第10卷 第2期 自动化学报 Vol. 10, No. 2
1984年4月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1984

# 大系统模型简化的一种新的时域最优逼近法

吴受章
(西安交通大学)

**摘　　要**

从大系统及其降阶模型的单位脉冲响应矩阵近似相等出发，推导了大系统及其降阶模型的特征值应该遵守的关系式. 利用该关系式可以改进大系统模型简化的时域最优逼近法，将泛函求极值的问题转化为参数优化的问题，有可能使问题的解决简单化. 本文提出了两种算法：1）保留主特征值的最优逼近；2）修改特征值的最优逼近. 附有数字实例.

## 一、引　　言

大系统模型简化法已有许多种. 在时域内，主要有保留主特征值的集结法、最优集结法、链式集结法、奇异摄动法、最优逼近法等等. 关于这些方法，已有全面综述[1-3]. 现有的最优集结法、最优逼近法都是把模型简化作为泛函求极值问题处理，计算较繁. 利用本文给出的大系统及其降阶模型的特征值应该遵守的关系式，可以形成一种新的时域最优逼近法，使问题成为可以利用现成的优化方法和计算程序的参数优化问题.

## 二、大系统与降阶模型特征值的关系

设大系统的状态向量方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t), \qquad\qquad\quad \forall t \geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{y}\in R^p$, $\boldsymbol{u}\in R^m$; $A$, $B$, $C$, 为常量矩阵.

并设降阶模型的状态向量方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}(t) &= F\boldsymbol{z}(t) + G\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}_m(t) &= H\boldsymbol{z}(t), \qquad\qquad\quad \forall t \geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{z}\in R^r$, $r < n$, $\boldsymbol{y}_m\in R^p$, $\boldsymbol{u}\in R^m$; $F$, $G$, $H$ 为常量矩阵.

在时域内，要求大系统的单位脉冲响应矩阵 $h(t)$ 近似等于降阶模型的单位脉冲响应矩阵 $h_m(t)$，即

$$h(t) \approx h_m(t). \tag{3}$$

本文于1982年12月24日收到.

由式(3)可推导出大系统及其降阶模型的特征值应遵守的关系[1]，分为三种情形：

1) 若 $A$ 具有相异特征值，$F$ 取为具有相异特征值

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \cdots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \cdots \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} \cdots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} e^{\rho_1 t} \\ e^{\rho_2 t} \\ e^{\rho_3 t} \\ \vdots \\ e^{\rho_r t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \cdots \rho_r \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \cdots \rho_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \rho_1^{r-1} & \rho_2^{r-1} & \rho_3^{r-1} \cdots \rho_r^{r-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} HG \\ HFG \\ HF^2G \\ \vdots \\ HF^{r-1}G \end{bmatrix}. \tag{4}$$

式中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $A$ 的相异特征值；$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r$ 为 $F$ 的相异特征值；$T$ 为矩阵转置．式(4)左边第三个矩阵是分块阵，其各块构成大系统的有限 Markov 参数；式(4)右边第三个矩阵也是分块阵，其各块构成降阶系统的有限 Markov 参数．

2) 若 $A$ 具有一组重复特征值(设一组中有三个重复的)，$F$ 取为具有相异特征值

$$\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_4 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \cdots 1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \cdots \lambda_n \\ 1 & 2\lambda_1 & \lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \lambda_1^3 \cdots \lambda_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_1^{n-3} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \cdots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ CA^3B \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} e^{\rho_1 t} \\ e^{\rho_2 t} \\ e^{\rho_3 t} \\ \vdots \\ e^{\rho_r t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \cdots \rho_r \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \cdots \rho_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \rho_1^{r-1} & \rho_2^{r-1} & \rho_3^{r-1} \cdots \rho_r^{r-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} HG \\ HFG \\ HF^2G \\ \vdots \\ HF^{r-1}G \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中 $\lambda_1$ 为 $A$ 的重复特征值；其余说明同上．

3) 若 $A$ 具有两组重复特征值(设每组中各有两个重复的)，$F$ 取为具有相异特征值

$$\begin{bmatrix} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_3 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \cdots \lambda_n \\ 2\lambda_1 & \lambda_1^2 & 2\lambda_3 & \lambda_3^2 \cdots \lambda_n^2 \\ 3\lambda_1^2 & \lambda_1^3 & 3\lambda_3^2 & \lambda_3^3 \cdots \lambda_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ (n-1)\lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_3^{n-2} & \lambda_3^{n-1} \cdots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ CA^3B \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

---

1) 吴受章，大系统与降阶模型的特征值的关系，西安交通大学科学技术报告(81-099)，1981年．

$$\begin{bmatrix} e^{\rho_1 t} \\ e^{\rho_2 t} \\ e^{\rho_3 t} \\ \vdots \\ e^{\rho_r t} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \cdots \rho_r \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \cdots \rho_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \rho_1^{r-1} & \rho_2^{r-1} & \rho_3^{r-1} \cdots \rho_r^{r-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} HG \\ HFG \\ HF^2G \\ \vdots \\ HF^{r-1}G \end{bmatrix}. \tag{6}$$

式中 $\lambda_1$ 为 $A$ 的一组重复特征值，$\lambda_3$ 为 $A$ 的另一组重复特征值，其余说明同上.

## 三、降 阶 算 法

式(4),(5),(6)适用于多输入-多输出系统，但本节阐述单输入-单输出系统的降阶算法.

对于单输入-单输出系统，式(1)和(2)可化为:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0} \\ y(t) &= C\boldsymbol{x}(t), \qquad\qquad \forall t \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{1$'$}$$

式中 $u(t)$ 和 $y(t)$ 均为标量，$B$ 为列向量，$C$ 为行向量.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}(t) &= F\boldsymbol{z}(t) + Gu(t), \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{0} \\ y_m(t) &= H\boldsymbol{z}(t), \qquad\qquad \forall t \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{2$'$}$$

式中 $u(t)$ 和 $y_m(t)$ 均为标量，$G$ 为列向量，$H$ 为行向量.

有两种降阶算法，以下均以式(4)为例阐明算法.

**1. 保留主特征值的最优逼近**

1）计算 $A$ 的特征值. 利用计算机和求特征值程序.

2）计算原系统的单位脉冲响应 $h(t)$. 不论 $A$ 是否已经对角化，可以先算大系统的有限 Markov 参数. 后算 $h(t)$.

3）$A$ 阵对角化. 设 $P$ 为模态阵，$\boldsymbol{v}(t)$ 为变换后的状态，

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{v}(t). \tag{7}$$

于是，得新的三元组 $(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP)$.

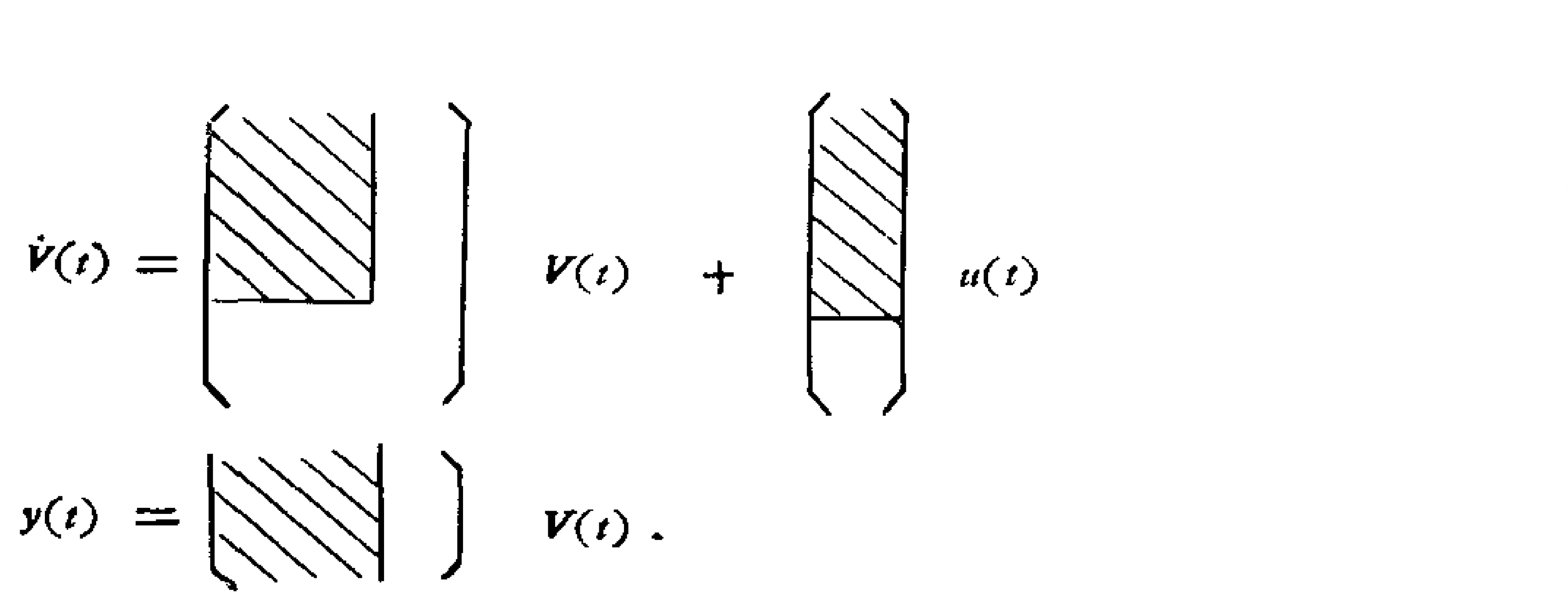
4）完全集结. 在式(4)中，取 $\rho_1 = \lambda_1, \rho_2 = \lambda_2, \cdots, \rho_r = \lambda_r$. 从三元组 $(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP)$ 作完全集结较方便，因为 $\boldsymbol{z}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}(t)$ 之间集结矩阵 $K$ 为

$$K = [I_r \vdots 0]_{r\times n}, \tag{8}$$

而

$$\boldsymbol{z}(t) = K\boldsymbol{v}(t). \tag{9}$$

此时，只要从式(10)截取阴影部分，即得 $(F, G, H)$.




(10)

至此,可进一步计算完全集结模型的有限 Markov 参数和 $h_m(t)$. 误差

$$\Delta(t) = h(t) - h_m(t). \tag{11}$$

5）修改$H$阵. 由于完全集结模型有较大误差，可利用式（4）修改$H$阵,以提高降阶模型的逼近精度. 在修改$H$阵时,为了避免盲目试凑,可采用目标函数

$$\min_{H} J = \int_0^\infty [h(t) - h_m(t)]^2 dt. \tag{12}$$

式中 $h(t)$ 即式（4）左边；$h_m(t)$ 即式(4)右边,但在 $h_m(t)$ 中,除了$H$阵待修改外，其余都由完全集结确定了. 将 $h(t)$ 和 $h_m(t)$ 代入式(12)，并求出定积分，于是化为一个无约束参数优化问题. 采用式（12）所示目标函数可保证暂态响应的起始部分较逼近,而稳态响应的逼近程度则稍差. 还可以采用下列目标函数

$$\min_{H} J = \int_0^\infty [h(t) - h_m(t)]^2 dt, \tag{13}$$

$$\text{s.t.}\ |\Delta(t)| < \varepsilon, \quad t > t_s$$

式中 $\varepsilon$ 为按需指定的误差值，$t_s$ 为按需指定的某一时刻. 将 $h(t)$ 和 $h_m(t)$ 代入式(13)，并求出定积分,于是化为一个有约束参数优化问题. 采用式（13）所示目标函数可保证暂态响应的起始部分较逼近，又可兼顾其它时刻的逼近精度，还可以按需要提出其它约束条件,比较灵活. 从目标函数的形式来看,虽然也是积分平方误差，但已经不是作为泛函求极值而是作为参数优化问题处理.

**2. 修改特征值的最优逼近**

1）同第一种算法的步骤 1)—4)，即计算到完全集结这一步.

2）修改特征值. 利用式（4）修改 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_r$，以提高降阶模型的逼近精度. 采用目标函数

$$\min_{\rho_1,\cdots,\rho_r} J = \int_0^\infty [h(t) - h_m(t)]^2 dt \tag{14}$$

或

$$\min_{\rho_1,\cdots,\rho_r} J = \int_0^\infty [h(t) - h_m(t)]^2 dt, \tag{15}$$

$$\text{s.t.}\ |\Delta(t)| < \varepsilon, \quad t > t_s.$$

于是,也可化为一个无约束或有约束参数优化问题.

至此,可以看出以上两种算法与现有的最优集结法或最优逼近法[4-14]相比，有以下显著区别：1)传统的方法是面临泛函求极值的问题,而本文所述方法是面临参数优化问题,方法较简单；2）可按需提出各种约束条件,也不难处理；3. 本方法的第一种算法是保留主特征值的,第二种算法可利用式(4)对降阶模型的特征值作出主动修改.

## 四、算　例

设原系统为(该例取自文[2])

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \\ 17.5 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1\ \ 0\ \ 0]\boldsymbol{x}(t),$$

则可得完全集结模型为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) + \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y_m(t) = [1\ \ 1]\boldsymbol{z}(t).$$

若采用第一种算法,取目标函数如式(12)所示,并采用 Nelder & Mead 的直接搜索法[15],经迭代14次,目标函数值减少到 $J = 2.1532 \cdot 10^{-3}$,并得降阶模型为

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) + \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.25 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y_m(t) = [0.3446403\ \ 2.949817]\boldsymbol{z}(t).$$

该降阶模型在单位脉冲输入、单位阶跃输入、单位斜坡输入作用下，数字仿真结果分别示于图 1a，图 1b，图 1c. 在图 1 中同时画出原系统以及保留主特征值的降阶模型的数字仿真结果. 由图 1 看出，式(12)所示目标函数只能使暂态响应的起始部分逼近较好,这是在意料之中的.

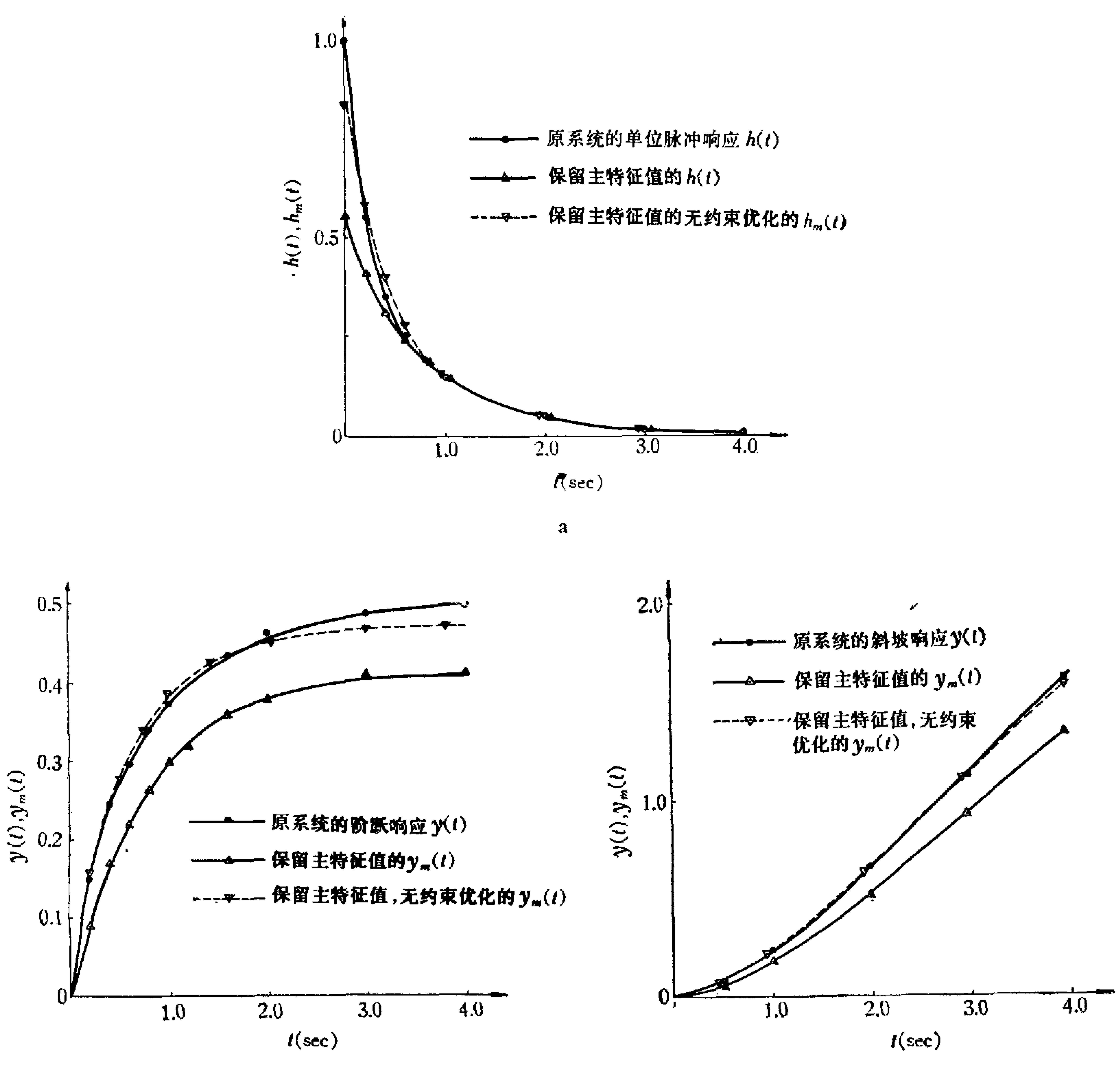



图 **1** 暂态响应的数字仿真(目标函数取式(12))

a 单位脉冲输入； b 单位阶跃输入； c 单位斜坡输入

若仍采用第一种算法，但取目标函数如式(13)所示，取 $t_s = 4$ 秒，并采用 Pavianai & Himmelblau 的可变容差法[15]，经迭代12次，目标函数值减少到 $J = 2.3866 \times 10^{-3}$，并得降阶模型为

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.25 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y_m(t) = [0.5357226 \quad 2.7120157] z(t).$$

该降阶模型在单位阶跃输入作用下，数字仿真结果示于图 2. 由图 2 看出，式(13)所示目标函数可使暂态响应和稳态响应的逼近精度分别得到兼顾.

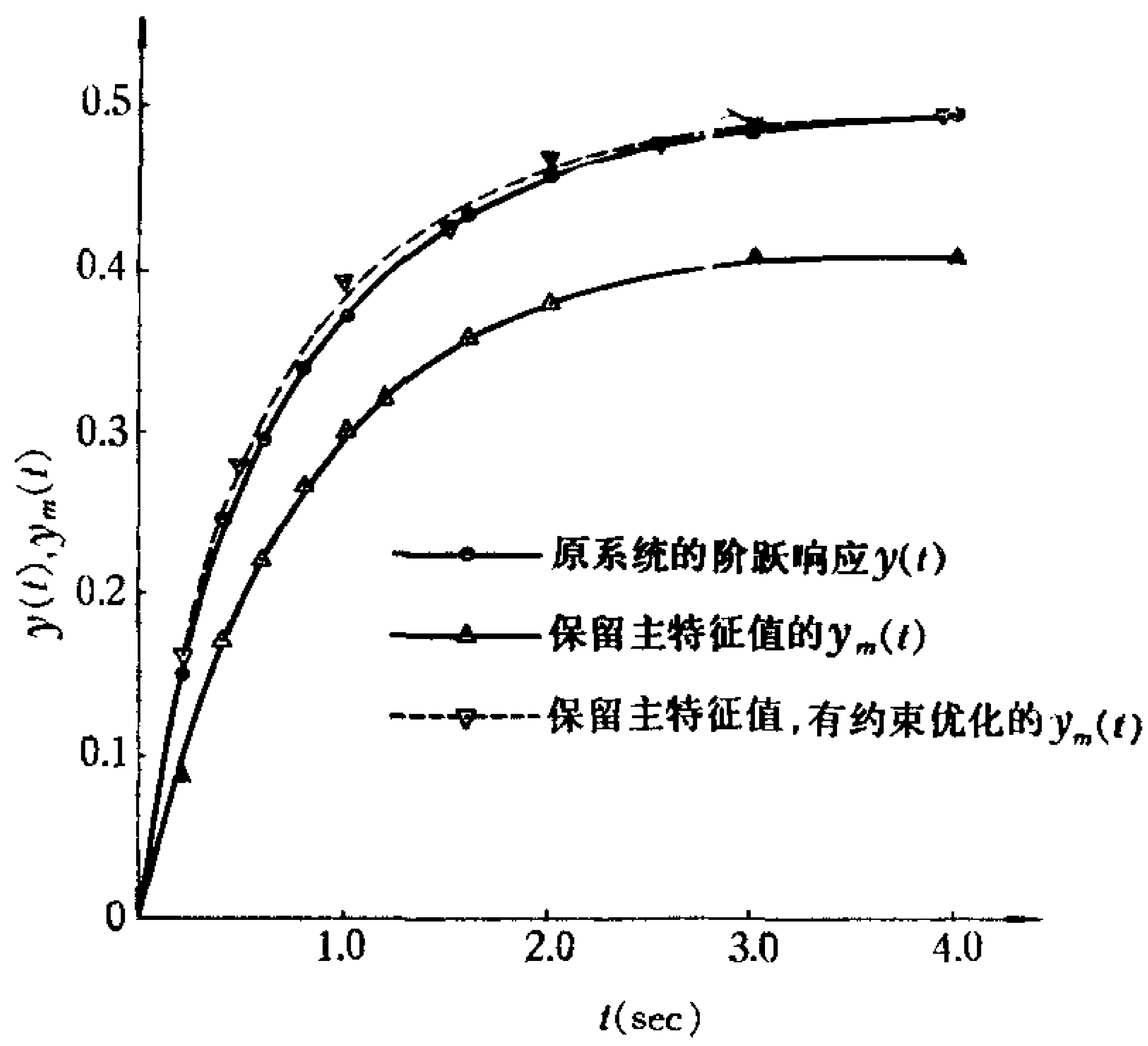



图 2　单位阶跃输入下，暂态响应的数字仿真(目标函数取式 (13)，$t_s = 4$ 秒)

# 五、结论与展望

(1) 利用本文给出的大系统及其降阶模型特征值的关系式，可形成一种新的时域最优逼近法。本方法既可适用于原系统具有主特征值的情况，也适用于没有主特征值的情况。

(2) 本文给出的特征值关系式适用于多输入-多输出系统，但本文仅阐述了单输入-单输出系统的降阶算法. 关于多输入-多输出系统的降阶算法，将另撰文.

西安交大自控 81 班姚忠慧同学在毕业设计中曾对本文的算例作了计算，此志.

## 参　考　文　献

[1] Genesio R. and Milanese M., A Note on the Derivation and Use of Reduced-Order Models, *IEEE Trans., Automat. Contr.*, AC-**21**(1976), 118—122.
[2] 万百五、吴受章，大系统的模型简化，自动化学报，**6**(1980)，第 1 期，57—66.
[3] 前田肇，大規模な線形システムの低元モデルとシステム構造，システムと制御，**22**(1978)，655—664.
[4] Siret J. M., Michaileseo G. and Bertrand P., Representation of Linear Dynamical Systems by Aggregated Models, *Int. J. Contr.*, **26**(1977), 121—128.
[5] Wilson D. A., Optimum Solution of Model-reduction Problem, Proc. IEE, **117**(1970), 1161—1165.
[6] Galiana F. D., On the Approximation of Multiple Input-multiple Output Constant Linear Systems, *Int. J. Contr.*, **17**(1973), 1313—1324.

[7] Aplevich J. D., Approximation of Discrete Linear Systems, *Int. J. Contr.*, **17**(1973), 565—575.
[8] Aplevich J. D., Gradient Methods for Optimal Linear System Reduction, *Int. J. Contr.*, **18**(1973), 767—772.
[9] Wilson D. A., Model Reduction for Multivariable Systems, *Int. J. Contr.*, **20**(1974), 57—64.
[10] Hirzinger G. and Kreisselmeier, On Optimal Approximation of High-order Linear Systems by Low order Models, Int. J. Contr., **22**(1975), 399—408.
[11] Wilson D. A. and Mishra R. N., Optimal Reduction of Multivariable Systems, *Int. J. Contr.*, **29**(1979), 267—278.
[12] Mishra R. N. and Wilson D. A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, *Int. J. Contr.*, **31**(1980), 443—466.
[13] Commault C., Optimal Choice of Modes for Aggregation, Automatica, **17**(1981), 397—399.
[14] Litz L., Order Reduction of Linear State-space Models via Optimal Approximation of the Non-dominant Modes, *Large Scale Systems* (*Theory and Applications*), **2**(1981), 171—184.
[15] Himmelblau D. M., Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, 1972. 中译本,张义燊等译,实用非线性规划,科学出版社,1981.

# A NEW METHOD OF OPTIMAL TIME-DOMAIN APPROXIMATION FOR LARGE-SCALE SYSTEM MODEL REDUCTION

Wu Shouzhang
(*Xi'an Jiaotong University*)

Abstract

The relationship between the eigenvalues of both the large-scale system and its order-reduction model is derived from the requirement that their unit/impulse response matrices should be approximately equal to each other. With this formula, the time-domain optimal approximation for large-scale system simplification can be improved considerably, i.e. one needs only solve a parameter optimization problem instead of a functional problem. Two algorithms are proposed: 1, the optimal approximation with the dominant eigenvalues retained; 2, the optimal approximation with some eigenvalues modified. A numerical example is also attached.

# IFAC 发展中国家自动控制科学技术区域性会议征文

中国自动化学会将于 1985 年 8 月20—22日在北京主办国际自控联 (IFAC) 发展中国家自动控制科学技术会议. 征文内容如下:

1) 工农业和经济中的建模和辨识; 2) 过程控制; 3) 水力资源、能源管理; 4) 环境和污染;5)自动控制的培训和教育; 6) 计算机辅助设计和辅助制造;7)经济和管理系统;8)机器人.

论文中、英文全文请于 1984 年 7 月 1 日前寄到:

北京,德胜门外机械工业部工业自动化所,严筱钧.

中国自动化学会办公室