第10卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 3
1984 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1984

关于时变人口系统稳定性

王 浣 尘
(上 海 交 通 大 学)

摘　　要

本文讨论了时变人口系统稳定性的提法，给出了离散型时变人口系统稳定性的六个定理、六个推论和五个推广，说明了它们的实际意义，给出了临界总和生育率及其上临界和下临界，并给出了我国的数字实例.

人口系统稳定性问题在人口学界、系统工程界和控制论界都得到了重视. 文献[2]介绍了用控制理论研究人口系统稳定性的结果. 文献[5，6]在论述中国合理的人口控制U型方案的时候，应用了临界总和生育率 2.16 的数值. 文献[8]讨论了临界妇女生育率，并给出了连续型和离散型的计算公式. 以上这些都只是讨论定常人口系统的稳定性，其中假设人口按龄死亡率和生育模式等参数与时间无关. 事实上，这些参数都在不断地变化. 由于按龄死亡率特别是婴儿死亡率的下降，平均期望寿命就不断地增长. 例如日本在 40 年代的平均期望寿命小于 50 岁，目前已接近 80 岁；我国解放前约为 35 岁，到目前几乎翻了一倍. 根据预测，往后近十年内将以每年增加 0.2—0.3 岁的速度继续增加. 因此，从人口控制的实际需要来看，研究时变人口系统稳定性是有理论和实际意义的.

一、离散型人口模型及其有关符号的含义[2-6,9]

离散型人口模型是本文讨论时变人口系统稳定性的基础. 模型的基本形式为

$$\boldsymbol{x}(t+1)=H(t)\boldsymbol{x}(t)+\beta(t)\Lambda(t)K(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{w}(t). \tag{1}$$

式中 t 为离散时间；$\boldsymbol{x}(t)$ 为人口状态向量，它的每一分量 $x_a(t)\geqslant 0$，$a=0,1,\cdots,M$，表示在 t 时刻 $a\leqslant$ 年龄 $<a+1$ 的 a 岁组人口总数，M 为最大年龄组的年龄；$H(t)$ 为人口状态留存矩阵，

$$H(t)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \eta_0(t) & & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ & & & \eta_{M-1}(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

其中元素 $\eta_a(t)=1-d_a(t)$，$0\leqslant\eta_a<1$，为按龄留存率，$d_a(t)$ 为按龄死亡率. $\Lambda(t)$ 为生育模式矩阵，

本文于 1982 年 3 月 14 日收到.

$$\Lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_0(t) & \lambda_1(t) & \cdots & \lambda_M(t)\\ & & 0 & \end{bmatrix}.$$

其中 $\lambda_a(t)$ 为规格化按龄生育率，有

$$0\leqslant\lambda_a\leqslant 1,\ \sum_{a=\theta}^{\zeta}\lambda_a(t)=1,$$

当 $a\notin[\theta,\zeta]$ 时，有 $\lambda_a=0$；当 $a\in[\theta,\zeta]$ 时，有 $0<\lambda_a\leqslant 1$；$[\theta,\zeta]$ 为妇女育龄区间。$K(t)$ 为女性比例矩阵，$K(t)=\mathrm{diag}[k_0(t),k_1(t),\cdots,k_M(t)]$，其中 $k_a(t)$ 为在 t 时刻 a 岁组妇女数占同岁组总人口的比重，称为女性按龄比例系数，$0\leqslant k_a\leqslant 1$. $\beta(t)$ 为 t 时刻的当年存活总和生育率，即 $\beta(t)=\sum_{a=\theta}^{\zeta}b_a(t)$. 其中妇女按龄当年存活婴儿生育率 $b_a(t)$ 为 t 时刻 a 岁组妇女在 $[t,t+1)$ 时间内所生育且存活到 $t+1$ 时刻的当年存活婴儿的比率. $\beta(t)\geqslant 0$. $\boldsymbol{w}(t)$ 为人口扰动向量，可涉及诸如迁移、天灾、战争等. 在不计及外扰动时的转化形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t)=H_\pi(t)\boldsymbol{x}_0^M(t), & (2)\\ \boldsymbol{x}_0^M(t+1)=\Gamma(t)\boldsymbol{x}_0^M(t). & (3)\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{x}_0^M(t)$ 为人口出生向量，即 $\boldsymbol{x}_0^M(t)\triangleq[x_0(t),x_0(t-1),\cdots,x_0(t-M)]^T$. $H_\pi(t)$ 为累计留存矩阵，即 $H_\pi(t)=\mathrm{diag}[\eta_{\pi0}(t),\eta_{\pi1}(t),\cdots,\eta_{\pi M}(t)]$，其中

$$\eta_{\pi a}(t)=\prod_{j=1}^{a}\eta_{a-j}(t-j),\ a=0,1,\cdots,M,$$

展开后有 $\eta_{\pi0}(t)=1$，$\eta_{\pi1}(t)=\eta_0(t-1)$，$\eta_{\pi2}(t)=\eta_0(t-2)\eta_1(t-1),\cdots\cdots$. 这里 $\eta_{\pi a}(t)$ 指的是 t 时刻为 a 岁组的人口与在 $t-a$ 时刻为 0 岁组人口(只考虑自然死亡)之比，称之为累计留存率. $\Gamma(t)$ 为出生人口转移矩阵，

$$\Gamma(t)=\begin{bmatrix}\gamma_0(t) & \gamma_1(t) & \cdots & \gamma_M(t)\\ 1 & & \mathbf{0} & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ \mathbf{0} & & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

其中

$$\gamma_a(t)=\beta(t)k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t),\quad a=0,1,\cdots,M. \tag{4}$$

二、时变人口系统稳定性问题的提法

对于定常系统通常是按李雅普诺夫意义下的稳定性来进行讨论的，而对于时变系统则有多种不同的提法。时变系统通常不存在一个对时间不变的平衡工作点，在时变参数和特定的“基本扰动”条件下往往存在一条“平衡轨线”，稳定性就可相对于这条平衡轨线来讨论. 有一种较为一般性的提法是：在给定的扰动和给定的外界条件下，对于一个确定的准则(判断标准)来说，这个系统的运行状态是否使人满意[1]? 上述关于时变系统稳定性的提法，可以被理解为对时变人口系统动态品质的一般性要求，这里暂且称之为“稳定性”问题. 本文采用如下的提法：在某种规定的时间区间内，在特定的外加基本扰动下，系统的运动状态能否保持在指定的界限内. 以下将采用离散模型先对 $x_0(t)$ 进行讨论，

然后推广到 $x_a(t)$ 和总人口 $N(t)$. 至于外加基本扰动,假设 $\boldsymbol{w}(t)=0$. 测验稳定性用的附加扰动,可转化为等效的初态扰动.

三、离散型时变人口系统关于 $x_0(t)$ 的稳定性

定义

$$\beta_c(t) \triangleq \left(\sum_{a=\theta}^{\zeta} k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t)\right)^{-1}. \tag{5}$$

$\beta_c(t)$ 为当年存活临界总和生育率,它对应于婴儿在当年年底存活的 $x_0(t)$. 总和生育率的"上临界值" $\beta_{c+}(t)$ 和"下临界值" $\beta_{c-}(t)$ 为

$$\beta_{c+}(t) \triangleq \left\{\sum_{a=\theta}^{\zeta} k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t)(x_0(t-a)/\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\})\right\}^{-1}, \tag{6}$$

$$\beta_{c-}(t) \triangleq \left\{\sum_{a=\theta}^{\zeta} k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t)(x_0(t-a)/\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\})\right\}^{-1}. \tag{7}$$

通常有

$$\beta_{c-}(t) \leqslant \beta_c(t) \leqslant \beta_{c+}(t). \tag{8}$$

当

$$\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\} = \max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}$$

时,有

$$\beta_{c-}(t) = \beta_c(t) = \beta_{c+}(t).$$

为了便于实际应用和便于表述实际人口发展过程的特征,因而分成以下六个定理和六个推论来叙述.

定理 1. 当 $\beta(t) > \beta_c(t)$ 时,必有

$$x_0(t+1) > \min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\} \geqslant \min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\} \geqslant \cdots$$
$$\geqslant \min_{a\in[0,\zeta+\delta],\delta=0,1,2,\cdots}\{x_0(t-a)\}.$$

证明. 由式(4),(5)可得

$$\sum_{a=0}^{M}\gamma_a(t) = \sum_{a=\theta}^{\zeta}\gamma_a(t) = \beta(t)/\beta_c(t). \tag{9}$$

由式(3)得 $x_0(t+1)=\sum_{a=\theta}^{\zeta}\gamma_a(t)x_0(t-a)$, 并考虑到 $\gamma_a(t)\geqslant 0$, $x_0(t)\geqslant 0$, 即有

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &\geqslant \sum_{a=\theta}^{\zeta}\{\gamma_a(t)\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\} \\ &= \min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\cdot\beta(t)/\beta_c(t) > \min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

显然,

$$\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\} \geqslant \min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\}, \tag{11}$$

$$\min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\} \geqslant \min_{a\in[0,\zeta+\delta],\delta=0,1,2,\cdots}\{x_0(t-a)\}. \tag{12}$$

结合式(10)到(12),定理 1 得证.

推论 1. 当 $\beta(t) > \beta_c(t)$, $t > t_1$ 时，必有

$$\min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\} < m(0) < m(1) < \cdots < m(k),$$

其中

$$m(k) \triangleq \min_{t\in[t_1+1+k(\zeta+1),\, t_1+(k+1)(\zeta+1)]} \{x_0(t)\}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

这一推论的物理概念为，以 $(\zeta + 1)$ 年为单位把时间分段，各个时间段落相衔接而不重迭，当 $\beta(t)$ 大于其临界值 $\beta_c(t)$ 时，各段落中 x_0 的最小值将随着时间的推进而不断地增大．把这种现象称为“逐段下限增长”．

证明．设 $m(0) = x_0(t_q)$, $t_q \in [t_1 + 1,\ t_1 + \zeta + 1]$．由定理 1 得

$$x_0(t_1 + 1) > \min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\}, \quad x_0(t_1 + 2) > \min\{x_0(t_1 + 1),$$

$$\min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\}\} \geqslant \min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\}, \cdots\cdots.$$

依此类推可得

$$x_0(t_q) > \min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\},$$

于是可得推论中 $k = 0$ 的部分，并可得 $k > 0$ 的部分．

定理 2. 当 $\beta(t) < \beta_c(t)$ 时，必有

$$x_0(t + 1) < \max_{a\in[\theta,\zeta]} \{x_0(t - a)\} \leqslant \max_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t - a)\} \leqslant \cdots \leqslant \max_{a\in[0,\zeta+\delta]} \{x_0(t - a)\},$$

$$\delta = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明：由式(3)可导出

$$x_0(t + 1) = \sum_{a=\theta}^{\zeta} \gamma_a(t) x_0(t - a) \leqslant \sum_{a=\theta}^{\zeta} \{\gamma_a(t) \cdot \max_{a\in[\theta,\zeta]} \{x_0(t-a)\}\}$$

$$< \max_{a\in[\theta,\zeta]} \{x_0(t - a)\}. \tag{13}$$

仿照定理 1 的思路，可导出其余部分，定理 2 得证．

推论 2. 当 $\beta(t) < \beta_c(t)$, $t > t_1$ 时，必有

$$\max_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\} > M(0) > M(1) > \cdots > M(k).$$

其中

$$M(k) \triangleq \max_{t\in[t_1+1+k(\zeta+1),\, t_1+(k+1)(\zeta+1)]} \{x_0(t)\}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

这一推论的物理概念同推论 1 相仿，相应的现象可称为“逐段上限衰减”．证明从略．

定理 3. 当 $\beta(t) = \beta_c(t)$ 时，必有

$$\min_{a\in[0,\zeta+\delta],\,\delta=0,1,2,\cdots} \{x_0(t - a)\} \leqslant \cdots \leqslant \min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t - a)\}$$

$$\leqslant \min_{a\in[\theta,\zeta]} \{x_0(t - a)\} \leqslant x_0(t + 1) \leqslant \max_{a\in[\theta,\zeta]} \{x_0(t - a)\}$$

$$\leqslant \max_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t - a)\} \leqslant \cdots \leqslant \max_{a\in[0,\zeta+\delta],\,\delta=0,1,2,\cdots} \{x_0(t - a)\}.$$

推论 3. 当 $\beta(t) = \beta_c(t)$, $t > t_1$ 时，必有

$$\min_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\} \leqslant m(0) \leqslant m(1) \leqslant \cdots \leqslant m(k)$$

$$\leqslant x_0(t)|_{t\to\infty} \leqslant M(k) \leqslant \cdots \leqslant M(1) \leqslant M(0)$$

$$\leqslant \max_{a\in[0,\zeta]} \{x_0(t_1 - a)\}.$$

这个推论的物理意义是，当 $\beta(t)=\beta_c(t)$ 时，各时间段落中 $x_0(t)$ 的最大值和最小值，随着时间的推进，决不会越出以前各段的最大值和最小值的界限. 这种现象可称为"逐段上下限不发散".

定理 4. 当 $\beta(t)=\beta_c(t)$，而且满足 $0<\lambda_a(t)<1$，$0<k_a(t)<1$，$0<\eta_{\pi a}(t)<1$，$a\in[\theta,\zeta]$，以及 $\min\limits_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}<\max\limits_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}$ 时，必有

$$\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}<x_0(t+1)<\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}.$$

这个定理的意思是，只要全社会的妇女生育不是集中在一个年龄组上，而历年出生的婴儿数又不是绝对相等的话，则当 $\beta(t)=\beta_c(t)$ 时，$t+1$ 时刻零岁组人口数必然处在定理中所给出的上限和下限之内.

推论 4. 在满足定理 4 的条件下，必有 $\lim\limits_{t\to\infty}x_0(t)=x_c$. 其中 $x_0(t)$ 为一时间序列，x_c 为一常数，且满足

$$\min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\}<x_c<\max_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\}.$$

这个推论的物理概念是，在满足所给的条件下，$x_0(t)$ 将逐步逼近给定的上下限之间的某个常数. 这就给出了收敛的充分条件.

证明. 由定理 3，4 和推论 3 可得

$$\begin{aligned}&\min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t_1-a)\}<m(0)<m(1)<\cdots<m(k)\\&<x_0(t)|_{t\to\infty}<M(k)<\cdots<M(1)<M(0)<\max_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t_1-a)\}.\end{aligned}\tag{14}$$

再进一步证明 $x_0(t)|_{t\to\infty}$ 存在着一个极限，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x_0(t)=x_c$. 为此，设

$$\alpha_a(t)\triangleq k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t)\Big/\sum_{a=\theta}^{\zeta}k_a(t)\lambda_a(t)\eta_{\pi a}(t),$$

按所给条件可知 $0<\alpha_a(t)<1$，因而可设 $\alpha_a(t)$ 在 $a\in[\theta,\zeta]$ 和 $t\geqslant0$ 的区域上存在一个最小值，记为 $\alpha_{\min}>0$. 由所给条件可知 $0<\alpha_{\min}\leqslant1/2$. 同时，按式(4)和式(5)可得

$$\begin{aligned}x_0(t+1)&=\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}-\sum_{a=\theta}^{\zeta}\alpha_a(t)\big(\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}-x_0(t-a)\big)\\&<\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}-\alpha_{\min}\big(\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}-\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\big).\end{aligned}$$

同理可得

$$x_0(t+1)>\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}+\alpha_{\min}\big(\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}-\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\big).$$

按定理 3 和推论 3 把 a 的区间改成 $a\in[0,\zeta]$ 时，上述两式仍然成立，并有

$$\begin{aligned}&M(k+1)<M(k)-\alpha_{\min}(M(k)-m(k)),\\&m(k+1)>m(k)+\alpha_{\min}(M(k)-m(k)),\\&\Delta(k+1)<(1-2\alpha_{\min})\Delta(k).\end{aligned}$$

式中 $\Delta(k)\triangleq M(k)-m(k)>0$，$k=0,1,2,\cdots$；$t$，$t_1$，$k$，$M(k)$，$m(k)$ 等之间的关系见推论 1 和 2. 于是有

$$\Delta(k+\omega)<(1-2\alpha_{\min})^{\omega}\Delta(k).$$

由于 $0<\alpha_{\min}\leqslant1/2$，必有 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\Delta(k+\omega)=0$. 这样当

$$t\in[t_1+1+k(\zeta+1),\ t_1+(k+1)(\zeta+1)]$$

时，有 $m(k)\leqslant x_0(t)\leqslant M(k)$. 因此，$x_0(t)|_{t\to\infty}$ 必然收敛于某个定值 x_c，即

$$\lim_{t\to\infty}x_0(t)=x_c.$$

定理 5. $\beta_{c-}(t)<\beta(t)<\beta_{c+}(t)$ 是

$$\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}<x_0(t+1)<\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}$$

的充分必要条件.

证明：由式(6),(7)可得

$$x_0(t+1)=\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\beta(t)/\beta_{c+}(t),\tag{15}$$

$$x_0(t+1)=\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\beta(t)/\beta_{c-}(t).\tag{16}$$

由 $\beta(t)$ 的条件定理即可得证.

推论 5. 当 $\beta_{c-}(t)<\beta_c(t)<\beta_{c+}(t)$ 时，$\beta_{c-}(t)<\beta(t)<\beta_{c+}(t)$ 是 $\lim\limits_{t\to\infty}x_0(t)=x_c$ 的充分条件，其中 x_c 为某一常数，它满足条件

$$\min_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\}<x_c<\max_{a\in[0,\zeta]}\{x_0(t-a)\}.$$

证明：由定理 5，仿照定理 4 和推论 4 的思路也可导出式 (14). 再假设存在一个 $\delta_{\min}$ 满足 $0<\delta_{\min}\leqslant\min\{\delta_+,\delta_-\}$，$0<\delta_+<1$，$0<\delta_-<1$，使不等式

$$\beta_{c-}(t)<(1+\delta_{\min})\beta_{c-}(t)\leqslant(1+\delta_-)\beta_c(t)\leqslant\beta(t)\leqslant(1-\delta_+)\beta_{c+}(t)$$
$$\leqslant(1-\delta_{\min})\beta_{c+}(t)<\beta_{c+}(t)$$

成立，按式(15),(16)经过迭代推导可得

$$M(k+1)\leqslant(1-\delta_{\min})M(k),$$
$$m(k+1)\geqslant(1+\delta_{\min})m(k),$$
$$\Delta(k+1)\leqslant(1-\delta_{\min})\Delta(k),$$

即有 $\Delta(k+\omega)\leqslant(1-\delta_{\min})^\omega\Delta(k)$，必有 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\Delta(k+\omega)=0$. 因此有

$$\lim_{t\to\infty}x_0(t)=x_c.$$

定理 6. $\beta_{c-}(t)\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_{c+}(t)$ 是

$$\min_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}\leqslant x_0(t+1)\leqslant\max_{a\in[\theta,\zeta]}\{x_0(t-a)\}$$

的充分必要条件.

推论 6. (*a*) 当 $x_0(t-a)=x_c$，$\forall a\in[\theta,\zeta]$，其中 x_c 为某一正常数，则

$$\beta(t)=\beta_c(t)$$

是 $x_0(t+1)=x_c$ 的充分必要条件. (*b*) 当 $x_0(t_1-a)=x_c$，$\forall a\in[0,\zeta]$，则当 $t>t_1$ 时，$\beta(t)=\beta_c(t)$ 是所有 $x_0(t)=x_c$ 的充分必要条件.

这个推论的物理意义是，当人口状态进入平缓型[3]后永远维持平缓型的充分必要条件.

四、推　广

推广 1. 关于活产婴儿 $y(0)_t$ 的稳定性，只要引入婴儿当年留存率 $\eta_{0A}(t)$，并假定

$0 < \eta_{0A}(t) < 1$[9-11]，并把各定理和推论中的 $\beta_c(t)$，$\beta_{c+}(t)$，$\beta_{c-}(t)$，$\beta(t)$，$\eta_{\pi a}(t)$，$x_0(t)$，x_c 等改用 $\beta'_c(t)$，$\beta'_{c+}(t)$，$\beta'_{c-}(t)$，$\beta'(t)$，$\eta_{0A}(t-a)\eta_{\pi a}(t)$，$y(0)_t$，$y_c$ 等，则各定理和推论仍可应用.

推广 2. 如果所有的 $k_a(t)$，$\lambda_a(t)$，$\eta_{0A}(t)$，$\eta_{\pi a}(t)$，$\beta'_c(t)$ 均与时间无关，则定理和推论均可用于定常人口系统. 这时所得的 β'_c 就是文献[8]所获得的结果.

推广 3. 如果取 $k_a = 0.5$，β 都与夫妇平均的总和生育率相对应，则各定理和推论均仍可用.

推广 4. 关于 $x_a(t)$ 的稳定性. 由式(2)，当 $\eta_{\pi a}(t) \neq 0$ 时，$x_0(t-a)$ 均可用 $x_a(t)/\eta_{\pi a}(t)$ 代换，于是定理和推论都可用来讨论 $x_a(t)$ 的演变规律. 当 $0<\eta_{\pi a}<1$ 时，$x_a(t)$ 为有界的充分必要条件是 $x_0(t-a)$ 有界.

推广 5. 关于总人口 $N(t)$ 的稳定性问题. 由式(2)可得

$$N(t) = \sum_{a=0}^{M} \eta_{\pi a}(t) x_0(t-a),$$

因此在 $0 < \eta_{\pi a}(t) < 1$ 的条件下，$x_0(t)$ 发散趋向无穷大是 $N(t)$ 发散趋向无穷大的充分必要条件；$x_0(t)$ 衰减趋向于零是 $N(t)$ 衰减趋向于零的充分必要条件.

按我国 1975 年和 1978 年的采样数据和 x^2 分布生育模式[8]进行计算，结果见下表.

年份	临界总和生育率					
	k_a 取采样值			k_a 取 0.5		
	β_{c-}	β_c	β_{c+}	β_{c-}	β_c	β_{c+}
1975	1.58	2.17	3.06	1.53	2.10	2.97
1978	1.37	2.20	2.59	1.33	2.13	2.51

参 考 文 献

[1] 钱学森，宋健，工程控制论，科学出版社，(1980).
[2] 高桥安人，种族个体数的力学与控制，«计测と制御»，(I, II, III)，**11** (1972)，No. 8, 9, 10.
[3] 王浣尘，人口状态和人口的动态过程，西安交大学报，**14**(1980)，No. 1, 1—11.
[4] 王浣尘，人口控制的大系统结构及控制决策的综合，西安交大学报，**14**(1980)，No. 1, 13—14.
[5] Wang, H. C., et al., Population Control Systems, Large scale systems theory and applications, Ed. by A. Titli and M. G. Singh, Pergamon Press (1981).
[6] 王浣尘，人口动态过程和主劳力系数，中美系统分析会议论文集，学术出版社(1981).
[7] 宋健，王浣尘，于景元，李广元，人口动态过程的控制和大系统结构，系统工程论文集，科学出版社(1981).
[8] 宋健，于景元，人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率，自动化学报，**7**(1981)，No. 1, 1—12.
[9] 王浣尘，万百五，人口模型的两种转化形式，自动化学报，**6**(1980)，No. 4, 250—256.
[10] 王浣尘，人口数学模型及其变换，西北人口，(1981)，No. 2, 21—33.
[11] 王浣尘，关于人口统计中死亡率与平均寿命等的探讨，人口研究，(1980)，No. 2, 36—44.

ON THE STABILITY OF TIME-VARYING POPULATION SYSTEM

WANG HUANCHEN
(Shanghai Jiaotong University)

ABSTRACT

In this paper the way to study the stability of time-varying population system is discussed. Six theorems, six corollaries and five generalizations are given for the stability of the discrete time-varying population system. Their practical meanings are illustrated. The critical total fertility retes, their upper-bounds and lower-bounds, and some numerical examples with the data of China are given.