第10卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 3
1984 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1984

区段定理和回路增益定理

张 忠 桢
(华 中 工 学 院)

摘　　要

本文提出了新的区段定理和回路增益定理. 这两个定理包含和改进了文献[1]中的区段定理、文献[2]中的钝性(passivity)定理、文献[3]中的一个重新阐述的钝性定理以及文献[1]中的定理6、4、14.

一、序　言

本文从输入输出的观点着眼，给出了反馈动态系统的稳定性判据及其增益的一系列估计式. 关于输入输出方法中的一些基本概念见文献[1]. 本文所用的一些符号简单说明如下:

X_e 表示扩展的赋准范数的线性空间,对于其中的元素 x,其准范数 $\|x_T\|$ 又记为 $\|x\|_T$. 如果 x 是 t 的函数,则

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & t\leqslant T,\\ 0, & t>T.\end{cases}$$

如果 X_e 是个内积空间，则将 X_e 中任意两个元素 x 和 y 的准内积 $\langle x_T, y_T\rangle$ 简记为 $\langle x, y\rangle_T$. X 表示 X_e 的完全相容的子空间,对于 X 中的元素 x，其范数 $\|x\|=\lim\limits_{T\to\infty}\|x\|_T$. 例如 $L_{2e}=\{x: R_+\to R\,|\,x_T\in L_2, \forall T\in R_+\}$ 是一个扩展的函数空间,而

$$L_2=\left\{x:\ R_+\to R\,\middle|\,\left[\int_0^\infty |x(t)|^2dt\right]^{1/2}<\infty\right\}$$

显然是 L_{2e} 的完全相容的子空间.

本文所考虑的是 X_e 到其自身的一个多值映射. H 的增益(如果存在的话)定义为 $g(H)=\inf\{M\,|\,\|Hx\|_T\leqslant M\|x\|_T, \forall x\in X_e, \forall T\in R_+\}$.

假设 X_e 是个内积空间，X_e 上的某个 H 满足 $\langle Hx-ax, Hx-bx\rangle_T\leqslant 0$, $\forall x\in X_e$,

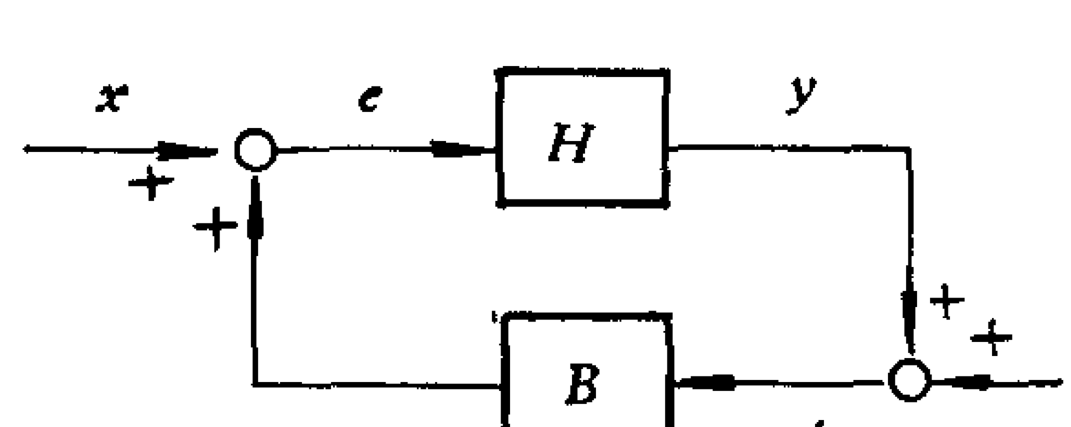

图　1

本文于1981年3月16日收到.

$\forall T\in R_+$，则H在区段 $\{a, b\}$ 内；如果上面的不等号反号，则H在区段 $\{a, b\}$ 外；如果 $\langle Hx,x\rangle_T\geqslant 0$，$\forall x\in X_e$，$\forall T\in R_+$，则$H$是正的.

图 1 所示的系统，其方程可表示为

$$e=x+z,\quad y=He,\quad f=u+y,\quad z=Bf. \tag{Φ}$$

其中H和B是X_e上的关系，输入 $x, u\in X$，而相应的误差信号 e, f 和输出 $y, z\in X_e$. 这里X_e是一个扩展的内积空间，而X是X_e的完全相容的子空间.

如果 $\forall x, u\in X$，相应地有 1) $e, f, y, z\in X$；2) 存在常数M和N，使得 $\|e\|$，$\|f\|$，$\|y\|$，$\|z\|\leqslant M(\|x\|+\|u\|)+N$，则系统 (Φ) 是输入-输出稳定的.

二、主要结果

定理 1（区段定理）. 考虑系统 (Φ)，假设关系H和B满足

$$\langle a'B\xi-a\xi,\ b'B\xi-b\xi\rangle_T\leqslant\alpha, \qquad \forall T\in R_+,\ \forall\xi\in X_e. \tag{1}$$

$$\langle c'H\xi-c\xi,\ d'H\xi-d\xi\rangle_T\leqslant\beta, \tag{2}$$

其中 $a', a, b', b, c', c, d', d, \alpha$ 和 β 都是实常数. 如果以下条件 1) 或 2) 成立，则 $\forall x, u\in X$，相应地有 $e, f, y, z\in X$. 系统 (Φ) 是输入-输出稳定的.

1) 存在实数 $k>0$，使得 $\Delta_1=a'b'+kcd>0$ 或 $\Delta_2=ab+kc'd'>0$，$4\Delta_1\Delta_2-\Delta_3^2>0$，这里 $\Delta_3=(ab'+a'b)+k(cd'+c'd)$；

2) 假设存在实常数 γ 和 δ，使得H还满足

$$\|H\xi\|_T\leqslant\gamma\|\xi\|_T+\delta,\quad \forall T\in R_+,\quad \forall\xi\in X_e, \tag{3}$$

并且存在实数 $k>0$，使得 $\Delta_1-\gamma|\Delta_3|>0$，$\Delta_2=ab+kc'd'=0$，其中 Δ_1 和 Δ_3 的表达式同 1).

引理 1. 假设 $A\in R^{n\times n}$ 是正定对称矩阵，$b\in R^n$ 和 $c\in R$. 若 $v\in R^n$ 满足

$$v'Av\leqslant b'v+c, \tag{4}$$

则存在仅仅依赖于A，b和c的常数r，使 $\|v\|\leqslant r$. 其中上标“$'$”表示转置，$\|\cdot\|$表示欧氏范数.

证明. 将(4)式改写为

$$(v-A^{-1}b/2)'A(v-A^{-1}b/2)\leqslant b'A^{-1}b/4+c,$$

由于R^n中的任何范数是等价的，存在一个常数l，使

$$\|v-A^{-1}b/2\|\leqslant l(b'A^{-1}b/4+c)^{1/2},$$

因此

$$\|v\|\leqslant\|A^{-1}b\|/2+l(b'A^{-1}b/4+c)^{1/2}\triangleq r. \tag{5}$$

定理 1 的证明. 1) 系统 (Φ) 的方程可改写为 $H_e=f-u$，$Bf=e-x$，则

$$\forall x, u\in X,\quad \forall T\in R_+,$$

有

$$\langle Bf, f\rangle_T=\langle e-x, f\rangle_T=\langle e, f\rangle_T-\langle x, f\rangle_T, \tag{6}$$

$$\langle H_e, e\rangle_T=\langle f-u, e\rangle_T=\langle f, e\rangle_T-\langle u, e\rangle_T. \tag{7}$$

(6)式乘以 $(ab'+a'b)$ 加上(7)式乘以 $k(cd'+c'd)$ 得

$$(ab'+a'b)\langle Bf, f\rangle_T+k(cd'+c'd)\langle H_e, e\rangle_T=[(ab'+a'b)+k(cd'+c'd)]$$

$$\cdot \langle e, f\rangle_T - (ab' + a'b)\langle x, f\rangle_T - k(cd' + c'd)\langle u, e\rangle_T. \tag{8}$$

在(1)式中令 $\xi = f$，并考虑到 $Bf = e - x$，可得

$$a'b'\|e\|_T^2 + a'b'\|x\|_T^2 - 2a'b'\langle x, e\rangle_T + ab\|f\|_T^2 - (ab' + a'b)\langle Bf, f\rangle_T \leqslant \alpha, \tag{9}$$

同样，从(2)式可得

$$c'd'\|f\|_T^2 + c'd'\|u\|_T^2 - 2c'd'\langle u, f\rangle_T + cd\|e\|_T^2 - (cd' + c'd)\langle H_e, e\rangle_T \leqslant \beta, \tag{10}$$

(9)式加上(10)式乘以 $k(k > 0)$ 后将(8)式代入，然后对其中的内积项利用 Schwarz 不等式，整理后得

$$\Delta_1\|e\|_T^2 + \Delta_2\|f\|_T^2 - |\Delta_3| \cdot \|e\|_T\|f\|_T \leqslant \Delta_4\|e\|_T + \Delta_5\|f\|_T + \Delta_6. \tag{11}$$

其中

$$\Delta_1 = a'b' + kcd; \quad \Delta_2 = ab + kc'd'; \quad \Delta_3 = (ab' + a'b) + k(cd' + c'd);$$
$$\Delta_4 = 2|a'b'| \cdot \|x\|_T + k|cd' + c'd| \cdot \|u\|_T;$$
$$\Delta_5 = |ab' + a'b| \cdot \|x\|_T + 2k|c'd'| \cdot \|u\|_T;$$
$$\Delta_6 = -a'b'\|x\|_T^2 - kc'd'\|u\|_T^2 + \alpha + k\beta.$$

因为假设 $\Delta_1 > 0$（或 $\Delta_2 > 0$），$4\Delta_1\Delta_2 - \Delta_3^2 > 0$，(11) 式左边是 $\|e\|_T$ 和 $\|f\|_T$ 的正定二次型，根据引理 1 存在一个常数 $r(\|x\|_T, \|u\|_T)$，使得

$$\|e\|_T \leqslant (\|e\|_T^2 + \|f\|_T^2)^{1/2} \leqslant r(\|x\|_T, \|u\|_T),$$
$$\|f\|_T \leqslant (\|e\|_T^2 + \|f\|_T^2)^{1/2} \leqslant r(\|x\|_T, \|u\|_T).$$

令上两式中的 $T \to \infty$，所有下标 T 可去掉，于是

$$\|e\| \leqslant r(\|x\|, \|u\|) < \infty, \ \|f\| \leqslant r(\|x\|, \|u\|) < \infty,$$

所以 $e, f \in X$. 由 $e = x + z$, $f = u + y$ 可得 $y, z \in X$.

2) 这时在(11)式中 $\Delta_2 = 0$. 由(3)式有

$$\|He\|_T = \|f - u\|_T \leqslant \gamma\|e\|_T + \delta, \quad \|f\|_T \leqslant \|u\|_T + \gamma\|e\|_T + \delta,$$

利用上式可将(11)式改写为

$$(\Delta_1 - \gamma|\Delta_3|)\|e\|_T^2 \leqslant (|\Delta_3| \cdot \|u\|_T + \delta|\Delta_3| + \Delta_4 + \gamma\Delta_5)\|e\|_T + (\Delta_5\|u\|_T + \delta\Delta_5 + \Delta_6),$$

利用引理 1 可得 $\|e\|_T \leqslant r(\|x\|_T, \|u\|_T)$. 令 $T \to \infty$ 得 $\|e\| \leqslant r(\|x\|, \|u\|) < \infty$. 所以 $e \in X$. 在 $\|y\|_T = \|He\|_T \leqslant \gamma\|e\|_T + \delta$ 中取 $T \to \infty$ 得 $\|y\| \leqslant \gamma\|e\| + \delta < \infty$，所以 $y \in X$. 由 $e = x + z$, $f = u + y$ 可得 $z, f \in X$.

应用引理 1 中的(5)式于情形 1)，不难从(11)式得到

$$\|e\| \leqslant M(\|x\| + \|u\|) + N, \quad \|f\| \leqslant M(\|x\| + \|u\|) + N.$$

其中M和N是实常数. 从 $e = x + z$, $f = u + y$ 可得

$$\|y\| \leqslant (M + 1)(\|x\| + \|u\|) + N, \quad \|z\| \leqslant (M + 1)(\|x\| + \|u\|) + N.$$

在情形 2) 也可得到赋于 e, f, y, z 的类似的不等式，所以系统 (Φ) 是输入-输出稳定的.

如果 $(ab' + a'b)/(cd' + c'd) < 0$，在定理 1 中取 $k = (ab' + a'b)/(cd' + c'd)$ 立即可得如下推论.

推论. 考虑系统 (Φ)，假设关系 H 和 B 满足

$$\begin{aligned}&\langle a'B\xi - a\xi,\ b'B\xi - b\xi\rangle_T \leqslant \alpha,\\&\langle c'H\xi - c\xi,\ d'H\xi - d\xi\rangle_T \leqslant \beta,\end{aligned}\quad \forall T\in R_+,\ \forall \xi\in X_e.$$

其中 a', a, b', b, c', c, d', d、α 和 β 都是实常数．如果以下条件 1) 或 2) 成立，则系统 (Φ) 是输入输出稳定的．

1) $\Delta_0=(ab'+a'b)/(cd'+c'd)<0$，$\Delta_1=a'b'-\Delta_0 cd>0$，$\Delta_2=ab-\Delta_0 c'd'>0$；

2) $\Delta_0=(ab'+a'b)/(cd'+c'd)<0$，$\Delta_1=a'b'-\Delta_0 cd>0$，$\Delta_2=ab-\Delta_0 c'd'=0$，并且存在常数 γ 和 δ，使 H 满足

$$\|H\xi\|_T\leqslant \gamma\|\xi\|_T+\delta,\quad \forall T\in R_+,\quad \forall \xi\in X_e.$$

下面推导回路增益定理．设 H 是 X_e 上的关系，I 是恒等算子，a, b, c 和 d 是实常数。

引理 2. (1) H 在区段 $\{a, b\}$ 内（外），则 $H+kI$ 在区段 $\{a+k, b+k\}$ 内（外），k 是个常数．

(2) H 在区段 $\{a, b\}$ 内(外)，则 kH 在区段 $\{ka, kb\}$ 内(外)，$k\neq 0$．

(3) H 在区段 $\{a, b\}$ 内(外)，则 1) $ab>0$ 时，H^{-1} 在区段 $\{a^{-1}, b^{-1}\}$ 内（外）；2) $ab<0$ 时，H^{-1} 在区段 $\{a^{-1}, b^{-1}\}$ 外(内)．

(4) $cH+dI$ 是正的，则 1) $d>0$ 时，H^{-1} 在区段 $\left\{0, -\dfrac{c}{d}\right\}$ 外；2) $d<0$ 时，H^{-1} 在区段 $\{0, -c/d\}$ 内．

引理 3. 设 $a\neq b$，则

(1) H 在区段 $\{a, b\}$ 内，$H'\triangleq H-(a+b)I/2$，则 $g(H')\leqslant |b-a|/2$．

(2) $H'\triangleq[H^{-1}-(a+b)I/2ab]^{-1}$，如果 $ab>0$，H 在区段 $\{a, b\}$ 外，或 $ab<0$，H 在区段 $\{a, b\}$ 内，则 $g(H')\leqslant|2ab/(b-a)|$．

(3) $cH+dI$ 是正的，$d>0$，$H'\triangleq(H^{-1}+cI/2d)^{-1}$，则 $g(H')\leqslant 2d/|c|$．

引理 4. 考虑系统 (Φ)，变换式

$$e'=e+Cf-Cu,\quad f'=f, \tag{T}$$

将系统 (Φ) 变为

$$e'=x-Cu+B'f',\quad f'=u+H'e'. \tag{Φ'}$$

其中 C 是线性算子；$B'=B+C$；$H'=(H^{-1}+C)^{-1}$．从变换式 (T) 可以看到系统 (Φ) 和 (Φ') 在输入输出稳定性方面是等价的．

定义 1. 设 $u=0$ 或 $x=0$ 时系统 (φ) 是稳定的，则定义回路增益如下：

$u=0$ 时，
$$\mu_e=\inf\{M\mid \|e\|\leqslant M\|x\|,\ \forall x\in X\},$$
$$\mu_y=\inf\{M\mid \|y\|\leqslant M\|x\|,\ \forall x\in X\};$$

$x=0$ 时，
$$\mu_f=\inf\{M\mid \|f\|\leqslant M\|u\|,\ \forall u\in X\},$$
$$\mu_z=\inf\{M\mid \|z\|\leqslant M\|u\|,\ \forall u\in X\}.$$

定理 2（回路增益定理）. 考虑系统 (Φ)，假设

(1) B 在区段 $\{a, b\}$ 内，H 在区段 $\{c, d\}$ 外，

1) 若 $\Delta_0=(a+b)/(c+d)>0$，$\Delta_1=1-cd(a+b)/(c+d)>0$，$\Delta_2=ab-$

$(a+b)/(c+d)>0$，则

$$\mu_c \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{1}{\Delta_1}+\frac{(a+b)^2}{4\Delta_2}-1\right)\right]^{1/2}+\frac{1}{\Delta_1},$$

$$\mu_y \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_2}\left(\frac{1}{\Delta_1}+\frac{(a+b)^2}{4\Delta_2}-1\right)\right]^{1/2}+\frac{|a+b|}{2\Delta_2};$$

$$\mu_f \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_2}\left(\frac{(a+b)^2}{4\Delta_1}+\frac{\Delta_0^2}{\Delta_2}+\Delta_0\right)\right]^{1/2}+\frac{\Delta_0}{\Delta_2},$$

$$\mu_z \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{(a+b)^2}{4\Delta_1}+\frac{\Delta_0^2}{\Delta_2}+\Delta_0\right)\right]^{1/2}+\frac{|a+b|}{2\Delta_1}.$$

2) 若 $\Delta_1=1-\dfrac{a+b}{c+d}cd=0$，$cd>0$，$\left|\dfrac{b-a}{d-c}cd\right|<1$，则

$$\mu_c \leqslant \frac{|d-c|+|(a+b)cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|},\quad \mu_y \leqslant \frac{2|cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|},$$

$$\mu_f \leqslant \frac{|d-c|+|(a+b)cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|},$$

$$\mu_z \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)\frac{|d-c|+|(a+b)cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|}.$$

(2) B 在区段 $\{a, b\}$ 内，H 在区段 $\{c, d\}$ 内，

1) 若 $\Delta_0=\dfrac{a+b}{c+d}<0$，$\Delta_1=1-\dfrac{a+b}{c+d}cd>0$，$\Delta_2=ab-\dfrac{a+b}{c+d}>0$，则 μ_c 和 μ_y 的估计式同(1)1).

2) 若 $\Delta_1=1-\dfrac{a+b}{c+d}cd=0$，$cd<0$，$\left|\dfrac{b-a}{d-c}cd\right|<1$，则 μ_c，μ_y，μ_f 和 μ_z 的估计式同(1)2).

3) 若 $a+b=0$，$|a|\max\{|c|, |d|\}<1$，则

$$\mu_c \leqslant [1-|a|\max\{|c|, |d|\}]^{-1},\quad \mu_y \leqslant \frac{\max\{|c|, |d|\}}{1-|a|\max\{|c|, |d|\}},$$

$$\mu_f \leqslant [1-|a|\max\{|c|, |d|\}]^{-1},\quad \mu_z \leqslant |a|[1-|a|\max\{|c|, |d|\}]^{-1}.$$

(3) B 在区段 $\{a, b\}$ 内，$cH+dI$ 是正的，

1) 若 $\Delta_0=\dfrac{a+b}{c}<0$，$\Delta_1=1+\dfrac{a+b}{c}d>0$，$\Delta_2=ab>0$，则

$$\mu_c \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{1}{\Delta_1}+\frac{(a-b)^2}{4\Delta_2}\right)\right]^{1/2}+\frac{1}{\Delta_1},$$

$$\mu_y \leqslant \left[\frac{1}{\Delta_2}\left(\frac{1}{\Delta_1}+\frac{(a-b)^2}{4\Delta_2}\right)\right]^{1/2}+\frac{|a+b|}{2\Delta_2};$$

$$\mu_f \leqslant \frac{|a+b|}{2(\Delta_1\Delta_2)^{1/2}},\quad \mu_z \leqslant \frac{|a+b|}{\Delta_1}.$$

2) 若 $\Delta_1=1+\dfrac{a+b}{c}d=0$，$d>0$，$\left|\dfrac{b-a}{b+a}\right|<1$，则

$$\mu_c \leqslant 2\left(1-\left|\frac{b-a}{b+a}\right|\right)^{-1},\quad \mu_y \leqslant \frac{2}{|b+a|-|b-a|},$$

$$\mu_f \leqslant 2\left(1-\left|\frac{b-a}{b+a}\right|\right)^{-1},$$

$$\mu_z \leqslant (|b-a|+|b+a|)\left(1-\left|\frac{b-a}{b+a}\right|\right)^{-1}.$$

(4) B 在区段 $\{a, b\}$ 外，H在区段 $\{c, d\}$ 外，

$$\Delta_0=\frac{a+b}{c+d}<0, \quad \Delta_1=-1+\frac{a+b}{c+d}cd>0, \quad \Delta_2=-ab+\frac{a+b}{c+d}>0,$$

则 μ_e, μ_y, μ_f 和 μ_z 的估计式同 (3) 1).

(5) $aB+bI$ 和 $cH+dI$ 是正的，$ac<0$, $b, d<0$, 则

$$\mu_e \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{-bd}\right)^{1/2}, \quad \mu_z \leqslant \frac{|a|}{-b}.$$

证明. 在 (11) 式中取 $k=-\Delta_0=-\dfrac{ab'+a'b}{cd'+c'd}$ 和 $\alpha=\beta=0$, 得

$$\Delta_1\|e\|_T^2+\Delta_2\|f\|_T^2 \leqslant \Delta_4\|e\|_T+\Delta_5\|f\|_T+\Delta_6,$$

配平方得

$$\Delta_1\left(\|e\|_T-\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}\right)^2+\Delta_2\left(\|f\|_T-\frac{\Delta_5}{2\Delta_2}\right)^2 \leqslant \frac{\Delta_4^2}{4\Delta_1}+\frac{\Delta_5^2}{4\Delta_2}+\Delta_6 \triangleq M,$$

由上式得

$$\Delta_1\left(\|e\|_T-\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}\right)^2 \leqslant M, \quad \Delta_2\left(\|f\|_T-\frac{\Delta_5}{2\Delta_2}\right)^2 \leqslant M,$$

$$\|e\|_T \leqslant \left(\frac{M}{\Delta_1}\right)^{1/2}+\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}, \quad \|f\|_T \leqslant \left(\frac{M}{\Delta_2}\right)^{1/2}+\frac{\Delta_5}{2\Delta_2},$$

取 $T\to\infty$ 得

$$\|e\| \leqslant (M/\Delta_1)^{1/2}+\Delta_4/2\Delta_1, \tag{12}$$

$$\|f\| \leqslant (M/\Delta_2)^{1/2}+\Delta_5/2\Delta_2. \tag{13}$$

其中

$$\Delta_1=a'b'-\Delta_0 cd; \quad \Delta_2=ab-\Delta_0 c'd';$$

$$\Delta_4=2|a'b'|\cdot\|x\|+|ab'+a'b|\cdot\|u\|;$$

$$\Delta_5=|ab'+a'b|\cdot\|x\|-2\Delta_0|c'd'|\cdot\|u\|;$$

$$\begin{aligned}M=&[(a'b')^2/\Delta_1+(ab'+a'b)^2/4\Delta_2-a'b']\cdot\|x\|^2+[(ab'+a'b)^2/4\Delta_1\\&+(\Delta_0c'd')^2/\Delta_2+\Delta_0c'd']\cdot\|u\|^2+|ab'\\&+a'b|(|a'b'|/\Delta_1+|\Delta_0c'd'|/\Delta_2)\|x\|\cdot\|u\|.\end{aligned}$$

利用(12)和(13)两式便可直接得到定理2(1)1),(2)1),(3)1)和(4),(5),(6).

下面证明定理 2(1)2). 引理 4 中系统 (Φ') 中的

$$C \triangleq -\frac{a+b}{2}I; \quad B'=B+C=B+\frac{-(a+b)}{2}I;$$

$$H'=(H^{-1}+C)^{-1}=\left[H^{-1}+\frac{-(a+b)}{2}I\right]^{-1}=\left[H^{-1}+\frac{-(c+d)}{2cd}I\right]^{-1},$$

$$\left(\Delta_1=1-\frac{a+b}{c+d}cd=0, \text{ 则 } a+b=\frac{c+d}{cd}\right).$$

由引理 3(1)可得 $g(B')\leqslant|b-a|/2$, 由引理 3(2)1) 可得 $g(H')\leqslant|2cd/(d-c)|$.

因为 $g(B')g(H') \leqslant |(b-a)cd/(d-c)| < 1$ (由假设), 根据小增益定理知系统 (Φ') 是稳定的, 根据引理 4 知系统 (Φ) 是稳定的.

下面计算回路增益. 在 (T) 和 (Φ') 式中令 $u=0$ 得 $e'=e+Cf$, $f'=f$; $e'=x+B'f'$, $f'=H'e'$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\|f'\| \leqslant g(H')\|e'\|,\\
&\|e'\| \leqslant \|x\| + g(B')\|f'\| \leqslant \|x\| + g(B')g(H')\|e'\|,\\
&\|e'\| \leqslant [1-g(B')g(H')]^{-1}\|x\| \leqslant (1-|(b-a)cd/(d-c)|)^{-1}\|x\|,\\
&\|e\| \leqslant \|e'\| + \|C\|\cdot\|f\| \leqslant [1+\|C\|g(H')]\|e'\| \leqslant (1+|a+b|/2\\
&\quad \cdot |2cd/(d-c)|)\cdot\left(1-\left|\frac{b-a}{d-c}cd\right|\right)^{-1}\|x\|\\
&= \frac{|d-c|+|(a+b)cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|}\|x\|.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\mu_e \leqslant \frac{|d-c|+|(a+b)cd|}{|d-c|-|(b-a)cd|},\\
&\|y\| = \|f\| = \|f'\| \leqslant g(H')\|e'\| \leqslant \left|\frac{2cd}{d-c}\right|\left(1-\left|\frac{b-a}{d-c}cd\right|\right)^{-1}\|x\|\\
&\quad = \frac{2cd}{|d-c|-|(b-a)cd|}\|x\|,\\
&\mu_y \leqslant \frac{2cd}{|d-c|-|(b-a)cd|}.
\end{aligned}
$$

如果令 (T) 和 (Φ') 两式中的 $x=0$, 经过类似的推导可得到 μ_f 和 μ_z 的估计式.

(2)2)和(3)2)的证明过程与上面类似,(2)3)的结果可直接由系统 (Φ) 得出, 在此不一一证明.

三、几点说明

在定理 1 及其推论中取 $a'=c'=1$ (或 $b'=d'=1$) 将不失一般性.

利用定理 1 可证明文献[1]中定理 6.1.33. 例如对于该定理的情形 (a) 可利用本文定理 1(1): 当 $\varepsilon>0$, $r>0$ 时取 $k=ab$; 当 $\varepsilon=0$, $r>0$ (或 $\varepsilon>0$, $r=0$) 时可取 $k=ab-\theta$. 其中 θ 是个充分小的正数. 文 [2] 中的钝性定理可直接利用本文推论 2) 证明. 而文[3]中的定理 2.1 与本文的推论 1) 实际上是等价的, 因为不难证明该定理中的(2.15)和(2.16)两式可分解为区段条件.

文[1]中的定理 6.1.33、文[2]中的钝性定理以及文[3]中的定理 2.1 中的参数都必须满足 $\Delta_0=(ab'+a'b)/(cd'+c'd)<0$, 事实上当 $\Delta_0 \geqslant 0$ 时系统也可以是稳定的. 例如 B 在区段 $\{1, 2\}$ 内, H 在区段 $\{10, 20\}$ 内, 利用定理 1, 取 $k=1$ 即可验证其稳定性.

利用定理 2(1), (2) 和 (3) 可直接验证文 [1] 中的定理 6.4.14. 在此仅指出以下两点:

(1) 在定理 6.4.14 中原书有两处错误, 其中一处是"B 是内锥 $(c, (1-\delta)r)$", 另

一处是"$\mu' = (\delta')^{-1}(|c| + r^{-1})$"。应为"$B$ 是内锥 $(-c, (1-\delta)r)$"及

"$\mu' = (\delta')^{-1}[|c| + (1-\delta)r]$"。

(2) 系统 (φ) 的有界度的定义与本文定义的增益 μ_e 和 μ_f 满足 $\delta \leqslant \mu_e^{-1}$，$\delta' \leqslant \mu_f^{-1}$。

参 考 文 献

[1] Michel, A. N. and Miller, R. K., Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical System, New York, Academic Press, 1977.

[2] Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., Feedback Systems: Inputoutput Properties, New York, Academic Press, 1975.

[3] Vidyasagar, M., L_2-stability of Interconnected Systems Using a Reformulation of the Passivity theorem, *IEEE Trans. Circuits and Sys.* CAS-**24** (1977) 637—645.

[4] Zames, G., On the Input-output Stability of Nonlinear Time-varying Feedback Systems, Pt. I and II, *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-**11** (2), 228—238 (1966); (3), 465—477 (1966).

SECTOR THEOREM AND LOOP GAIN THEOREM

ZHANG ZHONGZHEN

(Huazhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

In this paper a new sector theorem and a loop gain theorem are given. Those two theorems contain and improve the sector theorem presented in [1] by A. N. Michel and R. K. Miller, the passivity theorem presented in [2] by C. A. Desoer and M. Vidyasagar, and a reformulation of the passivity theorem presented in [3] by M. Vidyasagar as well as Theorem 6. 4. 14 in [1].