第10卷 第3期 自动化学报 Vol. 10, No. 3
1984年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1984

异步时序电路反馈稳定性判据

刘春和
(哈尔滨工业大学)

摘 要

本文提出了"含相开关代数"的概念，证明了它与布尔代数是同构的，从而使布尔代数可用于设计时序电路. 文中利用含相开关代数这一概念推导出异步时序电路反馈稳定性判据，从而能方便地找出全部不稳定转换.

一、引 言

对于一个异步时序电路，当外部输入从一个状态向另一个状态转换时，输出是否能达到一个预期的稳定状态，这在开关理论中被称为时序电路的"竞争冒险"(race and hazard)问题. 由于在时序电路中存在着反馈，因此时序电路在某一时刻的状态不仅与该时刻的输入有关，而且还与前一时刻电路本身的状态有关，于是引入了"时间"的概念. 但是描述开关电路的布尔代数，记为 B_2，是不含时间变量的，为此，将布尔代数(即开关代数)加以扩充，提出了含相开关代数，并证明了该开关函数与布尔代数是同构的，从而扩大了布尔代数的功能，使时序电路的一些问题得到解决. 本文主要研究时序电路反馈稳定性问题.

二、含相开关代数

开关电路的波形如图1所示. 其中 t_k 为时标，在 t_k 与 t_{k+1} 两个时标之间存在一个稳定的状态，称表征一个稳定状态的两个时标之差 $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ 为离散时距，于是有下述定义:

定义 1. 若存在一个离散时距的有序集 $T = \{\tau_i | j \in J\}$，J 为标集，$\tau_i \in T$，τ 是定义在 T 上的一个变量，则 T 在二元集 $K_2 = \{0, 1\}$ 上关于 τ_i 的映射 $\zeta_{\tau_i}(\tau)$ 为

$$\zeta_{\tau_i}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{当且仅当 } \tau \neq \tau_i, \\ 1, & \text{当且仅当 } \tau = \tau_i. \end{cases} \tag{1}$$

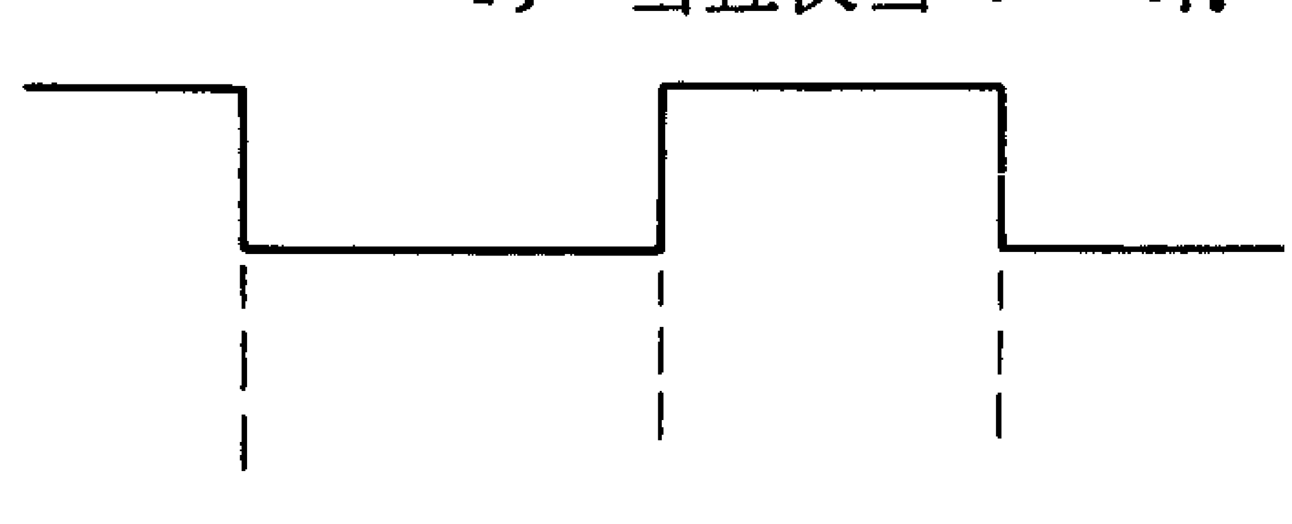

图1 开关电路波形

本文于1982年3月4日收到.

其中 $\zeta_{\tau_i}(\tau)$ 称为 τ_i 的时序相位.

为了书写方便,将 $\zeta_{\tau_i}(\tau)$ 记为 ζ. 由于所研究的问题只考虑两个相邻时刻,故(1)式可表示为

$$\zeta=\begin{cases}0, & \text{当且仅当 } \tau=\tau_{i+1},\\ 1, & \text{当且仅当 } \tau=\tau_i.\end{cases} \tag{2}$$

定义 2. 含相开关代数 $(\zeta;\cdot,+,-,=;K_2)$ 中, $K_2=\{0,1\}$, 并且对于所有的 $x,\zeta\in K_2$. 二元运算"·","+"及一元运算"—",如表 1 所示.

表 1

$\cdot$	0	1	x	$\bar{x}$	ξ	$\bar{\xi}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	x	$\bar{x}$	ξ	$\bar{\xi}$
x	0	x	x	0	$x\cdot\xi$	$x\cdot\bar{\xi}$
$\bar{x}$	0	$\bar{x}$	0	$\bar{x}$	$\bar{x}\cdot\xi$	$\bar{x}\cdot\bar{\xi}$
ξ	0	ξ	$x\cdot\xi$	$\bar{x}\cdot\xi$	ξ	0
$\bar{\xi}$	0	$\bar{\xi}$	$x\cdot\bar{\xi}$	$\bar{x}\cdot\bar{\xi}$	0	$\bar{\xi}$

$+$	0	1	x	$\bar{x}$	ξ	$\bar{\xi}$
0	0	1	x	$\bar{x}$	ξ	$\bar{\xi}$
1	1	1	1	1	1	1
x	x	1	x	1	$x+\xi$	$x+\bar{\xi}$
$\bar{x}$	$\bar{x}$	1	1	$\bar{x}$	$\bar{x}+\xi$	$\bar{x}+\bar{\xi}$
ξ	ξ	1	$x+\xi$	$\bar{x}+\xi$	ξ	1
$\bar{\xi}$	$\bar{\xi}$	1	$x+\bar{\xi}$	$\bar{x}+\bar{\xi}$	1	$\bar{\xi}$

y	$\bar{y}$
0	1
1	0
x	$\bar{x}$
$\bar{x}$	x
ξ	$\bar{\xi}$
$\bar{\xi}$	ξ

定义 3. 一个变量 x 的现状态为 $x\cdot\zeta$, 下一状态为 $\bar{x}\cdot\bar{\zeta}$. 其中"·"为逻辑与, x, $\zeta\in K_2$. 于是,可以得到一个关于变量 x 的状态集 $S_1=\{x\cdot\zeta,\ \bar{x}\cdot\bar{\zeta}\}$. S 的角标表示变量数.

定义 4. 一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ 的状态集 S_n 在 $K_2=\{0,1\}$ 上的映射为状态函数,记为 $f[\boldsymbol{x}(\zeta)]$.

例如,当 $\boldsymbol{x}=\{x\}$, 则 $f[\boldsymbol{x}(\zeta)]=x\cdot\zeta+\bar{x}\cdot\bar{\zeta}=\bar{x}\oplus\zeta$, 因此一个变量 x 可表示为含相开关代数变量的状态变量,记为 $x(\zeta)=\bar{x}\oplus\zeta$.

引理 1. 含相开关代数与布尔代数是同构的.

证明. 根据定义 2, 4,

(1) 满足结合律. 对于 $x_1(\zeta)$, $x_2(\zeta)$, $x_3(\zeta)\in K_2$ 有

$$x_1(\zeta)\cdot[x_2(\zeta)\cdot x_3(\zeta)]=[x_1(\zeta)\cdot x_2(\zeta)]\cdot x_3(\zeta);$$
$$x_1(\zeta)+[x_2(\zeta)+x_3(\zeta)]=[x_1(\zeta)+x_2(\zeta)]+x_3(\zeta).$$

(2) 满足分配律. 对于 $x_1(\zeta)$, $x_2(\zeta)$, $x_3(\zeta)\in K_2$, 有

$$x_1(\zeta)+[x_2(\zeta)\cdot x_3(\zeta)]=[x_1(\zeta)+x_2(\zeta)]\cdot[x_1(\zeta)+x_3(\zeta)];$$
$$x_1(\zeta)\cdot[x_2(\zeta)+x_3(\zeta)]=[x_1(\zeta)\cdot x_2(\zeta)]+[x_1(\zeta)\cdot x_3(\zeta)].$$

(3) 满足重迭律. 对于所有的 $x(\zeta)\in K_2$, 有

$$x(\zeta)+x(\zeta)=x(\zeta);\quad x(\zeta)\cdot x(\zeta)=x(\zeta).$$

(4) 满足吸收律. 对于 $x_1(\zeta),x_2(\zeta)\in K_2$, 有

$$x_1(\zeta)\cdot[x_1(\zeta)+x_2(\zeta)]=x_1(\zeta);\quad x_1(\zeta)+[x_1(\zeta)\cdot x_2(\zeta)]=x_1(\zeta).$$

(5) 满足交换律. 对于 $x_1(\zeta)$, $x_2(\zeta)\in K_2$, 有

$$x_1(\zeta)+x_2(\zeta)=x_2(\zeta)+x_1(\zeta);\quad x_1(\zeta)\cdot x_2(\zeta)=x_2(\zeta)\cdot x_1(\zeta).$$

(6) 满足互补律. 对于所有的 $x(\zeta)\in K_2$, 有

$$x(\zeta)+\overline{x(\zeta)}=1;\quad x(\zeta)\cdot\overline{x(\zeta)}=0.$$

因为 $x, \zeta \in \{0, 1\}$，故 $x+\zeta \in \{0, 1\}$，$x \cdot \zeta \in \{0, 1\}$，所以 $x(\zeta) \in \{0, 1\}$. 根据表 1 很容易证明上述六条成立. 根据文献 [6] 知含相开关代数与布尔代数（即开关代数)公理系统是一一对应的，故二者是同构的.

根据引理 1 推知，状态函数与布尔函数也是同构的，因此布尔代数中的各种定理均可在状态函数中使用.

定义 5. ζ 的微分为其自身的增量[2,3]，记为

$$d\zeta = \zeta \oplus \bar{\zeta}. \tag{3}$$

根据文献[2,3]，对 $f[\boldsymbol{x}(\zeta)]$，$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，有

$$\frac{df}{d\zeta} = f[\boldsymbol{x}(\zeta)] \oplus f[\boldsymbol{x}(\zeta \oplus d\zeta)] = f[\boldsymbol{x}(\zeta)] \oplus f[\boldsymbol{x}(\bar{\zeta})]$$

$$= f[\boldsymbol{x}(\zeta)] \oplus f\left[\boldsymbol{x}(\zeta) \oplus \frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\right] = \sum_{\boldsymbol{e}}\!\!\!\!\bigcirc \frac{\partial f}{\partial x^{\boldsymbol{e}}}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}}, \quad 0 < \boldsymbol{e} \leqslant 2^n - 1. \tag{4}$$

同理有 $f[x(\zeta)]$ 关于 ζ 的微分[2,3]

$$df = \frac{df}{d\zeta} d\zeta. \tag{5}$$

(4)式中，符号 $\sum\!\!\!\!\bigcirc$ 为异或运算，$\boldsymbol{e}$ 的意义[2,3]为 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{e}} = x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$，称为 n 个变量的环幂. 其中 $x_i^{e_i} = x_i + \boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_i \in \{0, 1\}$，$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n)$. 例如 $n = 4$，$\boldsymbol{e} = (0110)$，则 $\boldsymbol{x}^{0110} = x_1^0 \cdot x_2^1 \cdot x_3^1 \cdot x_4^0 = x_2 x_3$.

三、反馈稳定性判据

在时序电路中，由于外部输入从状态 A 变为状态 B 时，输出端表现的不稳定状态，通常分为[4]稳态冒险、瞬态冒险及周期冒险. 对此目前尚不能分门别类地进行检测，文献[4]给出了一个列表分析法. 对给定的时序电路在 (A/B) 转换中是否包含着冒险，需对所有的 (A/B) 转换对一一列表分析，其工作量大得惊人.

定义 6. 一个单端输出的异步时序电路，$\boldsymbol{f}$ 为其输出，若输入 $\boldsymbol{x}$ 的变化使 $\boldsymbol{f}$ 的状态值从 1 向 0 (或从 0 向 1) 变化，反馈信号也使 $\boldsymbol{f}$ 的状态值从 1 向 0 (或从 0 向 1) 变化，则该反馈为正反馈；反之，若输入 $\boldsymbol{x}$ 的变化使 $\boldsymbol{f}$ 的状态值从 1 向 0 (或从 0 向 1) 变化，而反馈信号使 $\boldsymbol{f}$ 从 0 向 1 (或从 1 向 0)，变化，则该反馈为负反馈.

在开关电路中，除了信号源外，一般都要求输出一个确定的稳定状态，因此反馈必须是正反馈. 下面给出正反馈是稳定的检测判别方法.

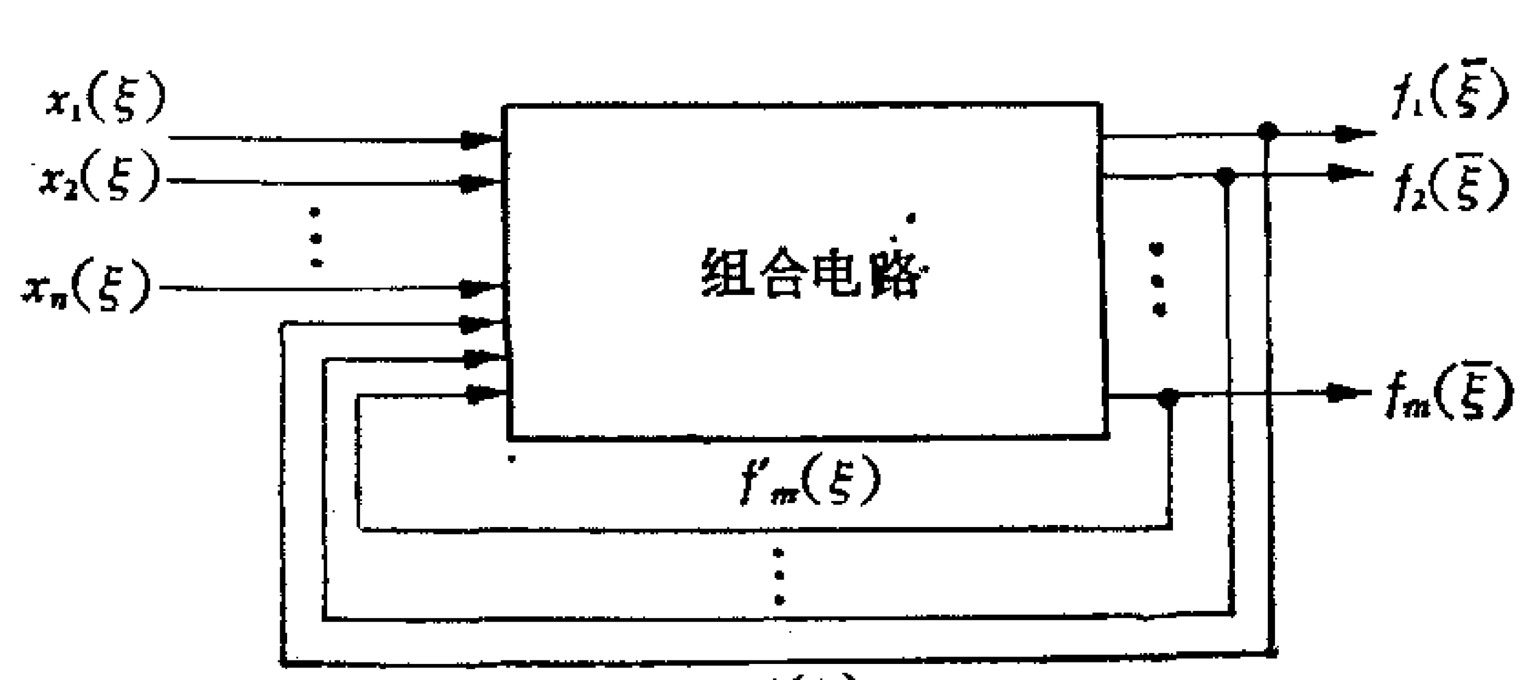

图 2 异步时序电路模型

一个异步时序电路可由图 2 描述. 图中 $\boldsymbol{f}(\xi)=(f_1(\xi), f_2(\xi), \cdots\cdots, f_m(\xi))$ 为下一状态向量; $\boldsymbol{f}'(\zeta)=(f_1'(\zeta), f_2'(\zeta), \cdots, f_m'(\zeta))$ 为反馈向量;

$$\boldsymbol{x}(\zeta)=(x_1(\zeta), x_2(\zeta), \cdots, x_n(\zeta))$$

为外部输入向量.

一个时序机下一状态的产生,是由于输入 $\boldsymbol{x}(\zeta)$ 产生了一个增量,即有

$$\boldsymbol{x}(\zeta)\oplus dx/d\zeta,$$

同理反馈也跟着产生一个增量,即 $\boldsymbol{f}'(\zeta)\oplus d\boldsymbol{f}'/d\zeta$. 因此下个状态为

$$\boldsymbol{f}\left[\boldsymbol{x}(\zeta)\oplus\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}, \boldsymbol{f}'(\zeta)\oplus\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}\right]=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\zeta\oplus d\zeta), \boldsymbol{f}'(\zeta\oplus d\zeta)]$$
$$=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\bar{\zeta}); \boldsymbol{f}'(\bar{\zeta})]$$

引理 2. 如果 $\frac{d\boldsymbol{f}}{d\zeta}=1$, 则 $\boldsymbol{f}(\bar{\zeta})=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\bar{\zeta}), \boldsymbol{f}'(\bar{\zeta})]$. 证明. 由定义 4, 可以定义状态函数表达式

$\boldsymbol{f}(\bar{\zeta})=\bar{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}'(1)]\oplus\bar{\zeta}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(1)]\cdot\bar{\zeta}\oplus\bar{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}'(1)]\cdot\zeta$,其中 $\boldsymbol{x}'(\zeta)=(\boldsymbol{x}(\zeta), \boldsymbol{f}'(\zeta))$.

由 Shannon 展开定理[5] 知 $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\bar{\zeta})]=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]\cdot\zeta\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(1)]\cdot\bar{\zeta}$. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}[\bar{\zeta}]&=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(1)]\cdot\bar{\zeta}\oplus\bar{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}'(1)]\cdot\zeta\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]\cdot\zeta\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]\cdot\zeta\\&=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(\bar{\zeta})]\oplus\{\bar{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}'(1)]\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]\}\cdot\zeta\\&=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(\bar{\zeta})]\oplus\{\overline{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(1)]\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]}\}\cdot\zeta.\end{aligned}\tag{6}$$

因为 $\frac{d\boldsymbol{f}}{d\zeta}=1$, 根据布尔微分性质知

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{d\zeta}=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(0)]\oplus\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(1)]=1.$$

代入(6)式得 $\boldsymbol{f}[\bar{\zeta}]=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}'(\bar{\zeta})]=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\bar{\zeta}), \boldsymbol{f}'(\bar{\zeta})]$, 证毕.

令 $\boldsymbol{n}[\boldsymbol{x}(\zeta), \boldsymbol{f}'(\zeta)]$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的状态转换函数,由图 2 得

$$\boldsymbol{f}(\bar{\zeta})=\boldsymbol{n}[\boldsymbol{x}(\zeta), \boldsymbol{f}'(\zeta)].\tag{7}$$

考虑更一般情况,令

$$\boldsymbol{f}'(\zeta)=(f_1'(\zeta), f_2'(\zeta), \cdots, f_q'(\zeta), f_{q+1}'(x), \cdots, f_m'(x)),$$
$$\boldsymbol{x}(\zeta)=(x_1(\zeta), x_2(\zeta), \cdots, x_p(\zeta), x_{p+1}, \cdots, x_n).$$

对(7)式求微分[2,3], 有

$$\begin{aligned}df=&\left[\sum_{\boldsymbol{e}_1}\!\!\!\!\bigcirc\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{f}'^{\boldsymbol{e}_1}}\left(\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_1}\oplus\sum_{\boldsymbol{e}_2}\!\!\!\!\bigcirc\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{e}_2}}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_2}\right.\\&\left.\oplus\sum_{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2}\!\!\!\!\bigcirc\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{f}'^{\boldsymbol{e}_1}\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{e}_2}}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_1}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_2}\right]\cdot d\zeta,\\&0<\boldsymbol{e}_1\leqslant 2^q-1,\ 0<\boldsymbol{e}_2\leqslant 2^p-1.\end{aligned}\tag{8}$$

注意到 $\boldsymbol{x}(\zeta)=\bar{\boldsymbol{x}}\oplus\zeta$, 则 $\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=1$, 且

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_1}d\zeta&=\left(\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}\right)^{\boldsymbol{e}_1}(d\zeta)^{\boldsymbol{e}_1},\quad 0<\boldsymbol{e}_1\leqslant 2^q-1,\\&=\left(\frac{d\boldsymbol{f}'}{d\zeta}d\zeta\right)^{\boldsymbol{e}_1},\quad 0<\boldsymbol{e}_1\leqslant 2^q-1,\\&=(d\boldsymbol{f}')^{\boldsymbol{e}_1},\quad 0<\boldsymbol{e}_1\leqslant 2^q-1.\end{aligned}$$

于是，(8)式可写为

$$df = \sum_{e_2} \frac{\partial f}{\partial x^{e_2}} d\zeta \oplus \lambda (df')^{e_1}, \quad 0 < e_1 \leqslant 2^q - 1, \ 0 < e_2 \leqslant 2^p - 1. \tag{9}$$

其中

$$\lambda = \sum_{e_1} \frac{\partial f}{\partial f'^{e_1}} \oplus \sum_{e_1, e_2} \frac{\partial f}{\partial f'^{e_1} \partial x^{e_2}}, \quad 0 < e_1 \leqslant 2^q - 1, \ 0 < e_2 \leqslant 2^p - 1. \tag{10}$$

称(10)式为反馈稳定性方程.

引理 3. 对于一个异步时序电路，如果按反馈回路划分的各个子时序电路在整个时序电路中都是反馈稳定的，则整个时序电路也是反馈稳定的.

定理(反馈稳定性判据). 对于由逻辑结构表达式 $f(\zeta)$ 所描述的异步时序电路，如果满足 $df/d\zeta = 1$，则该电路反馈稳定的充要条件是由 $x(\zeta)$ 与 $f'(\zeta)$ 所确定的 $(n+m)$ 维立方体上所有非禁止点 m_k，均有 $\lambda(m_k) = 0$.

证明. 必要性. 根据引理 3，按单端输出证明即可. 考虑 $f_i(\zeta)$ 从 1 向 0 变化的情况，以 $f_i(\zeta)$ 乘(9)式两边得

$$f_i(\zeta) \cdot df_i = f_i(\zeta) \cdot \left(\sum_{e_2} \frac{\partial f_i}{\partial x^{e_2}} d\zeta \right) \oplus \lambda_i f_i(\zeta) (df')^{e_1},$$
$$0 < e_1 \leqslant 2^q - 1, \ 0 < e_2 \leqslant 2^p - 1.$$

从 1 向 0 变的定向微分[3]为 $d_1 f_i = f_i(\zeta) df_i$，考虑到在稳定状态时 $f_i(\zeta) = f'_i(\zeta)$，根据定义 5，正反馈应为

$$\lambda_i f_i(\zeta) = f'_i(\zeta) = f_i(\zeta). \tag{11}$$

由于 $\dfrac{df_i}{d\zeta} = f_i(\zeta) \oplus f_i(\zeta)$，$f_i(\zeta) = f_i(\zeta) \oplus \dfrac{df_i}{d\zeta}$，所以，

$$\lambda_i f_i(\zeta) = f_i(\zeta) \oplus \frac{df_i}{d\zeta} = f_i(\zeta) \oplus 1, \quad \bar{\lambda}_i \cdot f_i(\zeta) = 1.$$

解此方程，应且仅应得一组解：

$$\begin{cases} \lambda_i = 0, \\ f_i(\zeta) = 1. \end{cases}$$

当 $f_i(\zeta)$ 从 0 向 1 时，相应的定向微分为[3] $d_0 f_i = \overline{f_i(\zeta)} df_i$，对于正反馈有

$$\lambda_i \overline{f_i(\zeta)} = \overline{f_i(\zeta)}. \tag{12}$$

由于 $\overline{f_i(\zeta)} = f_i(\zeta) \oplus 1 = \bar{f}_i(\zeta) \oplus 1 = f_i(\zeta)$，故有 $\bar{\lambda}_i \bar{f}_i(\zeta) = 1$. 解此方程，应且仅应有一组解：

$$\begin{cases} \lambda_i = 0, \\ f_i(\zeta) = 0. \end{cases}$$

若反馈为负反馈，则当 $f_i(\zeta)$ 从 1 向 0 变化时有

$$\lambda_i f_i(\zeta) = \overline{f_i(\zeta)}, \tag{13}$$

即 $\bar{\lambda}_i f_i(\zeta) = 0$，解此方程有三组解：

$$\begin{cases} \lambda_i = 1 \\ f_i(\zeta) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_i = 1 \\ f_i(\zeta) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 \\ f_i(\zeta) = 0. \end{cases}$$

同样，当 $F_i(\zeta)$ 从 0 向 1 变化时有

$$\lambda_i\overline{f_i(\bar{\zeta})} = f_i(\zeta), \tag{14}$$

即 $\bar{\lambda}_i\overline{F_i(\zeta)} = 0$，解此方程得三组解：

$$\begin{cases}\lambda_i = 1\\ f_i(\zeta) = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda_i = 1\\ f_i(\zeta) = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda_i = 0\\ f_i(\zeta) = 1.\end{cases}$$

充分性 如果 $(n+m)$ 维立方体上所有非禁止点均使 $\lambda = 0$，则对于每一个 λ_i 必为0，有三种情况：

$$1)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0;\end{cases} \quad 2)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 0;\end{cases} \quad 3)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 0.\end{cases}$$

仅证第3)种，同时满足两个方程

$$\begin{cases}\lambda_i\overline{f_i(\bar{\zeta})} = 0,\\ \lambda_i f_i(\bar{\zeta}) = 0.\end{cases}$$

方程 $\lambda_i\overline{f_i(\bar{\zeta})} = 0$，可写成 $\lambda_i\overline{f_i(\bar{\zeta})} = \overline{f_i(\zeta)\oplus\overline{f_i(\bar{\zeta})}} = f_i(\zeta)\oplus\overline{f_i(\bar{\zeta})}$. 要使该方程仅在 $\lambda_i=0$ 时成立，唯一的条件是 $\overline{f_i(\bar{\zeta})} \neq 0$，即 $\overline{f_i(\bar{\zeta})} = 1$，故有 $\lambda_i\overline{f_i(\bar{\zeta})} = \overline{f_i(\zeta)}$，满足 (12) 式. 对于 $\lambda_i F_i(\zeta) = 0$，同理可证满足(11)式. 其他同理可证.

否则，至少有一组解使得 $\lambda_i = 1$. 对于下列方程（满足各种解的方程均可归纳为下列形式）：

$$\lambda_i^* \circ f_i(\bar{\zeta})^* = e. \tag{15}$$

其中○为定义在布尔代数中的各种运算（包括异或⊕在内），x^* 表示 x 或 $\bar{x}$，$e\in\{0, 1\}$，最多可有五十九组解，比较后有九组不同，兹分别列于下面：

$$1)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 1;\end{cases} \quad 2)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 1;\end{cases} \quad 3)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 1;\end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases}f_i(\bar{\zeta}) = 1\\ \lambda_i = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0;\end{cases} \quad 5)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\bar{\zeta}) = 1\\ \lambda_i = 1;\end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 1;\end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 1;\end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases}f_i(\bar{\zeta}) = 0\\ \lambda_i = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\bar{\zeta}) = 1\\ \lambda_i = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\bar{\zeta}) = 1\\ \lambda_i = 1;\end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases}f_i(\zeta) = 1\\ \lambda_i = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 1,\end{cases} \quad \begin{cases}f_i(\zeta) = 0\\ \lambda_i = 0.\end{cases}$$

证明. 第9)组，当且仅当三组解满足方程 $\bar{\lambda}_i f_i(\zeta) = 0$，则 $\lambda_i f_i(\zeta) = f_i(\zeta) = \overline{f_i(\zeta)}$，满足负反馈(13)式，证毕.

定理中提到的禁止点是指时序电路的不稳定状态、逻辑约束、禁止输入子序列等. 输入的任何一个稳定状态，均不允许出现在禁止点上. 如果点 P_i 是导致时序电路输出 F 处于不稳定状态的禁止点，则当且仅当对于描述 F 的表达式 $Y = Y(x, y)$ 及 $P_i = (x_i, y_i)$，有

$$y_i \neq Y(x_i, y_i). \tag{16}$$

如果每一个子时序电路的不稳定点集为 ω_i，则整个时序电路的反馈不稳定点集 Ω 为

$$\Omega = \bigcup_i \omega_i.$$

推论. 如果非禁止点 $P_k = (P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22})$，其中 (P_{11}, P_{12}) 为外部输入状态，(P_{21}, P_{22}) 为反馈输入状态，并且使得 $\lambda(P_k) = 1$，则反馈不稳定（或冒险）发生在从 $P_k = (P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22})$ 向点 $P_s = (\bar{P}_{11}, P_{12}, \bar{P}_{21}, P_{22})$ 转换的过程中.

根据定理及推论可知，如果 P_k 或 P_s 只要有一个是禁止点，那么这一对点就可不予考虑；如果使得 $\lambda = 1$ 的点 P_k, P_s（包括所有的 k, s）均为禁止点，则该时序电路是反馈稳定的.

例[6]. 判别图 3 所示的时序电路的反馈稳定性，并指出能使电路反馈不稳定的所有转换.

电路的表达式为

$$\begin{cases} Y_1 = x_2 y_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_2, \\ Y_2 = x_1 x_2 + \bar{x}_1 y_2. \end{cases}$$

因反馈回路可划分为两个子时序电路，根据(10)式，Y_1, Y_2 回路的反馈稳定性方程分别为

$$\lambda_1 = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial y_1 \partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial y_1} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial y_1 \partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_2 \partial y_1} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_2 \partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_2 \partial y_1 \partial y_2}$$
$$\oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial y_1} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial y_2} \oplus \frac{\partial Y_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial y_1 \partial y_2} = x_1 + \bar{x}_2$$

表示集合 $\omega_1 = \{x_1\phi\phi\phi, \ \phi\bar{x}_2\phi\phi\}$.

$$\lambda_2 = x_1$$

表示集合 $\omega_2 = \{x_1\phi\phi\phi\} \subset \omega_1$.

所以，整个时序电路的反馈不稳定点集为 $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 = \{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{y}_1\bar{y}_2, \ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{y}_1 y_2, \ \bar{x}_1\bar{x}_2 y_1\bar{y}_2, \ \bar{x}_1\bar{x}_2 y_1 y_2, \ x_1\bar{x}_2\bar{y}_1\bar{y}_2, \ x_1\bar{x}_2\bar{y}_1 y_2, \ x_1\bar{x}_2 y_1\bar{y}_2, \ x_1\bar{x}_2 y_1 y_2, \ x_1 x_2\bar{y}_1\bar{y}_2, \ x_1 x_2\bar{y}_1 y_2, \ x_1 x_2 y_1\bar{y}_2, \ x_1 x_2 y_1 y_2\} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111\}$. 根据(16)式判别出禁止点为{0001, 0010, 1001, 1010, 1011, 1100, 1110}. 由于(0010)是禁止点，因此(1101)⇒(0010)的转换也是禁止子序列，故点(1101)也是禁止点. 同理(0011)也是禁止点，只有{0000, 1000, 1111}是反馈不稳定点. 根据推论，出现不稳定状态的转换方向是(0000)⇒(1111)，(1000)⇒(0111)，(1111)⇒(0000). 注意，(0111)⇒(1000)是反馈稳定的，因此转换方向要注意.

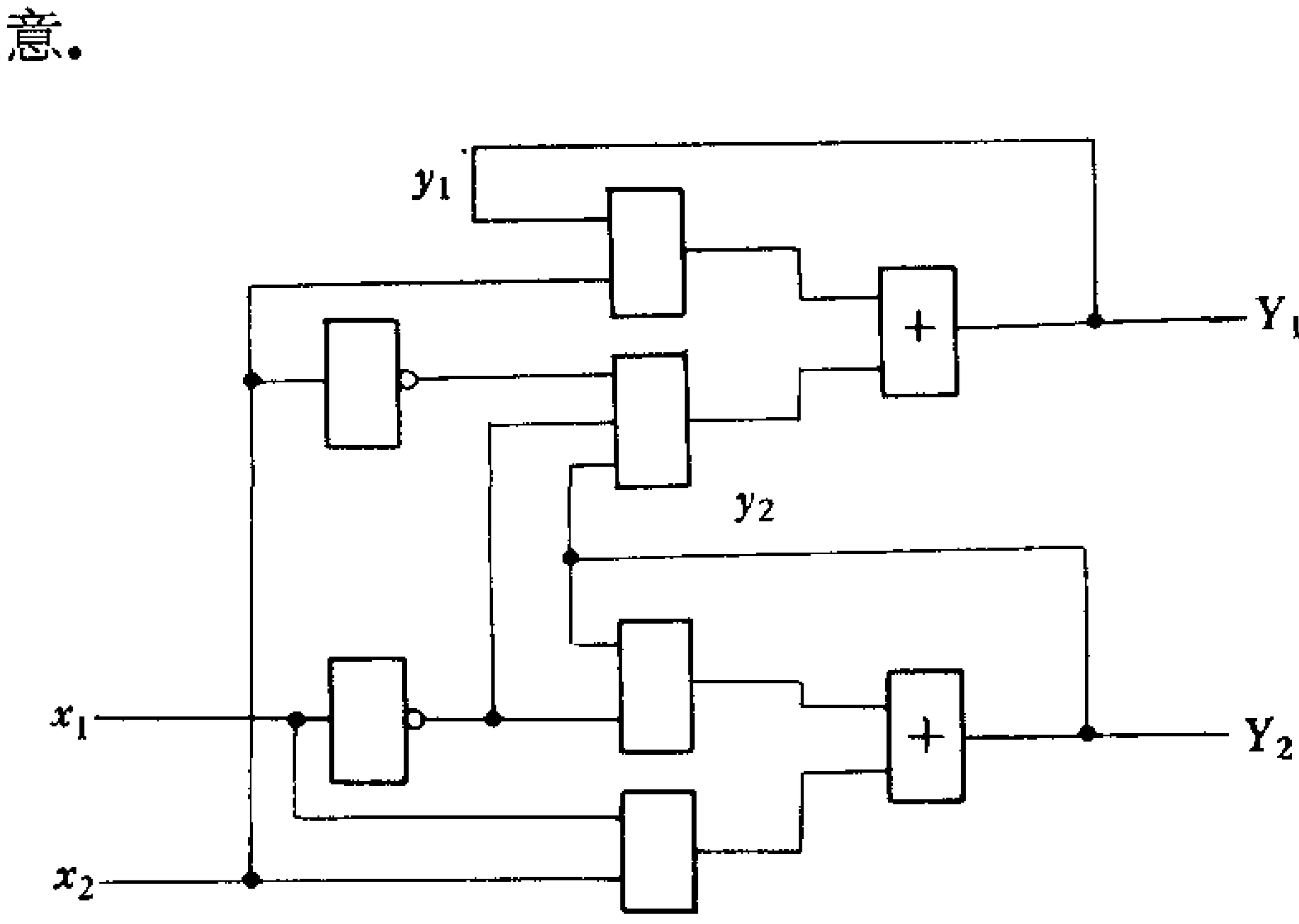

图 3

参 考 文 献

[1] A. D. 弗莱德曼著，刘春和译，数字系统逻辑设计，人民邮电出版社，1982.

[2] Thayse A., Boolean Differential Caluclus, Philips Res. Rep., Vol. 26, pp. 229—246, 1971.

[3] A. Thayse and M. Davio, Boolean Differentia Calculus and its Application to Switching Theory, *IEEE Tran. Comput., Vol.* C-**22**, No. 4, pp. 409—420, 1973.

[4] Thayse A., Transient Analysis of Logical Networks Applied to Hazard Detection, Philips Res. Rep., Vol. 25, No. 5, Oct., 1970.

[5] Lee S. C., Modern Switching Theory and Digital Design, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.

[6] Eichelberger E. B., Hazard Detection in Combinational and Sequential Switching Circuits, *IBM, Journal of Research and Development,* Vol. **9**, No. 2, pp. 90—99, 1965.

THE CRITERION OF FEED BACK STABILITY IN ASYNCHRONOUS SEQUENTIAL CIRCUITS

LIU CHUNHE

(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT

A new conception of "Phase Switching Algebra" is introduced in this paper. It has been proved that "phase switching algebra" has the identical structure with Boolean algebra, so the applications of Boolean algebra may be expanded to sequential circuits by means of this new conception. In addition, phase switching algebra is applied to derive the criterion of the feed back stability in asynchronous sequential circuits, so that all the unstable transitions can be found.