

用奇异摄动改进集结模型

王柏林 李救安
(华中工学院)

摘 要

本文用奇异摄动原理改进集结法,得到一种新的集结模型. 该模型是完全集结,当输入函数比脉冲函数、阶跃函数复杂时,比其它完全集结模型的响应拟合好. 该集结模型能给出原系统一个稳定的准最优控制. 用一种迭代法可以求出一类系统的集结矩阵.

随着系统维数的升高,系统的分析、仿真、控制器的设计等都更加困难,用一个较低维的模型来近似原来较高维的模型是克服这一困难的途径之一.

大系统模型简化领域中,完全集结^[1,2]是一种应用较广的方法,它的优点是原理清晰、使用方便、稳定性好等;缺点是有时响应拟合不够好(尤其当输入函数是斜升函数、高次函数等较复杂形式时). 用集结系统设计原系统的准最优控制不太方便^[1];求高维系统的集结矩阵比较麻烦等.

本文用奇异摄动原理来改进集结模型,导出了某些新结果.

一、用集结矩阵分离快、慢子系统

对于稳定的含有快、慢模态(mode^[1])的线性系统,首先构造一种分离快、慢模态的变换:

定理 1. 对于含快、慢模态的大系统 S_0

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = 0,$$

$$A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times r}, \quad H \in R^{m \times n}.$$

如果,秩 $(B) \leq l < n$, 那么存在变换

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z} = T(\mathbf{z}_s^T, \mathbf{z}_f^T)^T \quad (2)$$

使 S_0 变换为 S_1

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_s \\ \dot{\mathbf{z}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_s \\ \mathbf{z}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{y} = HT\mathbf{z}. \quad (3b)$$

式中 \mathbf{z}_s 为慢状态 (state) 矢量, 且 $\mathbf{z}_s \in R^l$; \mathbf{z}_f 为快状态矢量, 且 $\mathbf{z}_f \in R^{n-l}$, $T \in R^{n \times n}$.

证明. 只需取

$$T = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}^{-1} \triangleq D^{-1} \quad (4)$$

即可.

其中 C 是系统 S_0 的一个保留慢模态的完全集结矩阵, $C \in R^{l \times n}$; $V \in R^{(n-l) \times n}$, 且满足 a) $VB = 0$; b) D 是非奇异矩阵.

因为秩 $(B) \leq l$, 所以满足条件 a) 和 b) 的 V 一定存在(也很容易找到). 证毕.

同时不难证明

$$F_1 = CAC^+, \quad G_1 = CB. \quad (5)$$

式中

$$C^+ = C^T(CCT)^{-1}.$$

上述变换与文献 [8] 等给出的分离办法的不同处在于: 前者只要知道了原系统的一个完全集结矩阵即可进行变换, 这样做不仅计算方便, 而且把系统的快、慢分离与系统集结联系起来. 从形式上看, 前者所得到的快子系统是不受输入控制的(这在本文模型的推导中起了重要作用); 而后者不具备这些特征.

二、初始值问题的集结模型

这类问题主要要求高、低维模型之间具有良好的响应拟合. 一般集结模型(尤其是完全集结)拟合精度不太高, 特别当输入函数比脉冲函数、阶跃函数复杂时拟合情况更差. 有些作者曾用最优集结^[3]、链集结^[4]等方法来提高拟合精度, 但运算量大大增加了. 本文的定理 2 给出了一种新的集结模型, 其响应拟合较好, 而计算量却比前二者小.

定理 2. 系统 S_0 的零阶近似完全集结模型为

$$\dot{\mathbf{z}}_s = F_1 \mathbf{z}_s + G_1 u, \quad (6a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{H}_0 \mathbf{z}_s, \quad (6b)$$

$$\mathbf{z}_s(t_0) = 0.$$

一阶近似完全集结模型为

$$\dot{\mathbf{z}}_s = F_1 \mathbf{z}_s + G_1 u, \quad (7a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{H}_1 \mathbf{z}_s + Eu. \quad (7b)$$

$$\mathbf{z}_s(t_0) = 0.$$

且集结状态 \mathbf{z}_s 与原状态 \mathbf{x} 的关系为

$$\mathbf{z}_s = C\mathbf{x}. \quad (8)$$

其中

$$\tilde{H}_0 = HT \begin{bmatrix} I_l \\ (-F_4^{-1}F_3) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\tilde{H}_1 = HT \begin{bmatrix} I_l \\ (-F_4^{-1}F_3 - F_4^{-2}F_3F_1) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$E = HT \begin{bmatrix} 0_{l \times r} \\ (-F_4^{-2} F_3 G_1) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

C, T, F_1, F_3, F_4 均由定理 1 所定义.

证明. 对于系统 (3), 至少存在一个数 $\mu (0 \leq \mu \ll 1)$, 使 (μF_4) 的特征值与 F_1 的特征值数量相当. 令 $\bar{F}_4 = \mu F_4, \bar{F}_3 = \mu F_3$, 则系统 (3) 可写成

$$\dot{\mathbf{z}}_s = F_1 \mathbf{z}_s + G_1 \mathbf{u} \quad (12a)$$

$$\mu \dot{\mathbf{z}}_f = \bar{F}_3 \mathbf{z}_s + \bar{F}_4 \mathbf{z}_f, \quad (12b)$$

$$\mathbf{y} = HT \mathbf{z}. \quad (12c)$$

据奇异摄动理论^[13], 设在非边界层处 $\mathbf{z}_f(t) = \mathbf{z}_f^0(t)$, 且

$$\mathbf{z}_f^0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i(t) \mu^i, \quad (13)$$

将 (13) 式代入 (12b), 对比两边 μ 的同次幂系数得

$$0 = \bar{F}_4 \mathbf{a}_0 + \bar{F}_3 \mathbf{z}_s,$$

$$\dot{\mathbf{a}}_0 = \bar{F}_4 \mathbf{a}_1,$$

$$\dot{\mathbf{a}}_1 = \bar{F}_4 \mathbf{a}_2,$$

$$\dots\dots,$$

解上列方程, 并将结果代入 (13) 得

$$\mathbf{z}_f^0 = -F_4^{-1} F_3 \mathbf{z}_s - F_4^{-2} F_3 (F_1 \mathbf{z}_s + G_1 \mathbf{u}) - \dots\dots. \quad (14)$$

在边界层之内, 设 $\mathbf{z}_f(t) = \mathbf{z}_f^i(t)$, 并引用伸长时标 $\tau, \tau = (t - t_0)/\mu$, 则 (12b) 为

$$\frac{d\mathbf{z}_f^i(\tau)}{d\tau} = \bar{F}_3 \mathbf{z}_s(\tau) + \bar{F}_4 \mathbf{z}_f^i(\tau). \quad (15)$$

$$\mathbf{z}_f^i(0) = V \mathbf{x}(t_0).$$

令

$$\mathbf{z}_f^i(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(\tau) \mu^j,$$

代入式 (15) 得

$$\dot{\beta}_0 = \bar{F}_4 \beta_0 + \bar{F}_3 \mathbf{z}_s, \quad \beta_0(0) = V \mathbf{x}(t_0), \quad (16a)$$

$$\dot{\beta}_1 = \bar{F}_4 \beta_1, \quad \beta_1(0) = 0, \quad (16b)$$

$$\dot{\beta}_2 = \bar{F}_4 \beta_2, \quad \beta_2(0) = 0, \quad (16c)$$

$$\dots\dots.$$

由于 \mathbf{z}_s 是慢状态, 故在边界层之内 $\mathbf{z}_s \equiv \mathbf{z}_s(0) \equiv C \mathbf{x}(t_0) = 0$, 这样 (16) 式的解为

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots\dots = 0.$$

所以

$$\mathbf{z}_f^i(\tau) = 0, \quad \mathbf{z}_f(t) = \mathbf{z}_f^0(t).$$

将 (14) 式代入 (12) 式就可得到定理的结论.

例 1. 对下列四维系统进行集结:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 18 \\ 17 & -2 & -3 & 22 \\ 17 & 0 & -5 & 22 \\ -9 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix},$$

$$y = (-5 \ 2 \ 2 \ 1)x, \quad x(0) = 0.$$

用一般完全集结方法可求出完全集结矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

任取一个符合定理 1 条件的矩阵 V

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

根据定理 1, 2, 即可得原系统的集结模型

$$\dot{z}_s = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -2 \end{bmatrix} z_s + \begin{bmatrix} 6 & -0.5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y} = (0.645, -1.160)z_s + (-2.925, 1.3875)(t, t^2)^T.$$

响应拟合情况绘于图 1, 可以看出该模型的响应拟合是好的。

为了便于比较, 图中还绘出了用另外两种集结模型计算例 1 所得到的响应曲线。所谓“D-C”模型是指 E. J. Davison 和 M. R. Chidambara 进行了多次讨论后得出的一种集结模型^[6], 该模型在阶跃输入

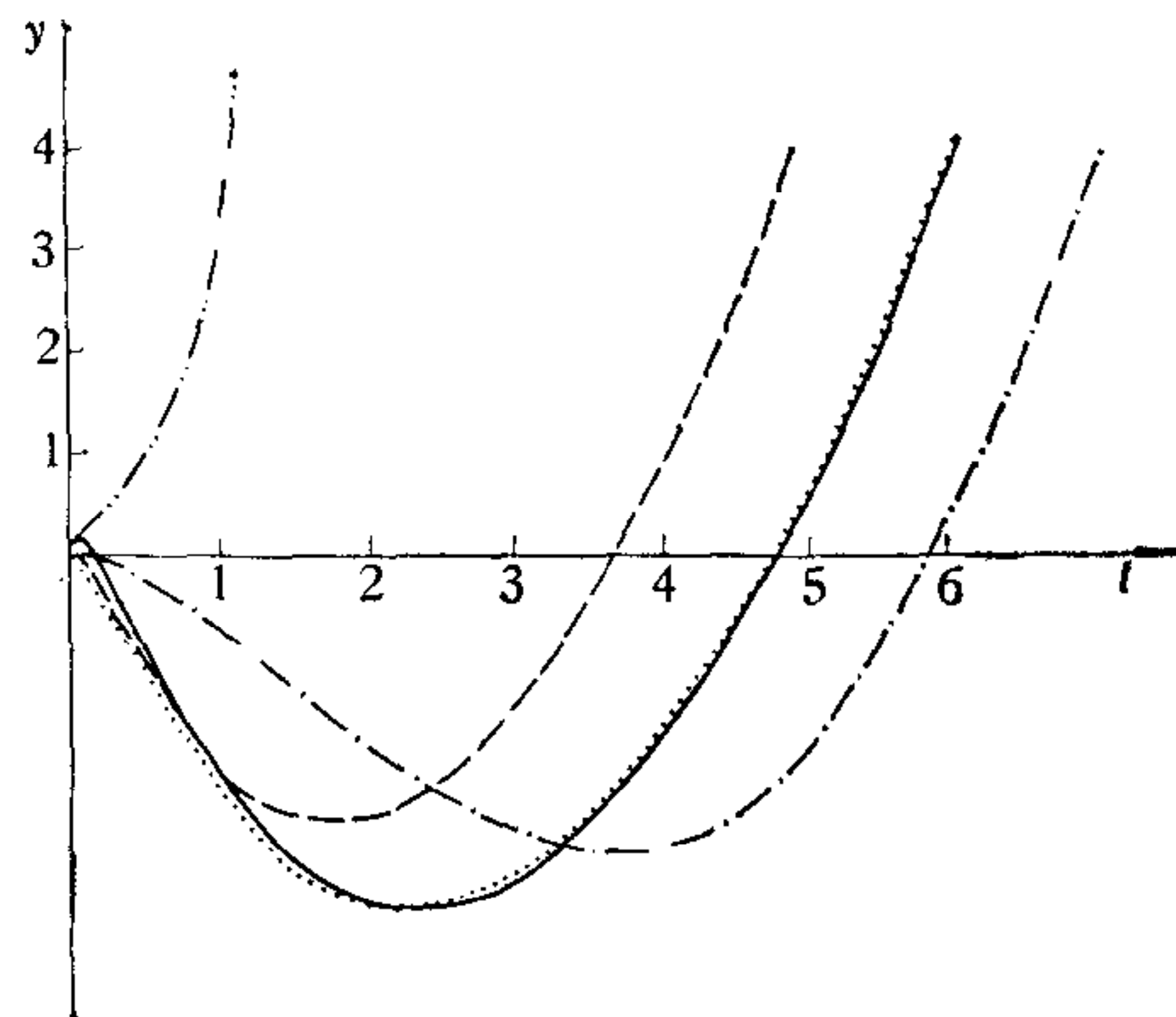


图 1 例 1 的响应曲线

时有良好的响应拟合, 但当输入为斜升函数或高次函数时响应拟合变差。所谓“最小范数解”模型, 是指系统 S_0 的下列集结形式:

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= F_1 z_s + G_1 u, \\ \tilde{y} &= \tilde{H} z_s. \end{aligned}$$

其中

$$F_1 = CAC^+, \quad \tilde{H} = HC^+, \quad G_1 = CB.$$

三、状态调节器问题的集结模型

把一个较高维的状态调节器 (State Regulator Problem^[9]) 集结为一个较低维的状态调节器的问题, 集结法已有一些结果^[1], 但其近似精度及计算的简便性都不够。奇异摄动法对于线性调节器的降阶设计是较为成功的^[7,9,10], 但降阶系统不一定保证原系统的稳定性, 这取决于小参数 μ 的大小, 即快子系统的结构^[10,12]。此外, 奇异摄动法一般不给出独立的降阶模型 (包括目标函数的集结)。

定理 3. 对于线性状态调节器问题

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad B \in R^{n \times l}, \quad (17a)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt. \quad (17b)$$

如果开环系统是稳定的,那么它的零阶近似完全集结模型是

$$\dot{\mathbf{z}}_s = F_1 \mathbf{z}_s + G_1 \mathbf{u}, \quad (18a)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{z}_s^T \hat{Q} \mathbf{z}_s + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt. \quad (18b)$$

并且,从模型(18)所导出的最优控制

$$\mathbf{u} = -K_s \mathbf{z}_s,$$

直接用于高维系统(17)即

$$\mathbf{u} = -K_s C \mathbf{x}$$

一定保证闭环稳定性.

式(18b)中

$$\hat{Q} = \tilde{Q}_1 - (F_3^T L_3 + \tilde{Q}_2) F_4^{-1} F_3 - [(F_3^T L_3 + \tilde{Q}_2) F_4^{-1} F_3]^T, \quad (19)$$

其中 L_3 是矩阵方程 $L_3 F_4 + F_4^T L_3 + \tilde{Q}_3 = 0$ 的唯一解, $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3$ 由下式给出:

$$\tilde{Q} \triangleq T^T Q T \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & Q_3 \end{bmatrix}_{n-l}.$$

证明. 利用定理 1 的变换,系统(17a)变为(3a),性能泛函则变为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{z}_s^T \tilde{Q} \mathbf{z}_s + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt. \quad (20)$$

相应的最优控制为

$$\mathbf{u} = -R^{-1}(G_1^T, 0)P\mathbf{z}_s \triangleq -K(t, \mu)\mathbf{z}_s. \quad (21)$$

其中 P 为下列 Riccati 方程的解

$$\dot{P} = -PF - F^T P + PGR^{-1}G^T P - \tilde{Q}, \quad (22)$$

$$P(\infty) = 0. \quad (23)$$

对系统(3a)和性能泛函(20)所定义的调节器问题,施用奇异摄动法^[7]即可得集结模型(18)(详细推导略).下面重点证明定理的后半部分.

由于原系统(17a)是稳定的,据完全集结性质知集结模型(18a)及对应的最优反馈闭环系统

$$\dot{\mathbf{z}}_s = (F_1 - G_1 K_s) \mathbf{z}_s \quad (24)$$

也都是稳定的.考虑到

$$(F_1 - G_1 K_s)C = C(A - BK_s C),$$

所以(24)式恰好是原系统所对应的闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK_s C) \mathbf{x} \quad (25)$$

的一个完全集结模型.这说明 $(A - BK_s C)$ 有 l 个特征值与 $(F_1 - G_1 K_s)$ 相同,而 $(A - BK_s C)$ 的其余 $n - l$ 个特征值是 A 的 $n - l$ 个非主导特征值,所以闭环系统(25)也是稳定的.证毕.

例 2.

考察状态调节器问题

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -126 & -43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u, \quad (26)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u^2 \right) dt.$$

取

$$C = [1.05, 0.025], \quad V = [2, 1].$$

据定理 3 求得集结模型是

$$\dot{z} = -z + u,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (2.0625z^2 + u^2) dt.$$

集结模型的最优控制很容易求得

$$u = -0.75z.$$

将它直接用于原系统

$$u = -0.75(1.05, 0.025)(x_1, x_2)^T = -0.7875x_1 - 0.01875x_2.$$

而问题 (26) 的精确解是

$$u = -0.7427x_1 - 0.0058x_2.$$

用 Aoki 的方法^[1]所得到的反馈控制是

$$u = -0.3996x_1 - 0.0095x_2.$$

可见,定理 3 所给出的集结模型是有效的.

四、用迭代法求集结矩阵

前面所提出的集结模型都要求先求出一个集结矩阵,求集结矩阵最常见的公式是

$$C = L[I_l, 0]M^{-1}. \quad (27)$$

式中 M 为系统 S_0 的模态矩阵, L 为任意 l 阶非奇异矩阵. 当系统维数较高时, 该办法不太方便, 可以考虑定理 4 所给出的迭代法.**定理 4.** 对于奇异摄动系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u. \quad (28)$$

($\mathbf{x}_1 \in R^l$ 为慢状态, $\mathbf{x}_2 \in R^{n-l}$ 为快状态)

如果迭代公式

$$D_{k+1} = (A_0 D_k - D_k A_3 S + D_k A_3 D_k - A_0 S) A_4^{-1}, \quad (29a)$$

$$D_0 = -A_0 S A_4^{-1} \quad (29b)$$

是收敛的, 那么系统 (28) 的一个完全集结矩阵是

$$C = [I_l, (D - S)]. \quad (30)$$

式中

$$S = A_2 A_4^{-1}, \quad A_0 = A_1 - S A_3, \quad D = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k. \quad (31)$$

定理的证明是基于文献 [8] 中的引理 1, 具体过程略. 必须指出, 上述迭代法不是在任何

情况下都能奏效的,但对于实际问题中经常遇到的具有稀疏性和大、小参数的高维线性系统是可行的。

用奇异摄动原理来改进集结模型是有益的。对于常见的含快慢模态的大系统,只要求得它的完全集结矩阵就能将它变换为一种快、慢子系统分离的结构,用奇异摄动原理处理这种结构得到了具有较好的响应拟合的零阶近似、一阶近似完全集结模型。如果原问题是状态调节器问题,上述集结模型还可以给出原问题的一个稳定的准最优控制方式。一类奇异摄动大系统可以用迭代法求集结矩阵。

参 考 文 献

- [1] Aoki M., Control of Large-scale Dynamic Systems by Aggregation, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-13(1968), p. 246.
- [2] 万百五、吴受章,大系统的模型简化,自动化学报,第4期(1980), P57.
- [3] Mishra R. N., and Wilson D. A., A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, *Int. J. Contr.*, 31(1980), p. 443.
- [4] Medanic J. V. et al., A New Approach to Model Reduction Based on System Output Information. Proc. 7th World Congr. IFAC (1978), p. 1869.
- [5] Schainker R. B., Suboptimal Control by Aggregation, Proc. 1970, JACC, p. 833.
- [6] Chidambara M. R., Further Remark on "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-12(1967), p. 213.
- [7] Kokotovic P. V. et al., Near Optimum Design of Linear System by a Singular Perturbation Method. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-14(1969), p. 15.
- [8] Kokotovic P. V. Block-diagonalization of Ill conditioned Systems, *IEEE Trans.*, AC-20(1975), p. 812.
- [9] Kokotovic P. V. and Yackel R. A., Singular Perturbation of Linear Regulators: Basic Theorems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-17(1972), p. 29.
- [10] Kokotovic P. V. O'Malley R. E. and Sannuti P., Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory—An Overview, *Automatica*, 12(1976), p. 123.
- [11] Chow J. H. and Kokotovic P. V., Eigenvalue Placement in Two-time-scale Systems, in Proc. IFAC Symp. Large Scale Syst., Udine, Italy (1976), p. 321.
- [12] Zien L., An Upper Bound for the Singular Parameter in A Stable Singularly Perturbated System, *J. Franklin Inst.*, 295 (1973), p. 373.
- [13] Eiletberg E., Model Reduction and Perturbation Structures, *Int. J. Contr.*, 35(1982), p. 621.

A KIND OF AGGREGATED MODEL IMPROVED BY SINGULAR PERTURBATION

WANG BAILIN LI MIAN

(Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

In this paper, aggregation method is improved by the principle of singular perturbation, and a new kind of aggregated model is obtained. The model is perfect aggregative. When input of system is more complex than pulse function and jump function, this model provides response more accurately than other perfect aggregation models. The model can also provide a stable sub-optimal control of original system. The aggregation matrix of a class of systems can be found by iteration.