

一种微处理机控制次优直流伺服系统

冯国楠 陈建国
(北京工业大学)

摘 要

本文讨论用积分罚函数处理伺服系统控制变量不等式约束, 研究了一种适合于微处理机实现的次优综合方法, 并给出了一个实例. 数字仿真实验证明, 这个综合方法是可行的.

伺服系统的控制变量是有限的. 怎样处理控制变量不等式约束已有许多论述, 但在线计算量很大, 难以用微型机实现实时控制. 用现代控制理论寻找节省在线计算时间的综合方法, 是一个值得研究的课题.

本文用积分罚函数^[1]处理控制变量不等式约束, 用与处理非线性问题相类似的分段线性化方法研究了一种次优综合方法, 并由此得出一种次优算法, 适于用微型机进行控制.

实际设计和数字仿真结果表明, 系统具有良好的稳态和瞬态响应, 有较强的抑制扰动能力. 因此, 这个方法用来综合高性能微处理机控制的伺服系统是可行的.

一、控制对象数学模型

图1是微处理机控制直流伺服系统示意图. 微处理机是控制器, 带负载的伺服电机(包括功率放大器)是控制对象. 假设 v_1 是微处理机的输出, K_a 是功率放大器放大倍数, L 是电枢回路总电感, R_a 是总电阻, J_m 是总转动惯量, K_m 是力矩常数, K_e 是反电势常数, i 是电枢电流, ω 是电机角速度, θ 是输出角位置, M_c 是扰动力矩. 控制对象运动方程为

$$L \frac{di}{dt} + R_a i + K_e \omega = K_a v_1,$$

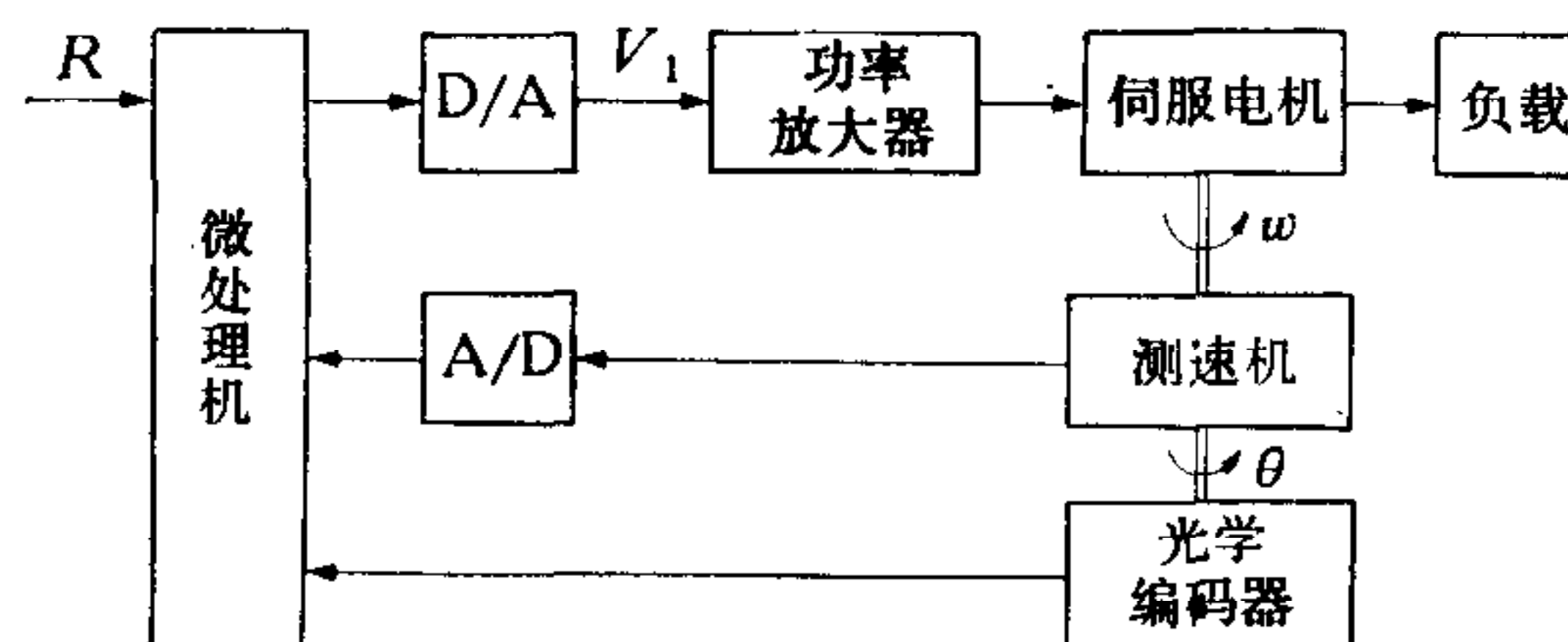


图 1

$$J_m \frac{d\omega}{dt} = K_m i - M_c,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

选择 $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, $x_3 = K_m i / J_m$ 作为一组状态变量, $y = x_1$ 作输出变量, 可得控制对象状态空间表达式

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1 v_1 + B_2 w, \quad y = C\mathbf{x}. \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/T_m T_L & -1/T_L \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$B_1 = [0 \quad 0 \quad K_v / T_m T_L]^T, \quad (4)$$

$$B_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad (5)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (6)$$

$T_m = R_a J_m / K_m K_e$, $T_L = L / R_a$, $K_v = K_a / K_e$, $w = -M_c / J_m$. v_1 为一分段恒值函数, 取决于微处理机输出. 令采样周期为 τ , 把连续时间系统(1)离散化, 可得

$$\mathbf{x}[(k+1)\tau] = G\mathbf{x}(k\tau) + H_1 v_1(k\tau) + H_2 w(k\tau). \quad (7)$$

其中

$$G = e^{A\tau} = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$H_1 = \left(\int_0^\tau e^{A^t} dt \right) B_1 = [h_{11} \quad h_{21} \quad h_{31}]^T, \quad (9)$$

$$H_2 = \left(\int_0^\tau e^{A^t} dt \right) B_2 = [h_{12} \quad h_{22} \quad h_{32}]^T. \quad (10)$$

由于微处理机完成一次最优控制在线计算的时间接近采样周期, 系统当前的控制值实际上是前一拍的计算结果. 这就是说, 在实际控制 v_1 与微处理机无计算延迟的理想输出 u 之间存在一个单位延迟, 即

$$v_1(k) = u(k-1). \quad (11)$$

为方便计, 把时间变量 $k\tau$ 简记为 k .

假设输入 $R(k)$ 为斜坡函数, 扰动 $w(k)$ 为阶跃函数. 为了消除斜坡输入和阶跃扰动引起的稳态误差, 可在最优控制器中引入积分作用^[2,3]. 令 $e(k)$ 为误差,

$$e(k) = R(k) - y(k) = R(k) - x_1(k) \quad (12)$$

引入差分算子“ ∇ ”, 则

$$\nabla e(k) = e(k) - e(k-1) \text{ 或 } e(k) = e(k-1) + \nabla e(k), \quad (13)$$

$$\nabla^2 R(k+1) \equiv 0, \quad \nabla w(k) \equiv 0. \quad (14)$$

取 $e(k+1)$, $x_2(k+1)$, $x_3(k+1)$ 的一次差分, 由式(7)–(14), 可得

$$\nabla e(k+1) = \nabla e(k) - g_{12} \nabla x_2(k) - g_{13} \nabla x_3(k) - h_{11} u(k-1) + h_{11} u(k-2), \quad (15)$$

$$\nabla x_2(k+1) = g_{22}\nabla x_2(k) + g_{23}\nabla x_3(k) + h_{21}u(k-1) - h_{21}u(k-2), \quad (16)$$

$$\nabla x_3(k+1) = g_{32}\nabla x_2(k) + g_{33}\nabla x_3(k) + h_{31}u(k-1) - h_{31}u(k-2). \quad (17)$$

定义一组新的状态变量

$$\begin{aligned} z_1(k) &= e(k-1), & z_2(k) &= \nabla e(k), & z_3(k) &= \nabla x_2(k), \\ z_4(k) &= \nabla x_3(k), & z_5(k) &= u(k-2), & z_6(k) &= u(k-1). \end{aligned} \quad (18)$$

由式(13),(15)–(18),得到增广系统

$$\mathbf{z}(k+1) = F\mathbf{z}(k) + Du(k). \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= [z_1(k), z_2(k), z_3(k), z_4(k), z_5(k), z_6(k)]^T; \\ F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -g_{12} & -g_{13} & h_{11} & -h_{11} \\ 0 & 0 & g_{22} & g_{23} & -h_{21} & h_{21} \\ 0 & 0 & g_{32} & g_{33} & -h_{31} & h_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

增广系统(19)具有以下特点:

1) 把微处理机的计算延迟等效成系统内部的控制延迟,同时,增加一个状态变量 $u(k-1)$, 它包含在增广系统中. 于是,由系统(19)综合的最优控制是考虑计算延迟后的最优控制;

2) 通过定义新的状态变量,控制器中将包含一个积分环节,使系统在斜坡输入和阶跃扰动下稳态误差为零,改善了系统稳态特性;

3) 把伺服问题简化成调节器问题,可用熟知的调节器理论来综合伺服系统的最优控制.

二、一种次优控制综合方法

系统(19)中控制变量 $u(k)$ 受不等式

$$-U_m \leq u(k) \leq U_m \quad (22)$$

约束. U_m 为某个正常数. 系统的性能指标为

$$\begin{aligned} J &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{e^2(k) + q\nabla e^2(k) + ru^2(k-1)\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{\mathbf{z}^T(k)Q\mathbf{z}(k) + ru^2(k-1)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 1+q & & & & 0 \\ & & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}; \quad (24)$$

q 和 r 是权系数. 在性能指标中引入 $\nabla e(k)$ 项是为了改善响应的平滑性.

这是带有控制变量不等式约束的最优控制问题. 处理不等式约束的一种较简单的办法是应用积分罚函数把它化成无约束问题. 定义

$$v'(k) = \begin{cases} u(k) - U_m, & u(k) > 0, \\ -u(k) - U_m, & u(k) < 0. \end{cases} \quad (25)$$

那么, 约束条件(22)可以改写成

$$v'(k) \leq 0. \quad (26)$$

于是, 性能指标 J 可以增广成 $\bar{J}^{[1]}$:

$$\bar{J} = J + r_m \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N [v'(k-1)]^2 I(v'). \quad (27)$$

式中

$$I(v') = \begin{cases} 0, & v' \leq 0, \\ 1, & v' > 0. \end{cases} \quad (28)$$

性能指标 \bar{J} 包含非线性函数 $I(v')$, 因此, 综合的最优控制是很复杂的, 用微处理机实现实时控制十分困难. 为此, 用与处理非线性问题类似的分段线性化方法, 把含有非线性函数的性能指标 \bar{J} 分解成两个标准的二次型性能指标, 分别与系统(19)构成典型线性二次型问题. 这样求出的控制是状态的分段线性函数, 大大地节省了在线计算量.

为获得快速响应, 权系数 r 通常选得十分小; 为满足约束条件(26), r_m 应选得足够大. 例如, 在后面的例子里 $r = 0.3 \times 10^{-5}$, $r_m = 400$, 故有 $r_m \gg r$. 在这个条件下性能指标 \bar{J} 可用下面两个性能指标来代替:

$$J_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{z^T(k) Q z(k) + r u^2(k-1)\}, \quad |u(k)| \leq U_m, \quad (29)$$

$$J_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{z^T(k) Q z(k) + r_m [v'(k-1)]^2\}, \quad |u(k)| > U_m. \quad (30)$$

下面, 用双性能指标 J_1 和 J_2 来综合系统(19).

1) 当 $|u(k)| \leq U_m$ 时, 用动态规划解式(19)和(29), 可得

$$u(k) = \bar{K} z(k). \quad (31)$$

这里增益矩阵 $\bar{K} = [K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6]$ 是 $K(l)$ 的稳态值, 用下面一组递推关系式确定:

$$K(l) = -[D^T \hat{Q}(l-1) D + r]^{-1} D^T \hat{Q}(l-1) F, \quad (32)$$

$$\hat{Q}(l) = Q + P(l), \quad (33)$$

$$P(l) = F^T \hat{Q}(l-1) \{1 - D[D^T \hat{Q}(l-1) D + r]^{-1} D \hat{Q}(l-1)\} F, \quad (34)$$

$$P(0) = 0, \quad (35)$$

$$\bar{K} = \lim_{l \rightarrow \infty} K(l), \quad (36)$$

$$l = N - k.$$

2) 当 $u(k) > U_m$ 时, 对 $v'(k) = u(k) - U_m$ 两边取一次差分, 可得

$$\nabla u(k) = \nabla v'(k). \quad (37)$$

考虑式(15)–(18), 以 v' 代替 u , 式(19)和(30)变成

$$z_1(k+1) = F z_1(k) + D v'(k) \quad (38)$$

和

$$J_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \{ \mathbf{z}_1^T(k) Q \mathbf{z}_1(k) + r_m [v'(k-1)]^2 \}. \quad (39)$$

式中

$$\mathbf{z}_1(k) = [e(k-1), \nabla e(k), \nabla x_2(k), \nabla x_3(k), v'(k-2), v'(k-1)]^T. \quad (40)$$

用动态规划解式(38)和(39),可得

$$v'(k) = \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k). \quad (41)$$

把它代入式(37),得

$$u(k) = \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k) + U_m. \quad (42)$$

其中

$$\bar{K}_m = \lim_{l \rightarrow \infty} K_m(l) = [K_{m1} K_{m2} K_{m3} K_{m4} K_{m5} K_{m6}], \quad (43)$$

$$K_m(l) = -[D^T \hat{Q}(l-1)D + r_m]^{-1} D^T \hat{Q}(l-1)F, \quad (44)$$

$$\hat{Q}(l) = Q + P(l) \quad (45)$$

$$P(l) = F^T \hat{Q}(l-1) \{ 1 - D[D^T \hat{Q}(l-1)D + r_m]^{-1} D^T \hat{Q}(l-1) \} F, \quad (46)$$

$$P(0) = 0. \quad (47)$$

3) 当 $u(k) < -U_m$ 时,同理可得

$$v'(k) = -\bar{K}_m \mathbf{z}_1(k),$$

$$u(k) = \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k) - U_m. \quad (48)$$

归纳后得到

$$u(k) = \begin{cases} \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k) - U_m, & u(k) < -U_m, \\ \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k), & -U_m \leq u(k) \leq U_m, \\ \bar{K}_m \mathbf{z}_1(k) + U_m, & u(k) > U_m. \end{cases} \quad (49)$$

式(49)求出的是状态的分段线性函数. 它在分段上指标最优,并不表明整段性能指标 \bar{J} 取极小. 这就是说,对 \bar{J} 而言这个控制不是最优而是次优的.

三、举 例

给出 $T_m = 0.095$ 秒, $T_L = 0.008$ 秒, $\tau = 0.01$ 秒, $K_v = 15.2$ 弧/秒·伏. 由方程(3)一(5)和(8)一(10),可算出

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 9.83609 \times 10^{-3} & 3.99490 \times 10^{-5} \\ 0 & 9.95527 & 5.58627 \times 10^{-3} \\ 0 & -7.35095 & 0.25693 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = [1.89349 \times 10^{-3} \quad 0.516723 \quad 84.9182]^T,$$

$$H_2 = [4.95664 \times 10^{-5} \quad 9.83609 \times 10^{-3} \quad 4.47032 \times 10^{-2}]^T.$$

取权系数 $r = 0.3 \times 10^{-5}$, $r_m = 400$, $q = 0.4$. 由式(32)一(36)和(43)一(47),可算出

$$K_1 = 69.7218, \quad K_2 = 292.919, \quad K_3 = -4.42451,$$

$$K_4 = -2.38054 \times 10^{-2}, \quad K_5 = 2.85902, \quad K_6 = -1.58902$$

和

$$K_{m1} = 4.98499 \times 10^{-2}, \quad K_{m2} = 9.03321, \quad K_{m3} = -0.815311,$$

$$K_{m4} = -6.49308 \times 10^{-3}, \quad K_{m5} = 0.984125, \quad K_{m6} = -5.71528 \times 10^{-3}.$$

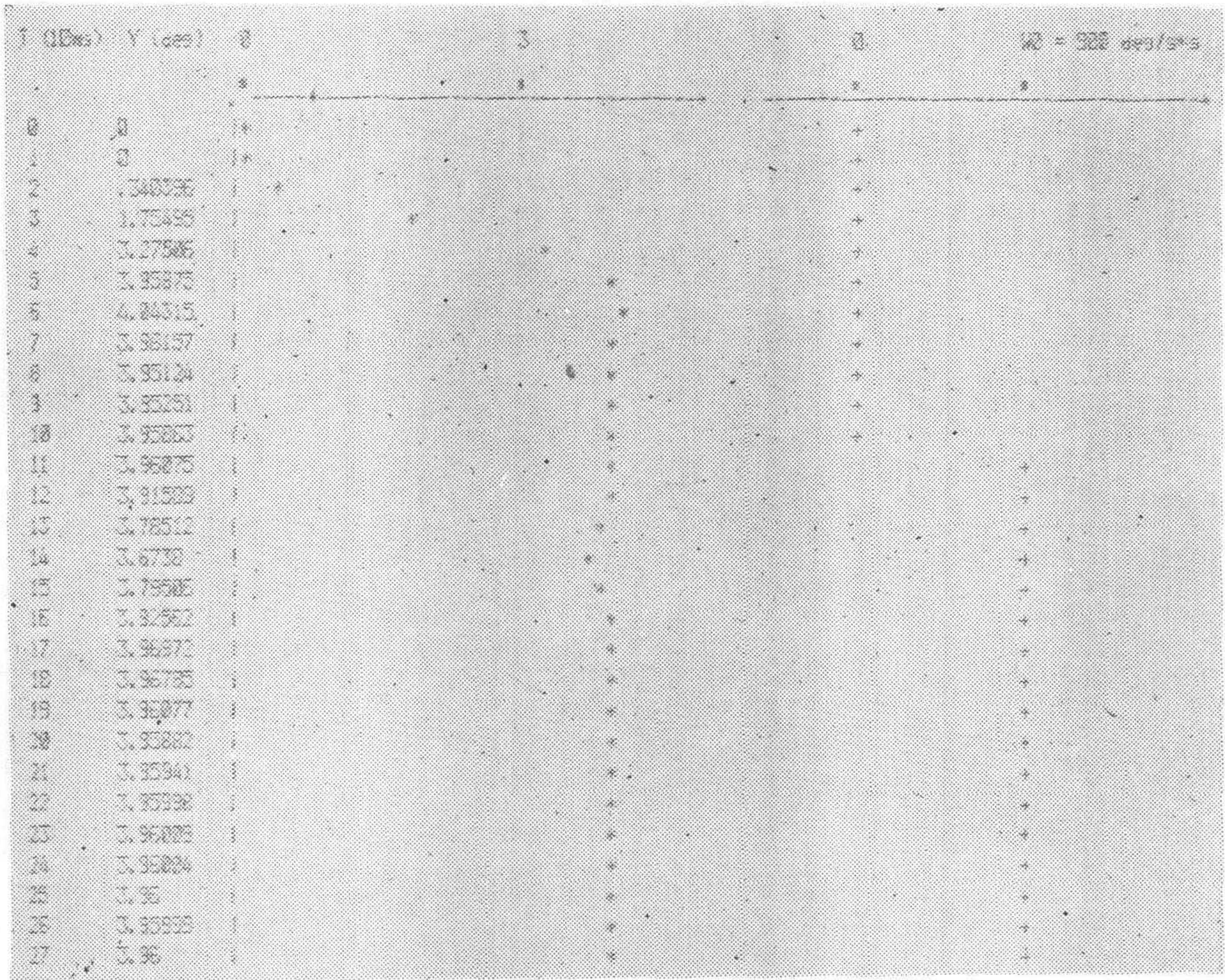


图 2

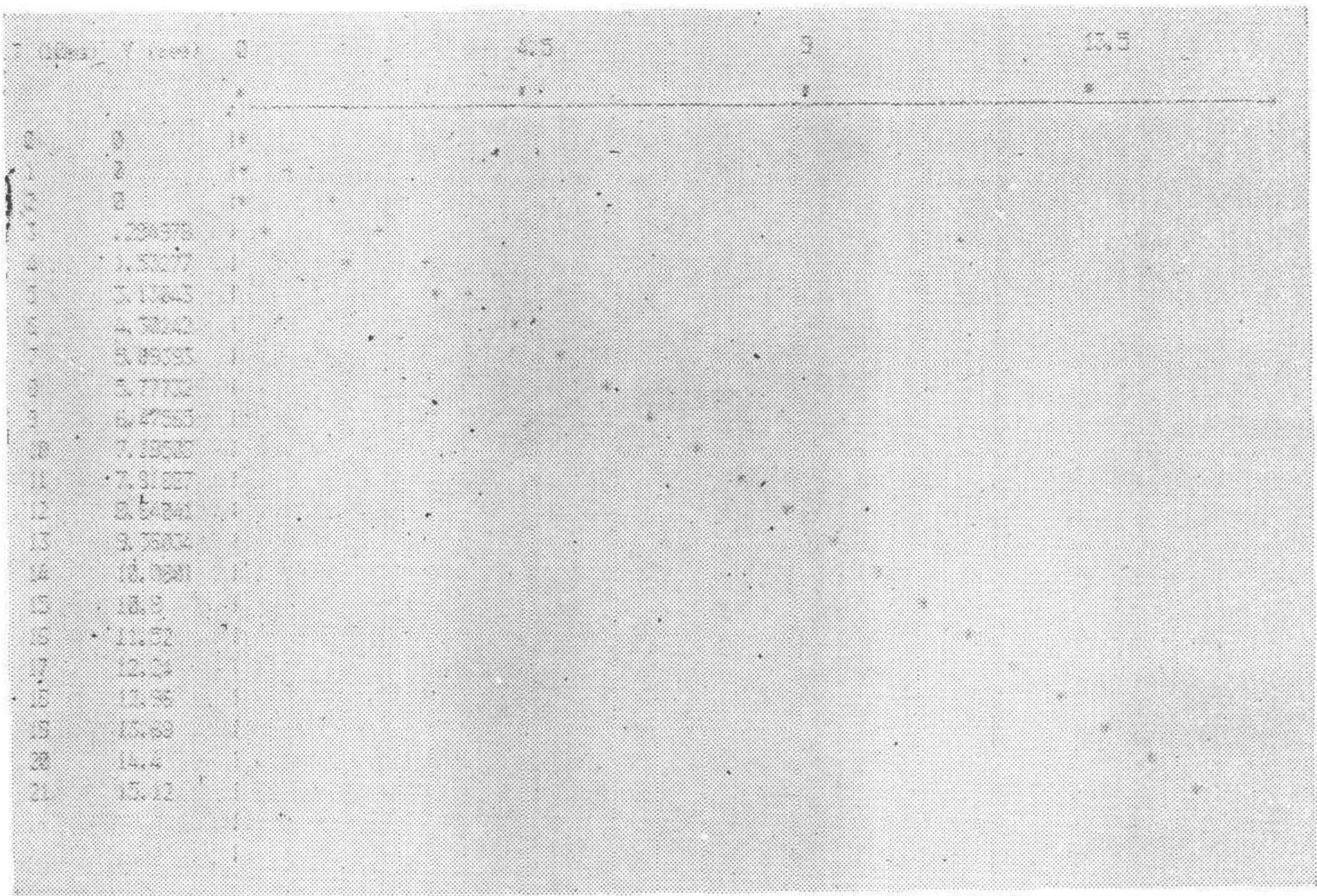


图 3

用一台北京工业大学生产的单板机 TP-801 (作数字控制器)和一台 TP-803 (模拟控制对象) 组成双机系统。用 BASIC 语言编程, 完成了上述系统的数字仿真。结果表明:

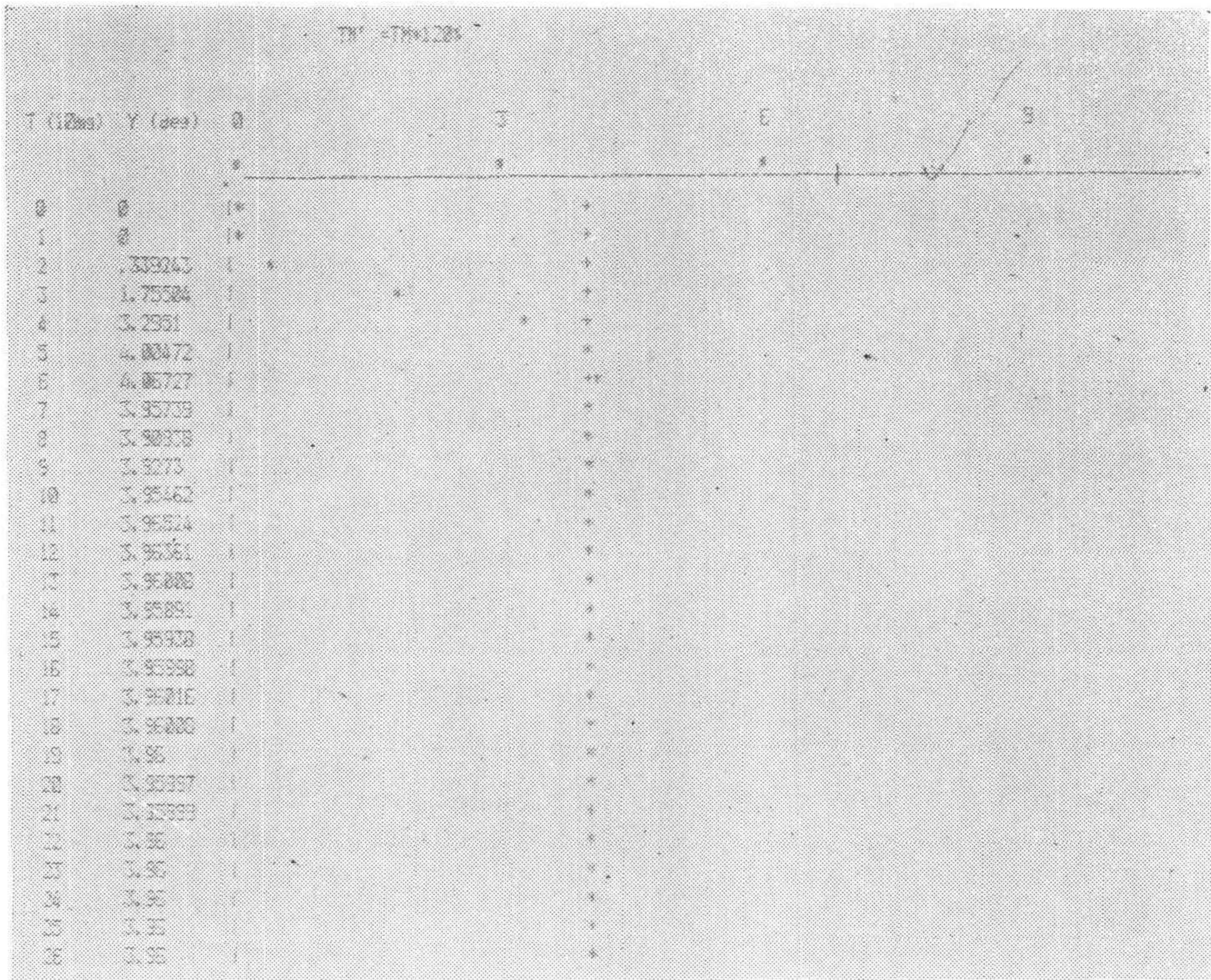


图 4

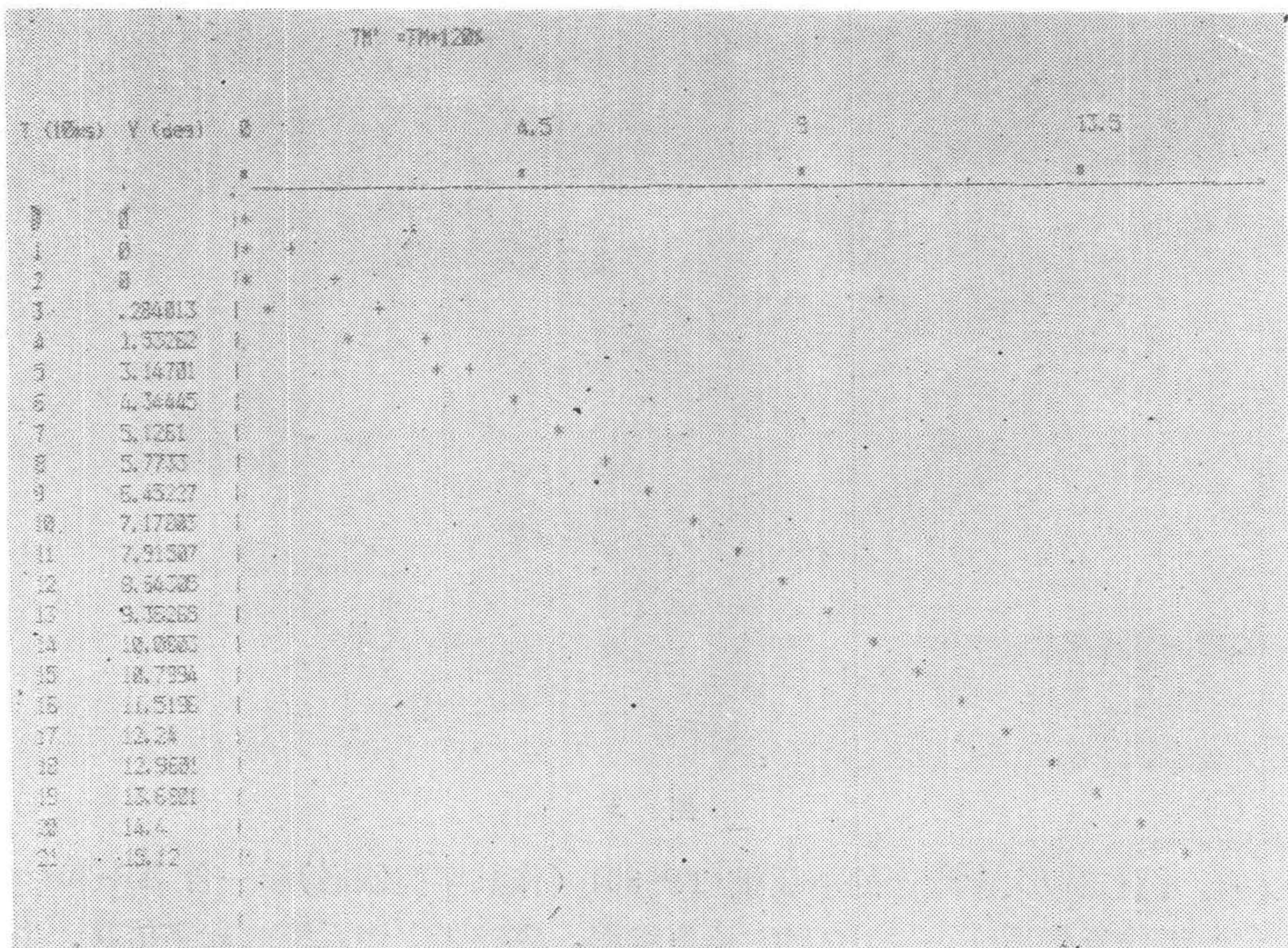


图 5

- 1) 输入为阶跃函数或斜坡函数时稳态误差为零；
- 2) 扰动为阶跃函数时稳态误差为零；
- 3) 有良好的阶跃响应和斜坡响应；
- 4) 系统特性对于控制对象参数的变化低灵敏， T_m 增大 20% 后阶跃响应和斜坡响应无明显变化。

图 2 是输入和扰动都为阶跃函数时的响应；图 3 是斜坡响应；图 4 和图 5 分别是 T_m 增大 20% 后的阶跃响应和斜坡响应。

参 考 文 献

- [1] A. E. 布赖森, 何毓琦著, 钱洁文等译, 应用最优控制, 国防工业出版社 (1982), 259.
- [2] B. D. O. 安德森, J. B. 莫尔著, 龙云程译, 线性最优控制, 科学出版社(1982).
- [3] Tsuchiya T., Experimental Studies on the Application of Optimal Control Theory, *Int. J. Control*, Vol. 33, No. 2, (1981), 213—226.

A MICROPROCESSOR-CONTROLLED SUB-OPTIMAL D. C. SERVO SYSTEM

FENG GUONAN CHEN JIAN'GUO
(Beijing Polytechnic University)

ABSTRACT

In this paper, inequality constraints on the control variables of the servo systems are treated by integral penalty functions. A sub-optimal control system synthesis method suitable for the microprocessor implementation and a practical example are given.

The simulation experiments on digital computer have proved that the synthesis method of rapid servo system controlled by the microprocessor is effective.