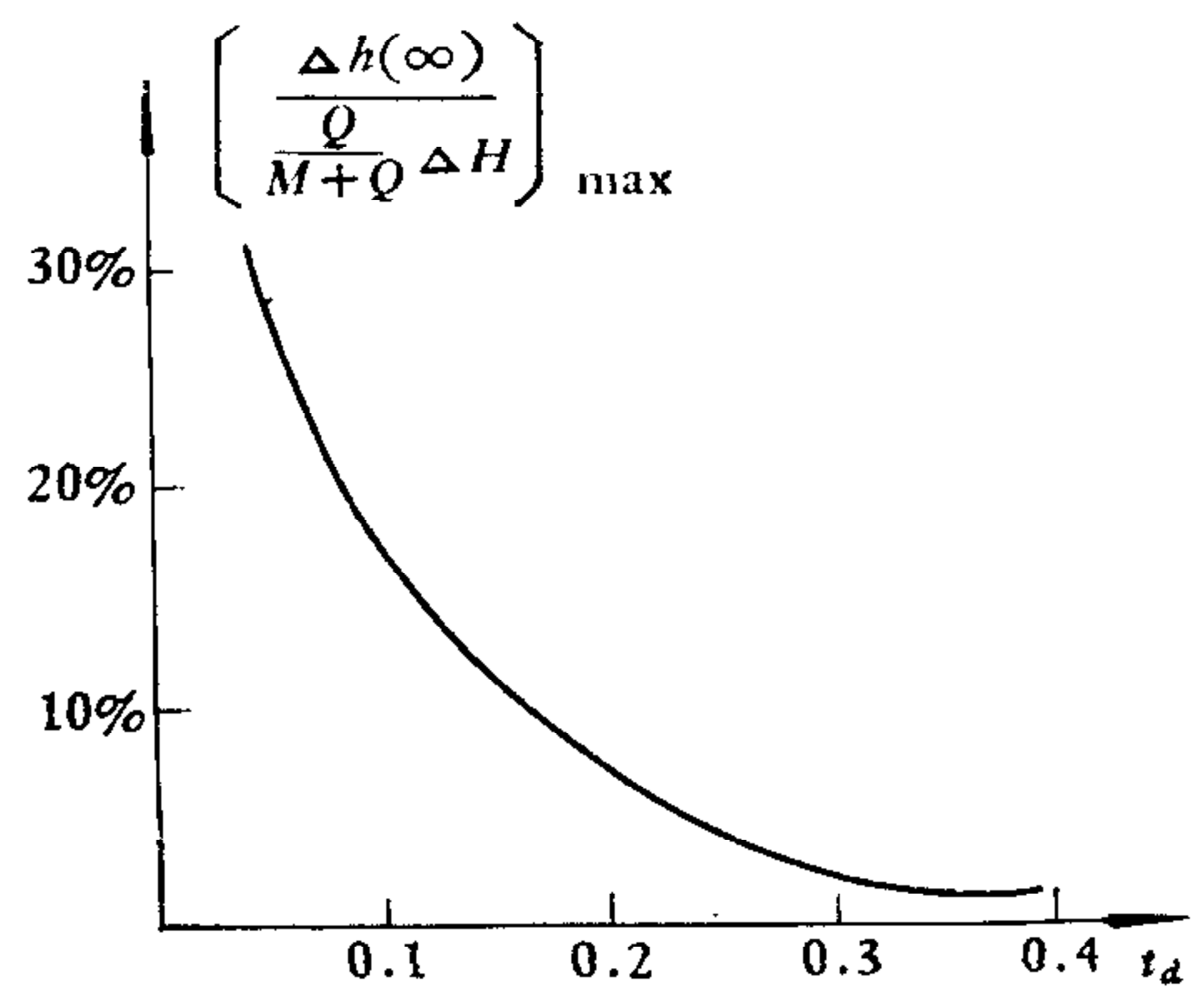


图6 最大稳态误差与  $t_d$  的关系

图 6 给出  $\frac{Mk_p}{M+Q} = 5$  时, 最大稳态厚差与  $t_d$  的关系。

由图 5 和 6 可以看出, 当  $t_d$  较大时, 在  $\delta$  的变化范围内不会造成大的稳态厚差, 但在  $t_d$  较小时将引起较大的稳态厚差。例如当  $t_d \leq 0.1$  时, 稳态厚差超过 10%。因此在测取厚差时间区间  $t_d$  较小时, 采用近似最优算法是不适宜的。

### 三、仿真试验结果

在数字计算机上对图 1 所示系统进行了仿真试验, 以比较近似前馈最优控制与普通前馈控制的效果。

采用近似最优算法, 将每次采样得到的厚差信号送入计算机内存, 并以与带钢同步的速度移位。在轧制过程中, 内存各地址的厚差信号不断改变, 但各相应地址的权的大小则不变。将内存各地址的厚差信号与所在地址的权相乘并求和, 然后与辊缝调节量综合, 即得控制信号

$$u^* = \sum_{i=1}^n \kappa_i \Delta h_{di} + \kappa_0 \Delta s.$$

表 1 给出  $t_d = 0.4$  秒, 测厚仪响应时间为 0.2 秒时, 稳态误差的分析值和试验值(分析与试验条件是  $\Delta H = 1442.3\mu$ ,  $\Delta h_d = 300\mu$ , 阶跃输入)。

表 1

系 数 $r$	$\delta$	绝对值厚差		相对值厚差 $\Delta h(\infty)/\Delta h_d$	
		分析值	仿真结果	分析值	仿真结果
100000	1.000005	0.000203	0.0002035	0.66E-7	0.67E-7
2	1.225	4.75	4.78	1.58%	1.59%
1.5	1.290	5.11	5.15	1.70%	1.71%
1.4	1.300	5.17	5.21	1.72%	1.73%
1.3	1.330	5.20	5.25	1.73%	1.75%
1.2	1.350	5.22	5.28	1.74%	1.76%
1.1	1.380	5.22	5.28	1.74%	1.76%
1.0	1.410	5.19	5.26	1.73%	1.75%
0.7	1.560	4.77	4.86	1.59%	1.62%
0.1	3.310	0.26	0.37	0.09%	0.12%

表 2

延迟时间 $\tau(t_d)$	$r$	$\delta$	绝对值偏差 $\Delta h(\infty)$		相对值偏差 $\Delta h(\infty)/\Delta h_d$	
			分析值	仿真结果	分析值	仿真结果
0.25(0.05)	0.055	4.37	77.50	70.54	25.8%	23.5%
0.35(0.15)	0.11	3.18	18.98	19.17	6.3%	6.3%
0.70(0.50)	0.12	3.05	0.097	0.148	0.03%	0.04%

表 2 给出  $t_d = 0.25, 0.35, 0.7$ , 测厚仪响应时间为 0.2 秒时, 稳态误差的分析值和试验结果.

从表 1 和表 2 可以看出, 分析计算结果和仿真试验结果是基本一致的.

为了比较近似前馈最优控制与普通前馈控制的效果, 图 7 给出两种控制算法的阶跃响应仿真曲线, 表 3 给出阶跃响应的误差平方和指标. 图 7 a, b, c 中曲线 1 为近似最优控制的结果, 曲线 2 为普通前馈控制的响应. 可以看出, 采用近似最优前馈算法, 在  $t_d$  较小时有较大的稳态误差, 误差平方和指标不但没有改善, 反而变坏.

考虑非线性环节, 并且附加 X-射线测厚仪监控的情况下, 采用近似最优前馈算法的指标值列于表 4, 阶跃响应绘于图 7d). 可以看出, 在  $\tau=0.35$  时, 仍比普通前馈算法为差.

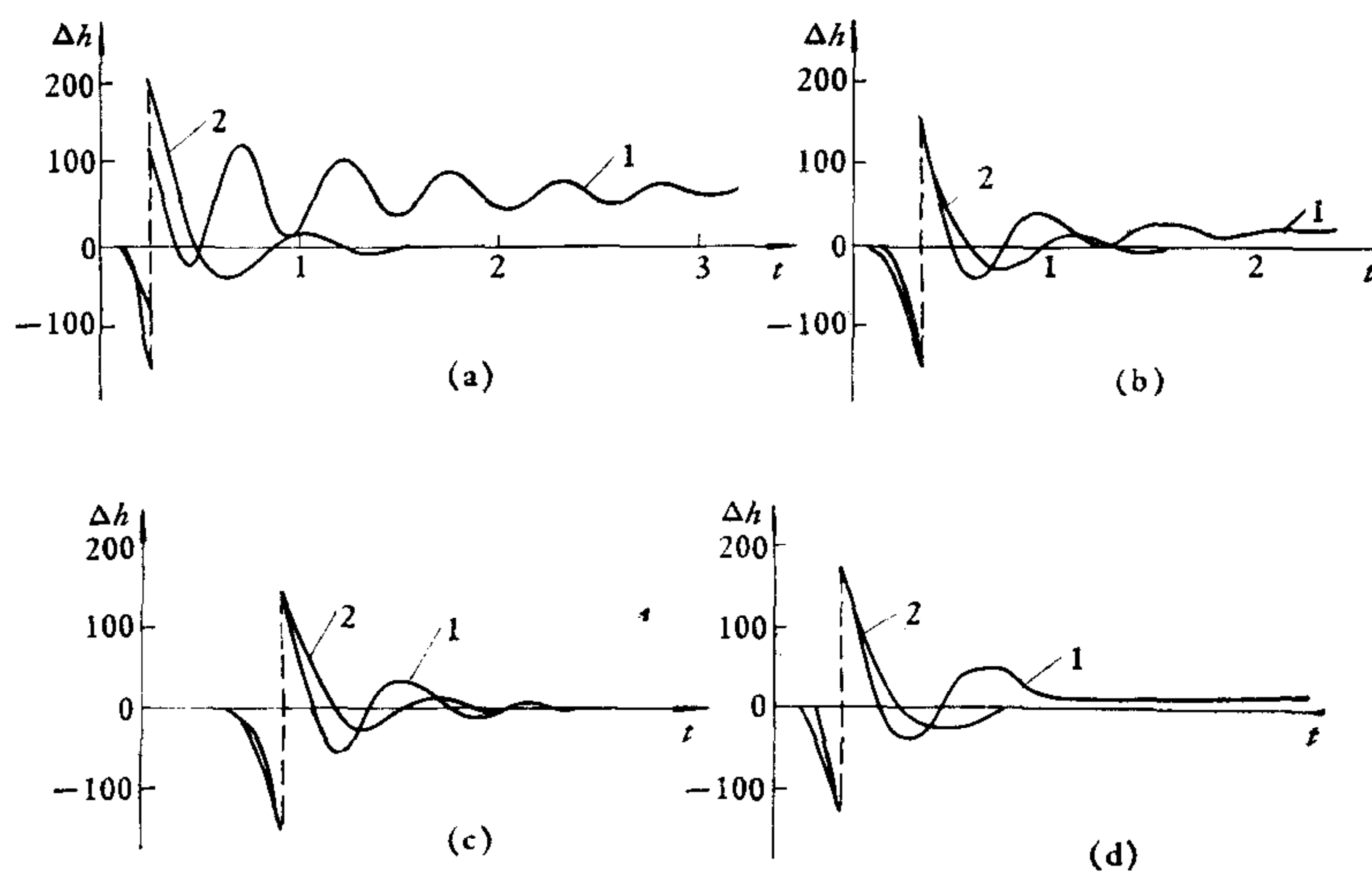


图 7 阶跃响应曲线(厚差  $\Delta h$  单位为微米)  
a)  $t_d = 0.05(0.25)$ , b)  $t_d = 0.15(0.35)$  c)  $t_d = 0.5(0.7)$ , d) 考虑非线性及监控.

表 3

延迟时间 $\tau(t_d)$	指 标	近似最优算法	普通前馈算法
0.25(0.05)	绝对值	17899.3756	4352.2889
	相对值	4.112	1.000
0.35(0.15)	绝对值	3933.8038	3502.6083
	相对值	1.123	1.000
0.70(0.50)	绝对值	3160.5246	3499.9027
	相对值	0.903	1.000

表 4

指标值	近似最优算法	普通前馈算法
绝对值	3833.7218	3654.3068
相对值	1.050	1.000

## 四、结 论

(1) 采用二次型指标函数  $\int_0^{\infty} (\Delta h^2 + ru^2) d\tau$  的前馈最优控制规律为

$$u^* = - \left[ \frac{M}{M+Q} \Delta s + \frac{Mk_p}{M+Q} \delta \int_0^{\infty} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right] (\delta - 1).$$

式中  $\delta = \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$ .

(2) 美坂佳助给出的前馈最优算法

$$u^* = - \left[ \frac{M}{M+Q} \Delta s + \frac{Mk_p}{M+Q} \delta \int_0^{t_d} e^{-\frac{Mk_p}{M+Q} \delta \tau} \Delta h_d(t+\tau) d\tau \right] (\delta - 1)$$

只是一个近似最优算法。这一算法对于阶跃输入有稳态误差。

(3) 近似最优前馈算法的阶跃响应指标和稳态误差与  $t_d$  有关。当  $t_d$  较小时，稳态误差较大，阶跃响应的误差平方和指标劣于普通前馈算法。

(4) 近似最优前馈算法只适于在  $t_d$  较大的情况下使用，在  $t_d$  较小时，宜采用普通前馈算法。

## 参 考 文 献

- [1] 山下了也, 美坂佳助, 长谷 登, 高桥亮一, 热延フィードフォワード AGC の開発, 住友金属, 28(1976), No. 1, 16-21

## FEEDFORWARD OPTIMAL GAGE CONTROL OF STRIP MILL

YANG CHUNJIANG YANG ZIHOU LI SHIQING  
(Northeast Institute of Technology)

### ABSTRACT

Feedforward optimal control algorithm of the automatic gage system of strip mill in Reference [1] is derived in this paper. It shows that the optimal control given by Yoshi-suke Misaka is approximate. Error of the approximation and scope of application of the approximate algorithm are discussed. In addition, simulation results by digital computer show the correctness of the conclusion.