第10卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 3
1984 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1984

定常线性系统不同分解下状态变量之间的关系

孙 承 启
（北京控制工程研究所）

摘　　要

本文以一般补空间的概念讨论定常线性系统的分解，指出取自然基作为补空间的基，可以使系统分解的变换矩阵求逆最简单．鉴于在正交补空间定义下用交空间方法一般得不到标准分解，本文给出了一种在一般补空间定义下利用交空间进行标准分解的方法，证明了基本的不能控状态变量、基本的能观状态变量和基本的能观不能控状态变量的不变性．

一、前　　言

与一些文献不同，本文采用一般（即不一定要正交）补空间[1]来定义给定系统的不能控子空间和能观子空间（它们分别是能控子空间和不能观子空间的一类，但不是唯一的一个子空间）．这样，就可以选择一个形式上最简单的基，即自然基作为补空间的基，从而使系统分解的变换矩阵的求逆最简单．

本文在证明定常线性系统的标准分解（即同时按能控性和能观性分解）定理时采用了交空间方法．它是以一般补空间定义为前提的．事实上，正交补空间定义[2]下的交空间方法[3,4]一般得不到标准分解．

在讨论系统分解的基础上，证明了基本的不能控状态变量、基本的能观状态变量和基本的能观不能控状态变量的不变性．这种在一般补空间定义下得到的上述三种状态变量是与在正交补空间定义下或者约旦形意义下得到的相应的状态变量等价的．

二、定常线性系统的分解

定义 2.1. 定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

的不能控子空间 $\mathscr{N}_c$ 是能控子空间 $\mathscr{R}_c = \mathrm{Span}\{B,\ AB,\ A^2B,\ \cdots,\ A^{n-1}B\}$ 的补空间，即 $\mathscr{R}_c \oplus \mathscr{N}_c = \mathscr{R}^n$．这里 $\mathscr{R}^n$ 是 n 维线性空间．记按能控性分解的非异变换矩阵为 Q_c，把它的逆表示为

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} S_c \\ S_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_c \\ \}n_{\bar{c}} \end{matrix}. \tag{2.2}$$

由此可得 n_c 维完全能控的状态变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_c = S_c\boldsymbol{x}$ 和 $n_{\bar{c}}$ 维不能控状态变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} = S_{\bar{c}}\boldsymbol{x}$．这里 S_c 和

本文于 1983 年 1 月 24 日收到．

$S_{\bar{c}}$ 分别称为能控矩阵和不能控矩阵.

定义 2.2. 系统(2.1)的能观子空间 $\mathscr{R}_o$ 是不能观子空间

$$\mathscr{N}_o = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x} \in \mathscr{R}^n:\ V\boldsymbol{x} = 0\}$$

的补空间,即 $\mathscr{R}_o \oplus \mathscr{N}_o = \mathscr{R}^n$. 这里 $V = [C^\tau, A^\tau C^\tau, \cdots, (A^{n-1})^\tau C^\tau]^\tau$[1]. 记按能观性分解的非异变换矩阵为 Q_o,把它的逆表示为

$$Q_o^{-1} = \begin{bmatrix} S_{\bar{o}} \\ S_o \end{bmatrix}\begin{matrix} \}n_{\bar{o}} \\ \}n_o \end{matrix}. \tag{2.3}$$

由此可得 $n_{\bar{o}}$ 维不能观状态变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{o}} = S_{\bar{o}}\boldsymbol{x}$ 和 n_o 维完全能观状态变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_o = S_o\boldsymbol{x}$. 这里 $S_{\bar{o}}$ 和 S_o 分别称为不能观矩阵和能观矩阵.

由上可见,不能控子空间和能观子空间都不是唯一的子空间. 非异变换矩阵有无穷多种取法,由特征向量可构成变换矩阵,按照正交补空间定义可得另一个变换矩阵,但是它们都是按一般补空间定义得到的变换矩阵的特殊情况. 采用一般补空间定义可以选择一个计算其逆最简单的非异变换矩阵. 显然,把补空间的基选为自然基是最方便的.

系统(2.1)的标准分解具有如下形式[2]:

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{co} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{y} = [\,0 \quad \hat{C}_2 \quad 0 \quad \hat{C}_4\,] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}}$ 是完全能控但不能观的状态变量; $\hat{\boldsymbol{x}}_{co}$ 是完全能控、能观状态变量; $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}}$ 是不能控不能观状态变量; $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$ 是完全能观但不能控状态变量.

引理 2.1. 已知 $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V} = \mathscr{R}^n$, 其中 $\mathscr{U} \subset \mathscr{R}^n$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{R}^n$, 有非零子空间 $\mathscr{W} \subset \mathscr{R}^n$, 使等式

$$(\mathscr{W} \cap \mathscr{U}) \oplus (\mathscr{W} \cap \mathscr{V}) = \mathscr{W}$$

成立的充分必要条件是 $\mathscr{W} \cap \mathscr{U}$ 和 $\mathscr{W} \cap \mathscr{V}$ 中至少有一个是非零空间. 用反证法可得证.

定理 2.1. 系统(2.1)通过如下定义的变换矩阵 Q 必可导出 (2.4) 式的形式. Q 阵由 $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_c \cap \mathscr{N}_o$, $\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_c \cap \mathscr{R}_o$, $\mathscr{R}_3 = \mathscr{N}_c \cap \mathscr{N}_o$ 和 $\mathscr{R}_4 = \mathscr{N}_c \cap \mathscr{R}_o$ 这四个子空间的基构成. 其中 $\mathscr{N}_c$ 应选得与 $\mathscr{N}_o$ 有交, $\mathscr{R}_o$ 应选得与 $\mathscr{R}_c$ 及 $\mathscr{N}_c$ 有交. (证明见附录)

记

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} S_{c\bar{o}} \\ S_{co} \\ S_{\bar{c}\bar{o}} \\ S_{\bar{c}o} \end{bmatrix}\begin{matrix} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \}n_3 \\ \}n_4 \end{matrix}, \tag{2.5}$$

1) 本文中矩阵的转置用上标 τ 表示.

可得能观不能控状态变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} = S_{\bar{c}o}\boldsymbol{x}$. 称 $S_{\bar{c}o}$ 为能观不能控矩阵.

三、系统在不同分解下状态变量之间的关系

在按能控性分解时，不同的 Q_c 可以得到不同的不能控状态变量表示，它们之间存在线性变换关系. 在按能观性分解时，不同的 Q_o 得到的能观状态变量表示之间以及在标准分解中不同的 Q 得到的能观不能控状态变量表示之间也存在这种关系. 但总能够找到一个其中各变量都不包含其它变量的不能控状态变量、能观状态变量和能观不能控状态变量. 这些状态变量称为基本的状态变量. 对一个给定的系统来说，它们是不变的，称这种性质为不变性. 任意 Q 下的不能控状态变量、能观状态变量和能观不能控状态变量都可由相应的基本状态变量线性表示.

定义 3.1. 列数不小于行数，且秩等于行数的矩阵称为扁矩阵.

因此前述 $S_{\bar{c}}$, S_o 和 $S_{\bar{c}o}$ 都是扁矩阵.

引理 3.1. r 维子空间 $\mathscr{U} \in \mathscr{R}^n$, $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的补空间. 设 G 和 G' 分别是由 $\mathscr{U}$ 的两组不同基构成的 $n \times r$ 阶高矩阵[5]，H 和 H' 分别是由 $\mathscr{V}$ 的两组不同基构成的 $n \times (n-r)$ 阶高矩阵. 记

$$[G \quad H]^{-1} = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$[G' \quad H']^{-1} = \begin{bmatrix} L' \\ M' \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

其中 L 和 L' 为 $r \times n$ 阶扁矩阵；M 和 M' 为 $(n-r) \times n$ 阶扁矩阵. 必有

$$M' = KM, \tag{3.3}$$

其中 K 为 $(n-r) \times (n-r)$ 阶方阵.

证明.

$$G' = GA, \tag{3.4}$$

$$H' = [G \quad H]\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

其中 $A_{r\times r}$, $B_{r\times(n-r)}$ 和 $D_{(n-r)\times(n-r)}$ 是线性组合系数矩阵. 所以

$$[G' \quad H'] = [G \quad H]\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

两边求逆1)，得到

$$\begin{bmatrix} L' \\ M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

记

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & K \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

则得

$$L' = EL + FM, \tag{3.9}$$

1) 逆必定存在.

$$M' = KM. \tag{3.10}$$

引理 3.1 表明扁矩阵 M' 和 M 之间存在着线性变换关系，即 M' 和 M 是等价的.

引理 3.2. 一个扁矩阵经有限次行初等变换后必能化为各行只包含最少个非零元素的等价扁矩阵.

定义 3.2. 满足引理 3.2 且各行第一个非零元素等于 1 的扁矩阵称为基本的扁矩阵.

显然，一个扁矩阵经过有限次行初等变换后必能化为一个基本的扁矩阵. 因此引理 3.1 中任一扁矩阵 M 必与一个基本的扁矩阵等价，记为 $\bar{M}$. 所以一个系统的不能控阵 $S_{\bar{c}}$、能观阵 S_o 和能观不能控阵 $S_{\bar{c}o}$ 必与相应的基本扁矩阵等价. 把基本的不能控阵、能观阵和能观不能控阵分别记为 $\bar{S}_{\bar{c}}$, $\bar{S}_o$ 和 $\bar{S}_{\bar{c}o}$.

定义 3.3. 称与 $\bar{S}_{\bar{c}}$ 对应的不能控状态变量为基本的不能控状态变量，记为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$. 称与 $\bar{S}_o$ 对应的能观状态变量为基本的能观状态变量，记为 $\bar{\boldsymbol{x}}_o$. 称与 $\bar{S}_{\bar{c}o}$ 对应的能观不能控状态变量为基本的能观不能控状态变量，记为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$. $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} = \bar{S}_{\bar{c}}\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_o = \bar{S}_o\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} = \bar{S}_{\bar{c}o}\boldsymbol{x}$.

定理 3.1. 系统 (2.1) 的基本的不能控状态变量、能观状态变量和能观不能控状态变量是不变的，它们与变换矩阵的形式无关.

证明. 设有一个能得到 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$ (按能控性分解)的变换矩阵 $\bar{Q}_c$. 在 $\bar{Q}_c$ 下状态被分解为

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_c \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \bar{Q}_c^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}. \tag{3.11}$$

并设有另一个按能控性分解的变换矩阵 $\hat{Q}_c$，得

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_c \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \hat{Q}_c^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}. \tag{3.12}$$

利用引理 3.1，由(3.12)式可得

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_c \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\bar{\boldsymbol{x}}_c + F\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \\ K\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

上式说明 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$ 之间存在着线性变换关系，即系统的不能控状态变量的任一表示形式必定等价于一个基本的不能控状态变量 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$，它与变换矩阵的选取形式无关.

同理可证基本的能观状态变量 $\bar{\boldsymbol{x}}_o$ 的不变性，下面证明基本的能观不能控状态变量 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$ 的不变性.

假定根据定理 2.1 已经找到了一个能得到 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$ 的变换矩阵 $\bar{Q}$，它由如下四个子空间的基构成:

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_1 &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c})(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n_1})\} \\ &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}})(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_{n_1})\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_2 &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c})(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n_2})\} \\ &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_n)(\boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_{n_2})\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_3 &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{q}_{n_c+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)(\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_{n_3})\} \\ &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}})(\boldsymbol{c}'_1, \cdots, \boldsymbol{c}'_{n_3})\}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_4 &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{q}_{n_c+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)(\boldsymbol{d}_1, \cdots, \boldsymbol{d}_{n_4})\} \\ &= \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_n)(\boldsymbol{d}'_1, \cdots, \boldsymbol{d}'_{n_4})\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

于是 $\bar{Q}$ 可表示为

$$\bar{Q} = [\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c}, \boldsymbol{q}_{n_c+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n] \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

或者表示为

$$\bar{Q} = [\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}}, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_n] \begin{bmatrix} A' & 0 & C' & 0 \\ 0 & B' & 0 & D' \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

上面两式中 A, B, C, D; A', B', C', D' 为系数矩阵．这时系统的状态 $\boldsymbol{x}$ 被分解为

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{Q}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

该系统的另一个变换阵 $\hat{Q}$ 为

$$\hat{Q} = [\hat{\boldsymbol{q}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}_{n_c}, \hat{\boldsymbol{q}}_{n_c+1}, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}_n] \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

或者表示为

$$\hat{Q} = [\hat{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{r}}_{n_{\bar{o}}}, \hat{\boldsymbol{r}}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \hat{\boldsymbol{r}}_n] \begin{bmatrix} \hat{A}' & 0 & \hat{C}' & 0 \\ 0 & \hat{B}' & 0 & \hat{D}' \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

这时系统的状态 $\boldsymbol{x}$ 被分解为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{Q}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

而

$$[\hat{\boldsymbol{q}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}_{n_c}, \hat{\boldsymbol{q}}_{n_c+1}, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}_n] = [\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c}, \boldsymbol{q}_{n_c+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n] \begin{bmatrix} W & J \\ 0 & N \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

$$[\hat{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{r}}_{n_{\bar{o}}}, \hat{\boldsymbol{r}}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \hat{\boldsymbol{r}}_n] = [\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}}, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_n] \begin{bmatrix} W' & J' \\ 0 & N' \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

上面两式中 W, J, N; W', J', N' 为系数矩阵．由(3.18),(3.21)和(3.24)式得

$$\hat{Q} = \bar{Q}K. \tag{3.26}$$

式中

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

由(3.19),(3.22)和(3.25)式得

$$\hat{Q} = \bar{Q}K'. \tag{3.28}$$

式中

$$K' = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} \\ 0 & K'_{22} & 0 & K'_{24} \\ K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} & K'_{34} \\ 0 & K'_{42} & 0 & K'_{44} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

通过比较易得

$$K = K' = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{22} & 0 & K_{24} \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \triangleq \hat{K}. \tag{3.30}$$

且有[1)]

$$\hat{K}^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ 0 & L_{22} & 0 & L_{24} \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{34} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

所以

$$\hat{Q}^{-1} = \hat{K}^{-1}\bar{Q}^{-1}. \tag{3.32}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{K}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{co} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

从而

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o} = L_{44}\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}. \tag{3.34}$$

上式表明 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}$ 的任一表示形式经有限次行初等变换后必能化为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$. 换言之，基本的能观不能控状态变量 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$ 是不变的. 定理 3.1 证毕.

定理 3.1 说明在一般补空间定义下系统分解得到的 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}}$, $\boldsymbol{x}_o$ 和 $\boldsymbol{x}_{\bar{c}o}$ 与用其它方法(如化约旦形法，在正交补空间定义下的分解法[2)])所得的相应的状态变量是等价的，而且分别与 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}}$, $\bar{\boldsymbol{x}}_o$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}o}$ 等价. 这些基本的状态变量的表示是最简洁的，因此便于使用.

因为状态变量是系统状态 $\boldsymbol{x}$ 在状态空间某一选定的基（座标系）下的座标，所以同一状态在不同基中有不同的表示. 据此可对基本状态变量的不变性作出直观的几何解释[3)].

附 录

证明. 下面是构造性证明. 设

$$\mathscr{R}_c = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c}\}, \tag{1}$$

$$\mathscr{N}_o = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}}\}. \tag{2}$$

选 $\mathscr{N}_c$ 使它是 $\mathscr{R}_c$ 的补空间且与 $\mathscr{N}_o$ 有交. 设 $\dim(\mathscr{N}_c \cap \mathscr{N}_o) = n_3$, 则

$$\mathscr{N}_c = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{q}_{n_c+1}, \boldsymbol{q}_{n_c+2}, \cdots, \boldsymbol{q}_n\} = \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}})\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, (\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}})\boldsymbol{\alpha}_{n_3}, \boldsymbol{q}_{n_3+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}. \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n_3)$ 是非零向量.

再选 $\mathscr{R}_o$, 使它是 $\mathscr{N}_o$ 的补空间且与 $\mathscr{R}_c$ 及 $\mathscr{N}_c$ 都有交. 设

$$\dim(R_o \cap R_c) = n_2, \ \dim(\mathscr{R}_o \cap \mathscr{N}_c) = n_4,$$

则

$$\mathscr{R}_o = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{r}_{n_{\bar{o}}+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_n\} = \mathrm{Span}\{(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c})\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n_c})\boldsymbol{\beta}_{n_2},$$

1) 如引理 3.1 所指出，$\hat{K}^{-1}$ 必存在.
2) 这些方法使用起来往往很繁复.
3) 注意，在非正交座标系中，向量的座标是按斜投影法则得到的.

$$(q_{n_c+1}, \cdots, q_n)\gamma_1, \cdots, (q_{n_c+1}, \cdots, q_n)\gamma_{n_4}, r_{n_2+n_4+1}, \cdots, r_n\}. \tag{4}$$

其中 β_i 和 γ_i 是非零向量. 设 $\dim(\mathscr{R}_c \cap \mathscr{N}_o) = n_1$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_c \cap \mathscr{N}_o &= \mathrm{Span}\{(q_1, \cdots, q_{n_c})\delta_1, \cdots, (q_1, \cdots, q_{n_c})\delta_{n_1}\} \\ &= \mathrm{Span}\{(r_1, \cdots, r_{n_{\bar{o}}})\varepsilon_1, \cdots, (r_1, \cdots, r_{n_{\bar{o}}})\varepsilon_{n_1}\}.\end{aligned} \tag{5}$$

其中 δ_i 和 ε_i 是非零向量. 同理可得

$$\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_c \cap \mathscr{R}_o = \mathrm{Span}\{(q_1, \cdots, q_{n_c})\beta_1, \cdots, (q_1, \cdots, q_{n_c})\beta_{n_2}\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{R}_3 = \mathscr{N}_c \cap \mathscr{N}_o = \mathrm{Span}\{(r_1, \cdots, r_{n_{\bar{o}}})\alpha_1, \cdots, (r_1, \cdots, r_{n_{\bar{o}}})\alpha_{n_3}\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{R}_4 = \mathscr{N}_c \cap \mathscr{R}_o = \mathrm{Span}\{(q_{n_c+1}, \cdots, q_n)\gamma_1, \cdots, (q_{n_c+1}, \cdots, q_n)\gamma_{n_4}\}. \tag{8}$$

利用引理 2.1，且考虑到 $\mathscr{R}_c \cap \mathscr{N}_c = 0$，$\mathscr{R}_o \cap \mathscr{N}_o = 0$，因此 $\mathscr{R}_1$，$\mathscr{R}_2$，$\mathscr{R}_3$ 和 $\mathscr{R}_4$ 的基是线性无关的. 而且 $\dim(\mathscr{R}_1 \oplus \mathscr{R}_2) = n_c$，$\dim(\mathscr{R}_3 \oplus \mathscr{R}_4) = n_{\bar{c}}$，所以 $\dim(\mathscr{R}_1 \oplus \mathscr{R}_2 \oplus \mathscr{R}_3 \oplus \mathscr{R}_4) = n$. 因此由 $\mathscr{R}_1$，$\mathscr{R}_2$，$\mathscr{R}_3$ 和 $\mathscr{R}_4$ 的基构成的变换矩阵 Q 是非奇异的.

因为 $Q^{-1}Q$ 是 $n \times n$ 单位矩阵，所以其左下角子块是 $(n_3 + n_4) \times (n_3 + n_4)$ 阶零矩阵. 又因为 $\mathscr{R}_1 \oplus \mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_c$，所以 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 是属于 $\mathscr{R}_c$ 的,即 Q 中前 n_c 列是属于 $\mathscr{R}_c$ 的. 又 B 的列全属于 $\mathscr{R}_c$，所以满足 $B = Q\hat{B}$ 的 $\hat{B}$ 必具有如下形式：

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \}n_3 \\ \}n_4 \end{array} \begin{array}{l} \Big\}n_c \\ \\ \Big\}n_{\bar{c}} \end{array}. \tag{9}$$

又 $\mathscr{N}_o$ 中的基 $r_i\ (i = 1, 2, \cdots, n_{\bar{o}})$ 必须满足 $Cr_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n_{\bar{o}}$. 注意到 Q 中的前 n_1 列及第 $n_1 + n_2 + 1$ 到第 $n_1 + n_2 + n_3$ 列都是 $r_i\ (i = 1, 2, \cdots, n_{\bar{o}})$ 的线性组合，所以 CQ 中相应的列也为零. 于是有

$$\hat{C} = CQ = [\underbrace{0}_{n_1}\ \underbrace{\hat{C}_2}_{n_2}\ \underbrace{0}_{n_3}\ \underbrace{\hat{C}_4}_{n_4}]. \tag{10}$$

由于 $\mathscr{R}_c$ 是 A 的不变子空间,所以 AQ 中的前 $n_1 + n_2$ 列全属于 $\mathscr{R}_c$，因此

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \underbrace{0}_{n_1+n_2} & \underbrace{\hat{A}_4}_{n_3+n_4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n_1 + n_2 \\ \}n_3 + n_4 \end{array}, \tag{11}$$

即(2.4)式中 $\hat{A}_{31}$，$\hat{A}_{32}$，$\hat{A}_{41}$ 和 $\hat{A}_{42}$ 均为零阵.

因为 Q 中的第 $n_1 + n_2 + 1$ 到第 $n_1 + n_2 + n_3$ 列全属于 $\mathscr{N}_o$，且 $\mathscr{N}_o$ 是 A 的不变子空间，所以(2.4)式 $\hat{A}$ 中的子阵 $\hat{A}_{23} = 0$. 同理可证 $\hat{A}_{21} = 0$，$\hat{A}_{43} = 0$. 这就证明了 $\hat{A}$ 的形式如(2.4)所示.

最后,因为非异变换不改变系统的能控性和能观性，运用凯莱-哈密顿定理,很容易证明 $x_{c\bar{o}}$ 能控不能观，x_{co} 能控能观，$x_{\bar{c}\bar{o}}$ 不能控不能观，$\hat{x}_{\bar{c}o}$ 能观不能控. 证毕[1)].

参　考　文　献

[1] Pierre Faurre, Michel Depeyrot, Elements of System Theory, North-Holland Publishing Company (1977).

[2] 关肇直,陈翰馥,线性控制系统的能控性和能观测性,科学出版社(1975).

[3] Thomas E. Fortmann, Konrad L. Hitz, An Introduction to Linear Control Systems, Marcel Dekker, INC, New York (1977).

[4] 王照林等,现代控制理论基础,国防工业出版社(1981).

[5] 谢邦杰,线性代数,人民教育出版社(1978).

1) 顺便指出,用不同方法得到的标准分解式中 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 中的非零子阵中的各个对应元素并不一定相同.

THE RELATION BETWEEN THE STATE VARIABLES OBTAINED BY VARIOUS DECOMPOSITION METHODS FOR LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

SUN CHENGQI
(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

The decomposition of linear time-invariant systems is discussed from the view point of the general complement space. It is pointed that by using the natural base as the base of the complement space, the inverse matrix of nonsingular transformation matrix can be obtained most easily. In general, the canonical decomposition can not be obtained by the intersection space method in the sense of the orthogornal complement space. Therefore, a different approach to the canonical decomposition is presented, which is concerned with the general complement space definition. It is proved that the basic-uncontrollable state variables, the basic-observable state variables and the basic-observable-uncontrollable state variables are invariant with respect to choices of the transformation matrix.