第10卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol.10, No. 3
1984 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1984

短 文

线性多变量系统的稳定解耦

韩京清 许可康
（中国科学院系统科学所）

摘 要

本文用 Yokoyama 标准形与多项式阵之间的对应关系及矩阵列的“零块指数”概念，给出了用状态反馈实现解耦和稳定解耦的充分必要条件，并给出了确定实现解耦的状态反馈阵的方法.

文[1—3]给出了用状态反馈实现解耦的充分必要条件及状态反馈的一般形式. 从本质上说，解耦是由闭环系统的零极点相消来实现的. 因此，有可能把不稳定的零点消掉，使解耦系统出现不稳定现象.能否在开环传递阵中明确分离出解耦时所必须消掉的零点，进而考虑稳定解耦的条件呢？文[1—3]均没有给出明确回答.

本文用 Yokoyama 标准形与传递阵右分解之间的对应关系，明确分离出解耦所必须消掉的部分零点，从而顺利解决了实现稳定解耦的问题. 实现解耦的条件及所用的反馈阵在 Yokoyama 标准形中都显得非常简单.

考察完全能控线性时不变系统

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{B}\boldsymbol{u}, & \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{y} = \bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m.\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\bar{B}$ 满秩. 对此系统可以找到坐标变换

$$\bar{\boldsymbol{x}} = T\boldsymbol{x},$$

使它变成 Yokoyama 能控标准形[4,5]：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{2}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0[I_\nu 0] & & & 0 \\ & 0[I_{\nu-1}0] & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0[I_2 0] \\ -A_\nu & \cdots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix};$$

$$C = [C_\nu \cdots\cdots\cdots C_2 C_1]. \tag{3}$$

本文于 1982 年 11 月 30 日收到.

A_i, $C_i \in \mathbb{R}^{m\times n_i}$; $B_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\det B_1 \neq 0$; I_i 为 n_i 阶单位阵，$n_\nu \leqslant n_{\nu-1} \leqslant \cdots\cdots \leqslant n_1 = m$，$\sum_{i=1}^{\nu} n_i = n$；$\nu$ 是系统的能控指数.

下面用 $\bar{\boldsymbol{C}}_i$, $\boldsymbol{C}_i$ 分别表示观测阵 $\bar{C}$ 和 C 的第 i 行向量，并用 $\hat{\boldsymbol{C}}_{ij} \in R^m$, $\boldsymbol{C}_{ij} \in R^{n_i}$ 分别表示矩阵 $CA^{j-1}B$ 和子阵 C_j 的第 i 行向量，引入正整数

$$l_i = \min\{\nu, \{j \mid \boldsymbol{C}_{ij} \neq 0\}\} \tag{4}$$

是矩阵列 $[C_\nu, C_{\nu-1}\cdots\cdots C_2, C_1]$ 的第 i 行的"零块指数"[6]. 这时，由(2)式易知

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{ij} = \boldsymbol{C}_i A^{j-1} B = 0, \ j < l_i.$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{il_i} = \begin{cases} [\boldsymbol{C}_{il_i} \ \ 0]B_1, & \text{当 } n_{l_i} < n_1 \text{ 时}. \\ \boldsymbol{C}_{il_i} B_1, & \text{当 } n_{l_i} = n_1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{C}_i A^{l_i} = [0\cdots\cdots 0[\boldsymbol{C}_{i\nu} 0]\cdots\cdots[\boldsymbol{C}_{il_i+1} 0]] - \hat{\boldsymbol{C}}_{il_i}[A_\nu \cdots\cdots A_2 A_1].$$

另一方面，根据传递阵的右分解与 Yokoyama 能控标准形之间的关系[5]，有

$$W(s) = C[SI - A]^{-1}B = R(s)P^{-1}(s)B_1. \tag{6}$$

其中多项式阵 $P(s)$, $R(s)$ 可展开成

$$\begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{d_{n_1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{d_1-1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{d_{n_1}-1} \end{bmatrix} [I_1 \ \ 0] + \cdots\cdots$$
$$+ \begin{bmatrix} A_i \\ C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{d_1-i} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{d_{n_1}-i} \end{bmatrix} [I_i 0] + \cdots + \begin{bmatrix} A_\nu \\ C_\nu \end{bmatrix} [I_\nu \ \ 0]. \tag{7}$$

这里 A_i, C_i 及 I_i 均为(3)式中的子阵. 从而矩阵列

$$[A_\nu \cdots\cdots A_2 A_1 I_1], \ [C_\nu \cdots\cdots C_2 C_1 0]$$

分别叫做多项式阵 $P(s)$ 和 $R(s)$ 按列次展开的系数阵. 从这个展开式知，如果对 $R(s)$ 的第 i 行乘因子 s. 得到新的多项式阵 $R^1(s)$，则 $R^1(s)$ 的系数阵是把 $[C_\nu \cdots\cdots C_1 0]$ 第 i 行向右移一块，并在 $\boldsymbol{C}_{i\nu}$ 处补零后所得. 此多项式阵

$$\mathrm{diag}[s^{l_1} \cdots\cdots s^{l_m}]R(s) = \bar{R}(s) \tag{8}$$

按列次展开后系数阵的第 i 行为

$$[0\cdots\cdots 0[\boldsymbol{C}_{i\nu} \ \ 0]\cdots\cdots[\boldsymbol{C}_{il_i+1} \ \ 0]\hat{\boldsymbol{C}}_{il_i} B_1^{-1}],$$

即把 $[C_\nu \cdots\cdots C_2 C_1]$ 的第 i 行向右移 l_i 块. 于是矩阵(8)的列次项系数阵为

$$D = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{C}}_{1l_1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{C}}_{ml_m} \end{bmatrix} B_1^{-1}. \tag{9}$$

对任意 l_i 次首一多项式 $f_i(s)$ 来说，多项式阵 $\mathrm{diag}[f_1(s)\cdots\cdots f_m(s)]R(s)$ 的列次项系数阵也是 D.

由于在 Yokoyama 标准形中状态反馈只改变 A_i，因此以反馈

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x} + G\boldsymbol{v}$$

所得的闭环传递阵可表示为

$$C(SI - A + BK)^{-1}BG = R(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G,$$

即状态反馈只改变传递阵的分母部分. 又

$$C(SI-A)^{-1}B = R(s)P^{-1}(s)B_1$$
$$= \mathrm{diag}[s^{-l_1}\cdots\cdots s^{-l_m}](\mathrm{diag}[s^{l_1}\cdots\cdots s^{l_m}]R(s))P^{-1}(s)B_1, \tag{10}$$

由(5),(9)式易知,只要 D^{-1} 存在,取

$$K = D^{-1}CA^{l_i}, \quad G = B_1^{-1}, \tag{11}$$

就可使系统解耦,且

$$R(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G = \mathrm{diag}[s^{-l_i}\cdots\cdots s^{-l_m}]. \tag{12}$$

引理. 如果开环传递阵分子部分 $R(s)$ 中每行的多项式均互质, 即 $R(s)$ 的每行没有非常数公因子,则为了使闭环解耦, 必须把 $R(s)$ 消去.用状态反馈可把全部零点消掉.

证明. 设闭环系统解耦成

$$R(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G = \mathrm{diag}[r_1(s)/f_1(s)\cdots\cdots r_m(s)/f_m(s)].$$

其中 $r_i(s)$, $f_i(s)$ 互质, $i=1,2,\cdots\cdots,m$. 显然,

$$R(s) = \mathrm{diag}[r_1(s)\cdots r_m(s)]\mathrm{diag}[f_1^{-1}(s)\cdots\cdots f_m^{-1}(s)]G^{-1}B_1^{-1}\bar{P}(s).$$

由 $r_i(s)$, $f_i(s)$ 的互质性知矩阵

$$\mathrm{diag}[f_1^{-1}(s)\cdots\cdots f_m^{-1}(s)]G^{-1}B_1^{-1}\bar{P}(s)$$

必为多项式阵. 这说明 $R(s)$ 的 i 行以 $r_i(s)$ 为其公因子. 由引理条件, $r_i(s)$ 必为常数,于是取 $r_i(s)=1$, $i=1,2,\cdots\cdots,m$. 这时有

$$R(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G = \mathrm{diag}[f_1^{-1}(s)\cdots\cdots f_m^{-1}(s)].$$

这是无零点的传递阵,开环的零点在闭环中全被消掉了. 证毕.

由于

$$\mathrm{diag}[f_1(s)\cdots\cdots f_m(s)]R(s) = G^{-1}B_1^{-1}\bar{P}(s), \tag{13}$$

因此,由 l_i 的定义及(8),(9)式易知 $f_i(s)$ 的次数为 l_i, 且 $D=G^{-1}B_1^{-1}$, 即 D 可逆. 这时系统能解耦的充要条件就变成: 由矩阵 $[C_\nu\cdots\cdots C_2C_1]$ 及其零块指数决定的矩阵 D 是可逆阵.

为了得到本文的主要结果,把传递阵的分子部分 $R(s)$ 分解成

$$R(s) = \mathrm{diag}[r_1(s)\cdots\cdots r_m(s)]\tilde{R}(s). \tag{14}$$

这里 $r_i(s)$, $i=1,2,\cdots\cdots,m$, 是 $R(s)$ 的第 i 行的最大公因子, 设其次数为 δ_i, 且 $r_i(s)$ 为首一多项式. 如果把 $\tilde{R}(s)$ 按列次展开的系数阵记为

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_\nu\cdots\cdots\tilde{C}_2\tilde{C}_1],$$

而其行的零块指数为 $\tilde{l}_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,m$, 则由(8),(9)式知

$$\tilde{l}_i = l_i + \delta_i, \quad i=1,2,\cdots\cdots,m, \tag{15}$$

且 $\tilde{R}(s)$ 的列次系数阵也是 D. 于是得

定理. 系统(1)由状态反馈实现稳定解耦的充分必要条件是,当传递阵 $C(SI-A)^{-1}B$ 右分解为 $R(s)P^{-1}(s)B_1$, 而 $P(s)$ 为列首一阵时, 1) $R(s)$ 的列次系数阵 $\Gamma_lR(s)=D$ 可逆; 2) 从 $R(s)$ 每行提出最大公因子后所剩的矩阵 $\tilde{R}(s)$ 稳定, 即 $\det\tilde{R}(s)$ 为稳定多项式.

证明. 必要性. 由于

$$R(s) = \mathrm{diag}[r_1(s)\cdots\cdots r_m(s)]\tilde{R}(s), \quad \Gamma_CR(s) = D = \Gamma_C\tilde{R}(s),$$

因此 $R(s)P^{-1}(s)B_1$ 的能解耦性等价于 $\tilde{R}(s)P^{-1}(s)B_1$ 的能解耦性．由引理知，为了使闭环传递阵 $\tilde{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1$ 成为对角阵，必须全部消去 $\tilde{R}(s)$，因此要使闭环稳定必须 $\tilde{R}(s)$ 为稳定．

充分性．设 $\tilde{R}(s)$ 按列次展开的系数阵为

$$\tilde{C}=[\tilde{C}_\nu\cdots\cdots\tilde{C}_2\tilde{C}_1],$$

其每行的零块指数为 $\tilde{l}_i$．任意取 m 个稳定的首一多项式

$$f_i(s),\ \partial f_i(s)=\tilde{l}_i,\quad i=1,2,\cdots\cdots m.$$

并决定多项式阵 $\mathrm{diag}[f_1(s)\cdots\cdots f_m(s)]\tilde{R}(s)$，其按列次展开的系数阵为

$$C^*=[C_\nu^*,\cdots\cdots C_1^*C_0^*].$$

由(8),(9)式有 $C_0^*=D$．只要取

$$K=B_1^{-1}D^{-1}[C_\nu^*\cdots\cdots C_2^*C_1^*]-B_1^{-1}[A_\nu\cdots\cdots A_1],$$
$$G=B_1^{-1}D^{-1},$$

则

$$D\bar{P}(s)=\mathrm{diag}[f_1(s)\cdots\cdots f_m(s)]\tilde{R}(s),$$
$$\mathrm{diag}[f_1^{-1}(s)\cdots\cdots f_m^{-1}(s)]=\tilde{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)D^{-1}=\tilde{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1B_1^{-1}D^{-1}$$
$$=\tilde{R}(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G,$$

从而

$$R(s)\bar{P}^{-1}(s)B_1G=\mathrm{diag}[r_1(s)/f_1(s)\cdots\cdots r_m(s)/f_m(s)].$$

零点被抵消后，$\tilde{R}(s)$ 和 $f_i(s)$ 均稳定，因此闭环是稳定的．证毕．

参　考　文　献

[1] Falb P. L. and Wolovich W. A., Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems, *IEEE Trans*. AC, **12** 651—659, (1971).

[2] Gilbert, E. G., The decoupling of multivariable Systems by state feedback, SIAM J. Control, 7: 1, 50—61, (1969).

[3] Wonham W. M. and Morse A. S., Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach, SIAM J. Control, 8: 1, 1—18, (1970).

[4] Yokoyama R. and Kinnen, E., Phase-variable canonical forms for multi-input, multi-output systems, Int. J. Control, 17: 6, 1297—1312, (1973).

[5] 韩京清，线性系统的结构与反馈系统计算，«全国控制理论及其应用学术交流会论文集»，科学出版社，43—55.

[6] Han Kyeng cheng, Xu Kekang and Wang Shilin, Realization of disturbance resistance of a system by the state feedback, «System Theory and Its Applications Proceeding of the Bilateral Meeting on Control Systems», Shanghai, 1981.

THE STABILITY DECOUPLING OF LINEAR CONTROL SYSTEMS

HAN JINGCHENG XU KEKANG
(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, by means of the relationship between polynomial matrix and Yokoya's canonical form, and the concept of zero indices of the matrix sequence, the necessary and sufficient condition for the stability decoupling of linear control systems by state feedbacks is descussed. In addition, the method of calculation of the state feedback matrix achieving the stability decoupling is given.