

线性定常系统的综合性最优控制问题

张 忠 兴

(华东工程学院)

摘 要

本文讨论了具有二次型性能指标的线性定常系统的降低性能指标灵敏度、降低轨迹灵敏度和配置闭环极点的综合性最优控制问题,提出了新的综合性能指标,从而得到了易于计算的结果;解决了多参数变化时降低轨迹灵敏度的综合性最优控制问题;推导了闭环特征值对 Q 阵的梯度阵公式,提出了一种配置互异的全部闭环极点 Q 阵算法,并给出了算例。

一、引 言

设线性定常受控系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^r$; A, B, C 为维数适当的定常阵。考虑如下的线性定常输出反馈控制律:

$$\mathbf{u} = K\mathbf{y} = KC\mathbf{x}, \quad (2)$$

相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (A + BKC)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3)$$

设其状态转移阵为 $\phi(t, 0)$ 。本文仅讨论(3)式渐近稳定的情况。在通常的单一最优控制问题中,要求最优的反馈增益阵 K 使二次型性能指标

$$J_1 = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'R\mathbf{u}) dt = \mathbf{x}_0'P\mathbf{x}_0 = \min. \quad (4)$$

其中权矩阵 Q, R 分别为非负定与正定的对称常数阵,

且

$$P = \int_0^{\infty} \phi'(t, 0)(Q + C'K'RKC)\phi(t, 0) dt. \quad (5)$$

有如下结果^[1-4]:

使 J_1 极小的 K 阵应满足下述必要条件:

$$\frac{\partial J_1}{\partial K} = 2(RKC + B'P)MC' = 0, \quad (6a)$$

$$P(A + BKC) + (A + BKC)'P + (Q + C'K'RKC) = 0, \quad (6b)$$

$$M(A + BKC)' + (A + BKC)M + \mathbf{x}_0\mathbf{x}_0' = 0. \quad (6c)$$

其中

$$M = \int_0^{\infty} \phi(t, 0)\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0'\phi'(t, 0)dt. \quad (7)$$

若将 J_1 修正为平均性能指标 $\hat{J}_1 = \text{tr}[P]^{[3]}$, 则以上各式中的 $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0'$, M 可分别用 I (单位阵) 和 $\hat{M} = \int_0^{\infty} \phi(t, 0)\phi'(t, 0)dt$ 代替.

事实上, 在具体设计时, 人们还应考虑: 1) 系统参数的变化对性能指标 J_1 或轨迹 \mathbf{x} 的影响; 2) 将闭环系统的极点配置到期望位置. 这就须将最优控制方法与灵敏度分析、极点配置方法结合起来进行研究. 本文将这一大类问题统称为综合性最优控制问题, 可分为以下三节标题所示的三种问题.

十多年来, 这三种问题受到广泛重视^[4-8]. 本文依据矩阵迹运算方面的公式^[2], 以直接的统一的方法对此进行讨论.

二、降低性能指标灵敏度的综合性最优控制问题

本问题与上节中单一的最优控制问题相类似, 只不过将目的改述为: 要求最优的反馈增益阵 K 使综合性能指标

$$J = \beta_1 J_1 + \beta_2 J_2 = \min. \quad (8)$$

其中 J_2 称为附加性能指标, 用于度量性能指标灵敏度, 应非负; β_1, β_2 是权系数, 取 $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ 或取 $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta \geq 0$.

若 J_2 取 J_1 对各个参数灵敏度的平方加权的总和^[4], 则导致最优解必要条件中出现关于 K 阵的四次方程, 难以计算其结果. 若 J_2 取各个参数变化时 J_1 的变化量的总和^[5], 则不能保证其非负. 本文在降低性能指标灵敏度的前提下, 为了尽量使得到的最优解必要条件方程线具有(6)式那样简便形式, 取

$$J_2 = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial J_1^0}{\partial D} \right) \left(\frac{\partial J_1^0}{\partial D} \right)' \right] / 4. \quad (9)$$

其中 $D = A + BKC$; J_1^0 称为“最优加权的准性能指标”,

$$J_1^0 \triangleq \int_0^{\infty} \mathbf{x}'(Q + C_0'K_0^*RK_0^*C_0)\mathbf{x}dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}'H\mathbf{x}dt = \mathbf{x}_0'S\mathbf{x}_0. \quad (10)$$

其中 C_0 阵为 C 阵的标称值; K_0^* 表示 A, B, C 阵均取标称值时使 J_1 极小的最优反馈增益阵, 它由方程(6)给定, 是一个常数阵. 因此最优加权阵 $H = Q + C_0'K_0^*RK_0^*C_0$ 也是一个常数阵. 不难看出, S 阵具有如下形式:

$$S = \int_0^{\infty} \phi'(t, 0)H\phi(t, 0)dt. \quad (11)$$

上述 J_1^0 可看成是原性能指标 J_1 的一次近似. 可以证明(见附录 1),

$$\frac{\partial J_1^0}{\partial D} = 2SM. \quad (12)$$

于是可得

$$J_2 = \text{tr}[SMMS]. \quad (13)$$

本问题有如下结果(证明见附录 1):

定理 1 (最优解定理).

由(1)到(5)式及(8)到(13)式所构成的本问题中,使综合性能指标 $J = \beta_1 J_1 + \beta_2 J_2$ 极小的最优反馈增益阵 K 应满足必要条件方程

$$\frac{\partial J}{\partial K} = 2[\beta_1(RKC + B'P)MC' + \beta_2 B'(\Lambda M + S\mu)C'] = 0, \quad (14a)$$

$$P(A + BKC) + (A + BKC)'P + (Q + C'K'RKC) = 0, \quad (14b)$$

$$S(A + BKC) + (A + BKC)'S + H = 0, \quad (14c)$$

$$\Lambda(A + BKC) + (A + BKC)'\Lambda + S^2M + MS^2 = 0, \quad (14d)$$

$$M(A + BKC)' + (A + BKC)M + \mathbf{x}_0 \mathbf{x}'_0 = 0. \quad (14e)$$

$$\mu(A + BKC)' + (A + BKC)\mu + M^2S + SM^2 = 0. \quad (14f)$$

其中

$$\Lambda = \int_0^\infty \phi'(t, 0)(S^2M + MS^2)\phi(t, 0)dt, \quad (15)$$

$$\mu = \int_0^\infty \phi(t, 0)(M^2S + SM^2)\phi'(t, 0)dt.$$

(14)式中 A, B, C 阵均取标称值,显然,可用求解(6)式的算法^[3]求解.若要缩小 J_1 与 J_2 间的误差,可用迭代算法.

三、降低轨迹灵敏度的综合性最优控制问题

本问题的提法与目的与上节所述相同,只是 J_2 用于度量轨迹灵敏度(亦应非负)^[6].本文一方面将文献[6]的结果予以推广;另一方面提出以轨迹积分平方误差作为 J_2 ^[2].

$$(1) \text{ 取 } J_2 = \int_0^\infty \sigma' \sigma dt^{[6]}. \quad (16a)$$

其中轨迹灵敏度 $\sigma = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mu} \equiv \mathbf{x}_\mu$ 满足如下方程:

$$\dot{\sigma} = \dot{\mathbf{x}}_\mu = D\sigma + D_\mu \mathbf{x}; \quad D_\mu = A_\mu + B_\mu KC + BKC_\mu. \quad (16b)$$

其中 μ 为独立变化的单参数(比如环境温度).在本问题中,综合性能指标取为

$$J = J_1 + \beta J_2.$$

有如下结果(证明见附录 2):

定理 2 (最优解定理).

由(1)到(5)式及(16)式所构成的本问题中,使综合性能指标 $J = J_1 + \beta J_2$ 极小的最优反馈增益阵 K 应满足必要条件方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K} = 2\{ & (RKC + B'P)MC' + \beta[B'(S_{11}M + S_{12}\mu_1 + S'_{12}\mu'_1 + S_{22}\mu_2)C' \\ & + B'_\mu(S'_{12}M + S_{22}\mu_1)C' + B'(S'_{12}M + S_{22}\mu_1)C'_\mu] \} = 0, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$P(A + BKC) + (A + BKC)'P + (Q + C'K'RKC) = 0, \quad (17b)$$

$$S_{11}(A + BKC) + (A + BKC)'S_{11} + S_{12}D_\mu + D'_\mu S'_{12} = 0, \quad (17c)$$

$$S_{12}(A + BKC) + (A + BKC)'S_{12} + D'_\mu S_{22} = 0, \quad (17d)$$

$$S_{22}(A + BKC) + (A + BKC)'S_{22} + I_n = 0, \quad (17e)$$

$$M(A + BKC)' + (A + BKC)M + \mathbf{x}_0\mathbf{x}'_0 = 0, \quad (17f)$$

$$\mu_1(A + BKC)' + (A + BKC)\mu_1 + D_\mu M = 0, \quad (17g)$$

$$\mu_2(A + BKC)' + (A + BKC)\mu_2 + \mu_1 D'_\mu + D_\mu \mu'_1 = 0. \quad (17h)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{bmatrix} &= \bar{S} = \int_0^\infty \phi'(t, 0) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \phi(t, 0) dt, \\ \begin{bmatrix} M & \mu'_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} &= T = \int_0^\infty \phi(t, 0) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0\mathbf{x}'_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi'(t, 0) dt. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

而

$$\phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t, 0) & 0 \\ \phi_{21} & \phi(t, 0) \end{bmatrix} \quad (19)$$

为如下 $2n \times 2n$ 增广系统的状态转移阵:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ D_\mu & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \boldsymbol{\sigma}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

(17)式中 A, B, C 阵均取标称值,且对单参数 μ 的变化率 A_μ, B_μ, C_μ 均为给定值;变化率 D_μ 可按(16b)式算得.

(2) 取

$$J_2 = \int_0^\infty (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) dt. \quad (21a)$$

其中 \mathbf{x}^0 为 A, B, C 阵取标称阵 A_0, B_0, C_0 时的闭环系统(3)的标称轨迹 $\mathbf{x}^0 = \phi^0(t, 0)\mathbf{x}_0$; $\phi^0(t, 0)$ 为相应的状态转移阵. 本问题中的综合性能指标仍为 $J = J_1 + \beta J_2$. 其中

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^0' Q \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}' R \mathbf{u}) dt = \mathbf{x}_0' P_0 \mathbf{x}_0, \\ P_0 &= \int_0^\infty \phi^{0'}(t, 0)(Q + C_0' K' R K C_0) \phi^0(t, 0) dt. \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

有如下结果(证明见附录3):

定理 3 (最优解定理).

由(1)到(5)式及(21)式所构成的本问题中,使综合性能指标 $J = J_1 + \beta J_2$ 极小的最优反馈增益阵 K 应满足必要条件方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K} &= 2\{(RKC_0 + B_0' P_0)M_0 C_0' + \beta[B'(S_1 \mu_1 - S_2 \mu_2)' C' \\ &\quad + B_0'(S_0 M_0 - S_2' \mu_2) C_0']\} = 0, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$P_0(A_0 + B_0 K C_0) + (A_0 + B_0 K C_0)' P_0 + (Q + C_0' K' R K C_0) = 0, \quad (22b)$$

$$S_0(A_0 + B_0 K C_0) + (A_0 + B_0 K C_0)' S_0 + I = 0, \quad (22c)$$

$$S_1(A + BKC) + (A + BKC)' S_1 + I = 0, \quad (22d)$$

$$S_2(A_0 + B_0 K C_0) + (A + BKC)' S_2 + I = 0, \quad (22e)$$

$$M_0(A_0 + B_0 K C_0)' + (A_0 + B_0 K C_0) M_0 + \mathbf{x}_0 \mathbf{x}'_0 = 0, \quad (22f)$$

$$\mu_1(A + BKC)' + (A + BKC) \mu_1 + \mathbf{x}_0 \mathbf{x}'_0 = 0, \quad (22g)$$

$$\mu_2(A_0 + B_0 K C_0)' + (A + BKC) \mu_2 + \mathbf{x}_0 \mathbf{x}'_0 = 0. \quad (22h)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \int_0^{\infty} \phi^{0'}(t, 0)\phi^0(t, 0)dt, & S_1 &= \int_0^{\infty} \phi'(t, 0)\phi(t, 0)dt, \\ S_2 &= \int_0^{\infty} \phi'(t, 0)\phi^0(t, 0)dt, & M_0 &= \int_0^{\infty} \phi^0(t, 0)\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0'\phi^{0'}(t, 0)dt, \\ \mu_1 &= \int_0^{\infty} \phi(t, 0)\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0'\phi(t, 0)dt, & \mu_2 &= \int_0^{\infty} \phi(t, 0)\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0'\phi^{0'}(t, 0)dt, \end{aligned} \right\} (23)$$

(22)式中标称值 A_0, B_0, C_0 及相应增量 $\delta A, \delta B, \delta C$ 均给定,

$$A = A_0 + \delta A, \quad B = B_0 + \delta B, \quad C = C_0 + \delta C.$$

显然,本方法可以用于多参数变化的情况,且未增加计算的复杂性,而文献[6]的方法只适用于单参数变化的情况,且无文[6]所指出的那些缺点.

对方程(17)与(22),同样可以用求解(6)式的算法^[3]求解. 另外,若要消除本节与上节的最优解对初值 \mathbf{x}_0 的依赖,也可用前言中所述的办法进行处理.

四、配置闭环极点的综合性最优控制问题

本问题要求在 C 阵为单位阵情况下确定 Q 阵(应满足非负定要求),以保证使 J_1 极小的 K 阵所对应的闭环系统(3)的极点被配置到期望位置 $\{\bar{S}_k\}, k = 1, 2, \dots, n$. 这样得到的最优闭环系统不仅具有人们期望的动态特性,而且具有标准调节器的良好工作特性^[2].

1. 互异的最优闭环特征值对 Q 阵的梯度阵公式

$$\frac{\partial S_k}{\partial Q} = - [\text{tr}[\text{adj}(S_k I - A_d)]]^{-1} M_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (24a)$$

其中

$$M_k = \int_0^{\infty} \phi(t, 0) B R^{-1} B' [\text{adj}(S_k I - A_d)]' \phi'(t, 0) dt \quad (24b)$$

满足

$$M_k A_d' + A_d M_k + B R^{-1} B' [\text{adj}(S_k I - A_d)]' = 0. \quad (24c)$$

这里 A_d 阵为最优反馈增益阵 $K = -R^{-1}B'P$ 所对应的闭环系统阵,

$$A_d = A + BK = A - BR^{-1}B'P. \quad (24d)$$

其中 P 阵满足 Riccati 方程

$$PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q = 0,$$

或

$$P(A - BR^{-1}B'P) + (A - BR^{-1}B'P)'P + (Q + PBR^{-1}B'P) = 0. \quad (24e)$$

这里最优的 K 及相关的 A_d 阵均不加“*”号.

证明. 由(24e)式得(参看附录1说明).

$$\frac{\partial P}{\partial q_{ii}} (A - BR^{-1}B'P) + (A - BR^{-1}B'P)' \frac{\partial P}{\partial q_{ii}} + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' = 0,$$

其解为

$$\frac{\partial P}{\partial q_{ii}} = \int_0^{\infty} \phi'(t, 0) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \phi(t, 0) dt.$$

所以

$$\frac{\partial A_d}{\partial q_{ii}} = -BR^{-1}B' \frac{\partial P}{\partial q_{ii}} = -BR^{-1}B' \int_0^\infty \phi'(t, 0) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \phi(t, 0) dt.$$

于是

$$\frac{\partial S_k}{\partial q_{ii}'} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial S_k}{\partial A_d} \right) \left(\frac{\partial A_d}{\partial q_{ii}'} \right)' \right] = -\mathbf{e}_i' \int_0^\infty \phi(t, 0) BR^{-1}B' \left(\frac{\partial S_k}{\partial A_d} \right) \phi'(t, 0) dt \mathbf{e}_i,$$

得

$$\frac{\partial S_k}{\partial Q} = - \int_0^\infty \phi(t, 0) BR^{-1}B' \left(\frac{\partial S_k}{\partial A_d} \right) \phi'(t, 0) dt. \quad (25)$$

用前言中所述的轨迹运算方法可证明文[7]中的结果:

$$\frac{\partial S_k}{\partial A_d} = [\text{tr}[\text{adj}(S_k I - A_d)]]^{-1} [\text{adj}(S_k I - A_d)]'. \quad (26)$$

将上式代入(25)式,可得到 (24a)–(24c) 式.

2. Q 阵的算法

设原受控系统 Σ (见(1)式,令 $C = I$) 可控,且具有互异的(仅为讨论方便,否则下述 \tilde{A} 阵应取 Jordan 形) 开环极点 $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. 并设给定的最优闭环期望极点 $\{\bar{s}_k\}$ 互异. 对原受控系统 Σ 作坐标变换 $\mathbf{x} = H\tilde{\mathbf{x}}$, 使变换后的受控系统 $\tilde{\Sigma}$ 的系统阵具有如下形式:

$$\tilde{A} = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = H^{-1}B. \quad (27)$$

不难证明 Q, P, K, A_d 阵变换后为如下形式:

$$\tilde{Q} = H'QH, \quad \tilde{P} = H'PH, \quad \tilde{K} = KH, \quad \tilde{A}_d = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = H^{-1}A_dH. \quad (28)$$

(为简化计算,限定 \tilde{Q} 为对角阵,

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{q}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

利用 (24a) 式变换后的形式,并记 \tilde{Q}, \tilde{M}_k 阵的对角线元素所构成的向量为

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq (\tilde{q}_{11}, \dots, \tilde{q}_{nn}), \quad \tilde{\mathbf{m}}_k' \triangleq (\tilde{m}_{k11}, \dots, \tilde{m}_{knn}),$$

可得

$$\begin{cases} d\mathbf{S} \triangleq \begin{bmatrix} dS_1 \\ \vdots \\ dS_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [\text{tr}[\text{adj}(S_1 I - \tilde{A}_d)]]^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & [\text{tr}[\text{adj}(S_n I - \tilde{A}_d)]]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_1' \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{m}}_n' \end{bmatrix} d\tilde{\mathbf{q}}, \\ \text{始端 } \tilde{\mathbf{q}} = 0, \text{ 即 } \tilde{Q} = 0, \mathbf{S}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ \text{终端 } \tilde{\mathbf{q}} = \text{未知}, \text{ 即 } \tilde{Q} = \text{未知}, \mathbf{S}' = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n). \end{cases} \quad (30)$$

这样, Q 阵的计算就归结为求解此微分方程的边值问题. 当然,为保证 \tilde{Q} 阵非负定, $\tilde{\mathbf{q}}$ 的定义域应为 $\tilde{q}_{ii} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. 若解出 $\tilde{\mathbf{q}}$, 则可得 \tilde{Q} 与 $Q = (H^{-1})'\tilde{Q}(H^{-1})$. 具体算法为:

1) 规定 $\{\lambda_k\}$ 与 $\{\bar{s}_k\}$ 的对应顺序(可任意规定,因而 Q 阵非唯一), 然后将 λ_k 至 \bar{s}_k

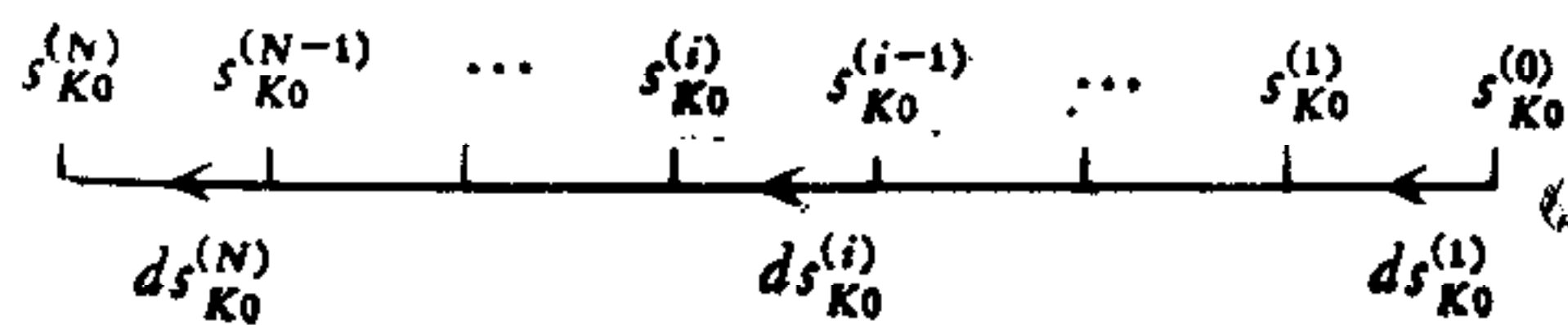


图 1

线段 N 等分, 得等分点 $s_{k_0}^{(0)}, s_{k_0}^{(1)}, \dots, s_{k_0}^{(N)}$, 如图 1 所示. 其中 $s_{k_0}^{(0)} = \lambda_k, s_{k_0}^{(N)} = \bar{s}_k$.

2) 给定初值 $\tilde{Q}^{(0)} = 0, \tilde{q}^{(0)} = 0, \tilde{A}_d^{(0)} = \tilde{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), s_k^{(0)} = s_{k_0}^{(0)} = \lambda_k$, 进行迭代, 其第 i 步为由

$$\tilde{M}_k^{(i)} \tilde{A}_d^{(i-1)'} + \tilde{A}_d^{(i-1)} \tilde{M}_k^{(i)} + \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}' [\text{adj}(s_{k_0}^{(i)} I - \tilde{A}_d^{(i-1)})]' = 0 \quad (31a)$$

解出 $\tilde{M}_k^{(i)}$, 并求出 $\tilde{m}_k^{(i)}$. 若 $\begin{bmatrix} \tilde{m}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{m}_n^{(i)} \end{bmatrix}$ 阵非奇异, 则由方程

$$d\mathbf{S}^{(i)} = - \begin{bmatrix} [\text{tr}[\text{adj}(s_{10}^{(i)} I - \tilde{A}_d^{(i-1)})]]^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & [\text{tr}[\text{adj}(s_{n0}^{(i)} I - \tilde{A}_d^{(i-1)})]]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{m}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{m}_n^{(i)} \end{bmatrix} d\tilde{q}^{(i)} \\ = \mathbf{S}_0^{(i)} - \mathbf{S}^{(i-1)} \quad (31b)$$

算出 $d\tilde{q}^{(i)}$, 得
$$\tilde{q}^{(i)} = \sum_{r=1}^i d\tilde{q}^{(r)} \text{ 与 } \tilde{Q}^{(i)} = \text{diag}(\tilde{q}^{(i)}). \quad (31c)$$

求解

$$\tilde{P}^{(i)} \tilde{A} + \tilde{A}' \tilde{P}^{(i)} - \tilde{P}^{(i)} \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}' \tilde{P}^{(i)} + \tilde{Q}^{(i)} = 0, \quad (31d)$$

可得 $\tilde{P}^{(i)}$, 并算出 $\tilde{A}_d^{(i)} = \tilde{A} - \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}' \tilde{P}^{(i)}$ 及特征值 $s_k^{(i)}$ 与向量 $\mathbf{S}^{(i)'} = (s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)})$. 要求 $|\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{S}_0^{(i)}| \leq \epsilon$ (允许误差), 否则改变 N . 继续以上过程直至第 N 步, 可得

$$\tilde{q} = \sum_{i=1}^N d\tilde{q}^{(i)'} = (\tilde{q}_{11}, \dots, \tilde{q}_{nn}),$$

检验各分量是否满足 $\tilde{q}_{ii} \geq 0$, 若不满足, 则改变 $\{\lambda_k\}$ 与 $\{\bar{s}_k\}$ 的对应顺序.

$$\tilde{Q} = \text{diag}(\tilde{q}) = \text{diag}(\tilde{q}_{11}, \dots, \tilde{q}_{nn}).$$

在以上计算中, 如能保证 $\{\lambda_k\}$ 逐步左移至 $\{\bar{s}_k\}$, 则可保证所得到的 \tilde{Q} 阵非负定^[8].

上述算法与 Solheim 方法^[8] 相比, 本算法只要作一次坐标变换, 并且所有闭环极点逐步地从开环极点位置移至期望位置, 较易在计算机上实现; 不累积计算误差, 精度仅取决于第 N 步. 缺点是只适用于闭环期望极点互异的情况. 因为对重极点而言,

$$\text{tr}[\text{adj}(\bar{s}_k I - \tilde{A}_d)] = 0$$

的逆不存在^[7], 但可人为地将重极点拆成足够靠近的互异极点再进行计算. 所以, 上述缺点是可以克服的. 另外, 本算法解的存在性问题尚待进一步研究.

例. 已知 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 最优闭环期望极点

$$\bar{s}_1 = -1.5, \bar{s}_2 = -2.5,$$

试计算 Q 阵.

解. 可算得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

取极点移动顺序为 $\lambda_1 \rightarrow \bar{s}_1, \lambda_2 \rightarrow \bar{s}_2$, 并取 $\epsilon = 0.02$, 按五步计算, 可得

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1.235 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3.471 & -2.236 \\ -2.236 & 2.236 \end{bmatrix}.$$

若要提高精度, 可在第 5 步后, 再按(31)式进行局部迭代, 可任意逼近精确值

$$Q = \begin{bmatrix} 3.5 & -2.25 \\ -2.25 & 2.25 \end{bmatrix}.$$

限于篇幅, 本文未给出前两种问题的算例. 可参看文献[4, 6]中的算例. 若将文献[6]中的算例改为多参数变化的形式, 则用本文的方法是适宜的.

本文承蒙我院冯缙刚、徐金梁老师的指导, 南航林道垣和北大黄琳老师对本文曾提出过不少宝贵意见, 我院杨成梧、王执铨等老师也给予了不少帮助, 在此一并表示衷心感谢.

附 录 1

设 $X \in R^{n \times m}$, 并记 $e_i^{(k)} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{i} 1 0 \cdots 0)' \in R^k$, 则下述证明中 $e_i^{(n)'} X e_j^{(m)} = x_{ij}$. 为省符号而简记 $e_i^{(n)} = e_i, e_j^{(m)} = e_j$.

证明. 由(11)式直接可得(14c)式, 进而得

$$\frac{\partial S}{\partial d_{ij}} D + D' \frac{\partial S}{\partial d_{ij}} + S e_i e_j' + e_j e_i' S = 0,$$

其解为

$$\frac{\partial S}{\partial d_{ij}} = \int_0^\infty \phi'(t, 0) [S e_i e_j' + e_j e_i' S] \phi(t, 0) dt,$$

因此,

$$\frac{\partial J_1^0}{\partial d_{ij}} = \text{tr} \left[x_0' \frac{\partial S}{\partial d_{ij}} x_0 \right] = 2 e_j' S \int_0^\infty \phi(t, 0) x_0 x_0' \phi'(t, 0) dt e_j,$$

所以,

$$\frac{\partial J_1^0}{\partial D} = 2 S M,$$

即(12)式得证. 于是,

$$J = \beta_1 x_0' P x_0 + \beta_2 \text{tr} [S M M S].$$

用证明(12)式的方法同样可证明(14), (15)式成立.

附 录 2

证明. (19)式显然成立. 改写

$$J_2 = \int_0^\infty \sigma' \sigma dt = (x_0', 0) \bar{S} \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_0' S_{11} x_0,$$

其中 \bar{S} 阵如(18)式所示, 它满足

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ D_\mu & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ D_\mu & D \end{bmatrix}' \bar{S} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = 0,$$

展开得(17c)—(17e)式. 同理可证(17f)—(17h)式. 于是, $J = x_0' P x_0 + \beta x_0' S_{11} x_0$. 同附录1, 可证明(17)式成立.

附 录 3

证明.

$$J_2 = x_0' \int_0^\infty [\phi'(t, 0) \phi(t, 0) - 2 \phi'(t, 0) \phi^0(t, 0) + \phi^{0'}(t, 0) \phi^0(t, 0)] dt x_0 = x_0' (S_1 - 2S_2 + S_0) x_0,$$

其中 S_0, S_1, S_2 如(23)式所示, 分别满足(22c)—(22e)式. 于是, $J = x_0' P_0 x_0 + \beta x_0' (S_1 - 2S_2 + S_0) x_0$. 同附录1, 可证明(22)式成立.

参 考 文 献

- [1] Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill (1960), 175—231.
- [2] Anderson B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall (1971).
- [3] Levine W. S. and Athans M., On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-15 (1970), No. 1, 44.
- [4] Takashi Yahagi, Optimal Output Feedback Control with Reduced Performance Index Sensitivity, *International Journal of Control*, 25 (1977), No. 5, 769.
- [5] Graupe D., Optimal Linear Control Subject to Sensitivity Constraints, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-19 (1974), No. 5, 593.
- [6] Subbayan R. and Vaithilingam M. C., Sensitivity Reduced Design of Linear Regulator, *International Journal of Control*, 29 (1979), No. 3, 435.
- [7] Pararkevopoulos P. N., Tsonis G. A., Tzafenstas S. G., Eigenvalue Sensitivity of Linear Time-Invariant Control Systems with Repeated Eigenvalues, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-19 (1974), No. 5, 610.
- [8] Solheim O. A., Design of Optimal Control Systems with Prescribed Eigenvalues, *International Journal of Control*, 15 (1972), No. 1, 143.

THE COMPOSITE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF LINEAR CONSTANT SYSTEM

ZHANG ZHONGXING

(East China Engineering Institute)

ABSTRACT

In this paper, some problems for linear constant system with quadratic performance indices are discussed. It includes the composite optimal control problem for reduction of the performance index sensitivity, as well as trajectory sensitivity, and composite optimal control problem for placement of the closed-loop poles. The new composite performance indices are presented to obtain better results, and computations are readily performed. The expression of the gradient matrix of closed-loop eigenvalues with respect to the matrix Q is derived. An algorithm for the matrix Q is given for placement of the distinct all closed-loop poles, as well as a numerical example are given.