

任意传递函数最小实现的代数方法

戴国胜

(汉口长江航道研究所)

摘 要

本文用代数方法讨论了传递函数的最小实现问题。首先从传递函数可否约分的概念出发,提出了可控可观测新的代数判据;讨论了梯形网络的状态公式、结构可控可观测性及状态反馈和输出做最小实现的代数方法,并给出了例题。这种实现方法较状态空间法结构简单,有源和无源元件个数少,而且梯形网络的元件值可任意给定,加法器各增益值计算简单。

一、前 言

不用积分器,仅用加法器和 RC 梯形网络实现任一电压传递函数的问题, A. CICHOCKI^[1] (1976) 和高橋進一^[2,3] (1977) 从不同思路用相似的网络结构分别进行了研究。由于没有注意到梯形网络的状态易于求得,可直接进行反馈和输出以及元件值可任意给定的特点,所以他们的实现方法还不完善,本文对此作了深入讨论。

二、传递函数可控可观测的代数判据

不求解线性定常系统的传递函数

$$G(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad (a_n \neq 0, m \leq n). \quad (1)$$

的极零点,直接由系数判断可否约分的问题,虽有成熟的方法,如方程论中的结式定理^[4,10]和系统理论中的可控可观测定理。但前者需判断 $n+m$ 阶双带形行列式是否为零,后者需判断 n 阶行列式是否为零。当 n 较大时均较麻烦。本节的判据是 m 阶行列式,当 n 较大 m 较小时计算量大为减少。此处暂把分子分母颠倒一下,并按 s 的升幂排列,讨论 $\frac{1}{G(s)}$ 的可约性。

定理 1. 传递函数 $G(s)$ 不可约分(即可控又可观测)的充分必要条件是: $\frac{1}{G(s)}$ 的无穷幂级数展开式

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots \quad (2)$$

本文于 1982 年 2 月 1 日收到。本文的摘要曾编入中国电子学会电子线路与系统学会第四届年会论文摘要第 57 页,并于 1982 年 11 月在中国武汉电工理论学会第二届年会上宣读。

的前 $m+n$ 个系数组成的 m 阶行列式

$$\Delta_{m,n} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n+m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

证明见附录。(2) 式可由 $\frac{1}{G(s)}$ 的分子分母作多项式长除法得到。可作最小实现的传递函数必须是不可约分的。

三、可控可观测梯形网络的状态公式

梯形网络的状态分析是实现方法的基础,一般多用递推关系或箭夹行列式描述端口特性^[4,5,6],但不能描述内部状态,下面作进一步讨论。

图 1 是由 k 个倒 L 单元组成含有 n 个储能元件的梯形网络的一般结构。它的串臂和并臂可由 R, L, C 元件任意串并联组成,串臂全取复阻抗记为 z_{2i-1} , 并臂全取复导纳记为 y_{2i} 。图中 Y_{2i} 为策动点导纳, Z_{2i} 为策动点阻抗(不包括策动点上的并臂),可用连分式表示为

$$Z_{2i} = z_{2i+1} + \frac{1}{y_{2i+2}} + \frac{1}{z_{2i+3}} + \cdots + \frac{1}{y_{2k}}, \quad (4)$$

$$Y_{2i} = y_{2i} + \frac{1}{z_{2i+1}} + \frac{1}{y_{2i+2}} + \cdots + \frac{1}{z_{2k}}. \quad (5)$$

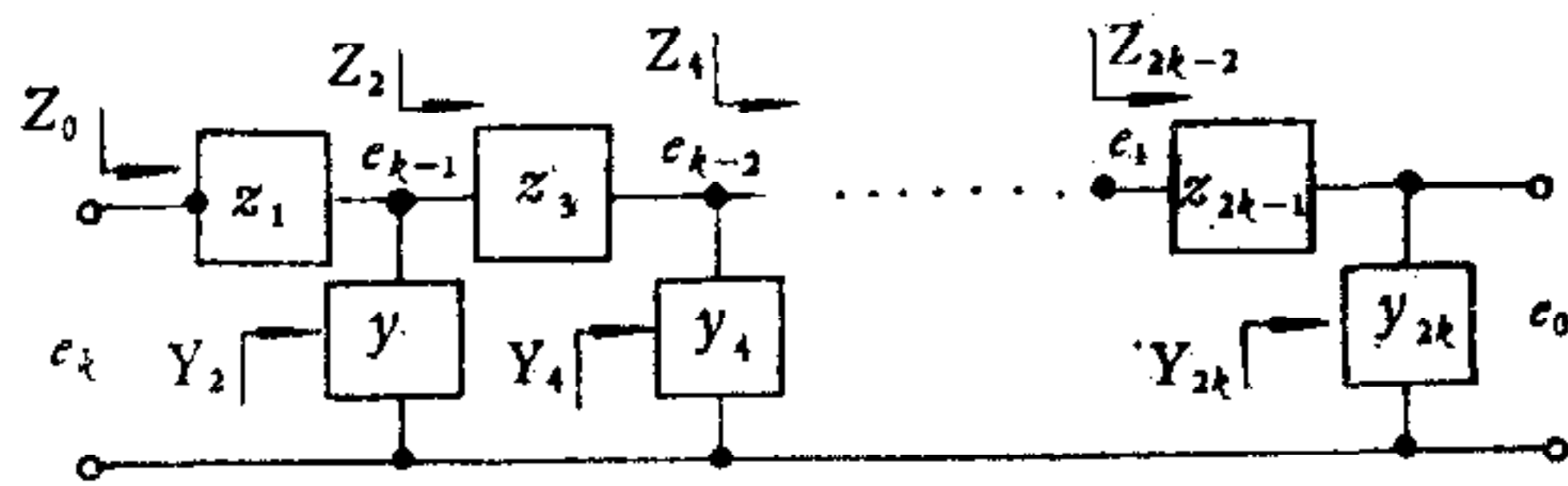


图 1 由 k 个倒 L 单元组成含有 n 个储能元件的梯形网络

若把梯形网络的各并臂电压 $e_0, e_1, \cdots, e_{k-1}$ 作为状态变量, e_k 作为输入状态,可以证明^[8]当梯形网络可控又可观测时有

$$e_j(s) = \prod_{i=1}^{k-j} [(z_{2i-1} \text{ 的分母})(y_{2i} \text{ 的分母})] = \prod_{i=1}^{k-j} [(\text{den} z_{2i-1})(\text{den} y_{2i})], \quad (6)$$

$$e_k(s) = Z_0 \text{ 的分子} = \text{num} Z_0. \quad (7)$$

式中 den 为分母 denominator 的缩写, num 为分子 numerator 的缩写,(6)式的最后一个导纳为策动点导纳,即 $y_{2(k-j)} = Y_{2(k-j)}$, 其余不变。 Z_0 为入端阻抗。对于始端输入以各并臂为输出的梯形网络,若

$$\text{num} Z_0 \text{ 的阶} = n, \quad (8)$$

且所有的 $e_j(s) (j = 0, 1, 2 \dots k)$ 之间都无公因子, 则该梯形网络可控又可观测。能作最小实现的梯形网络必须可控又可观测。

某些特殊梯形网络的状态公式还可进一步简化^[8], 对常见的串臂电阻全相等, 并臂电容也全相等的 RC 均匀梯形网络有

$$e_j(s) = 1 + \sum_{i=1}^j C_{j+i}^{2i} (RCS)^i, \quad (j = k, k-1, \dots, 1, 0). \quad (9)$$

RC 均匀梯形网络是可控又可观测的, 而且是连续阶的。

定义. 连续阶梯形网络, 所有状态的阶是从 n 阶到零阶递减的。显然这种网络中将有 n 个倒 L 单元。

四、最小实现的代数方法

不失一般性, 先讨论用一般结构的梯形网络作最小实现的方法, 然后用最简单的 RC 梯形网络作最小实现。

定理 2. 由 n 个倒 L 单元组成的 n 阶可控可观测梯形网络, 若所有状态系数行列式

$$\Delta_n \neq 0, \quad (10)$$

则该梯形网络通过状态反馈和状态输出, 总可实现成分母为 n 阶, 分子为 m 阶的任意不可约传递函数。实现网络如图 2 所示。

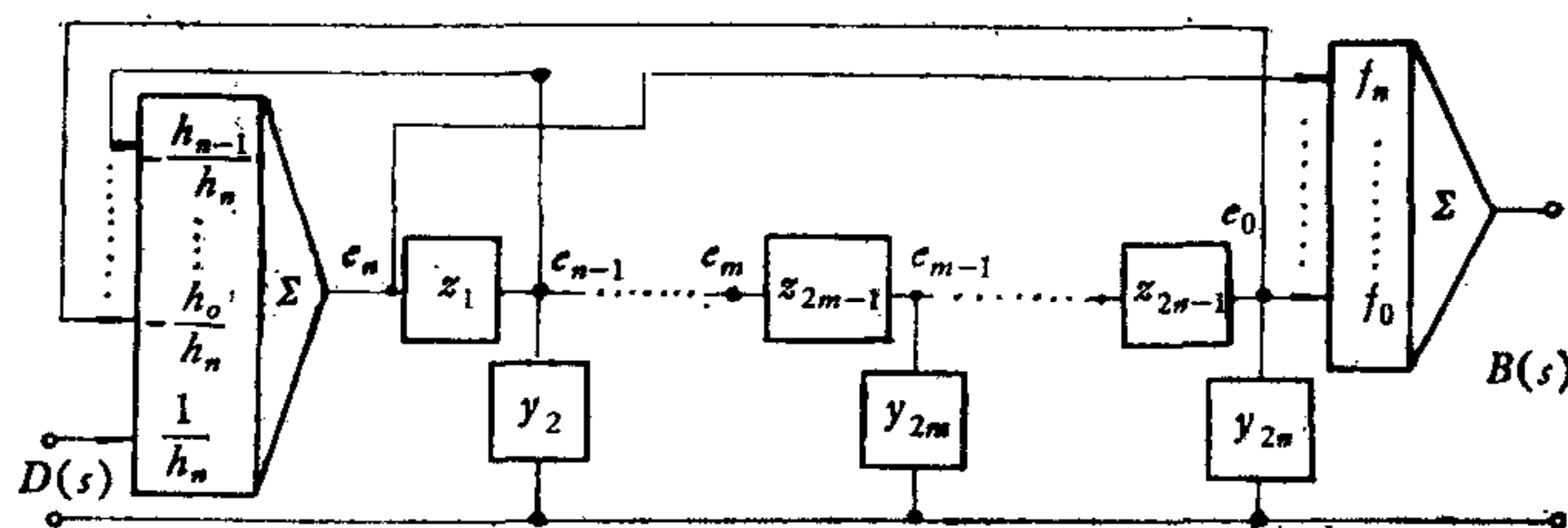


图 2 已实现的有源 n 阶梯形网络

证明。图 2 中对反馈加法器有

$$D(s) \frac{1}{h_n} - e_{n-1}(s) \frac{h_{n-1}}{h_n} - e_{n-2}(s) \frac{h_{n-2}}{h_n} - \dots - e_0(s) \frac{h_0}{h_n} = e_n(s), \quad (11)$$

即

$$h_n e_n(s) + h_{n-1} e_{n-1}(s) + \dots + h_0 e_0(s) = D(s). \quad (12)$$

对输出加法器有

$$f_n e_n(s) + f_{n-1} e_{n-1}(s) + \dots + f_0 e_0(s) = B(s). \quad (13)$$

比较式 (12) 和 (13) 左右两边 s 的同次幂项, 有

$$\Delta_n^T \mathbf{h} = \mathbf{a}, \quad (T \text{ 表示转置}) \quad (14)$$

$$\Delta_n^T \mathbf{f} = \mathbf{b}. \quad (15)$$

式中 Δ_n 为状态向量 $[e_n e_{n-1} \dots e_0]^T$ 的系数组成的行列式; $\mathbf{h} = [h_n h_{n-1} \dots h_0]^T$ 为反馈增

$$\Delta_{3,4} = \begin{vmatrix} 3 & -57 & 48 \\ 18 & 3 & -57 \\ -7 & 18 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

知 $G(s)$ 可约¹⁾, 约去公因子 $(2s + 1)$ 后

$$G(s) = \frac{3s^2 + s + 1}{2s^3 + 2s^2 + s + 4} = \frac{B(s)}{D(s)},$$

则可作最小实现. 设一般结构的梯形网络如图 3(a) 中的虚线框所示, 由公式 (6) 和 (7)

$$[e_3, e_2, e_1, e_0] = [11s^3 + 74s^2 + 141s + 58, 8s^2 + 32s + 16, 2s^2 + 8s + 6, 4s + 4],$$

由定理 2

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 11 & 74 & 141 & 58 \\ & 8 & 32 & 16 \\ & 2 & 8 & 6 \\ & & 4 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

知 $G(s)$ 可实现. 从方程 (14) 和 (15) 中解出

$$h = [h_3, h_2, h_1, h_0]^T = \left[\frac{2}{11}, -\frac{73}{88}, -\frac{53}{22}, \frac{233}{44} \right]^T,$$

$$f = [f_2, f_1, f_0]^T = \left[-\frac{3}{8}, 3, -\frac{11}{4} \right]^T.$$

实现网络如图 3(a) 所示. 若用 RC 梯形网络作实现则更简单. 由公式 (9) 有

$$[e_3, e_2, e_1, e_0] = [s^3 + 5s^2 + 6s + 1, s^2 + 3s + 1, s + 1, 1],$$

按 (16) 和 (17) 式作除法求得

$$h = [h_3, h_2, h_1, h_0]^T = [2, -8, 13, -3]^T,$$

$$f = [f_2, f_1, f_0]^T = [3, -8, 6]^T.$$

实现网络如图 3(b) 所示.

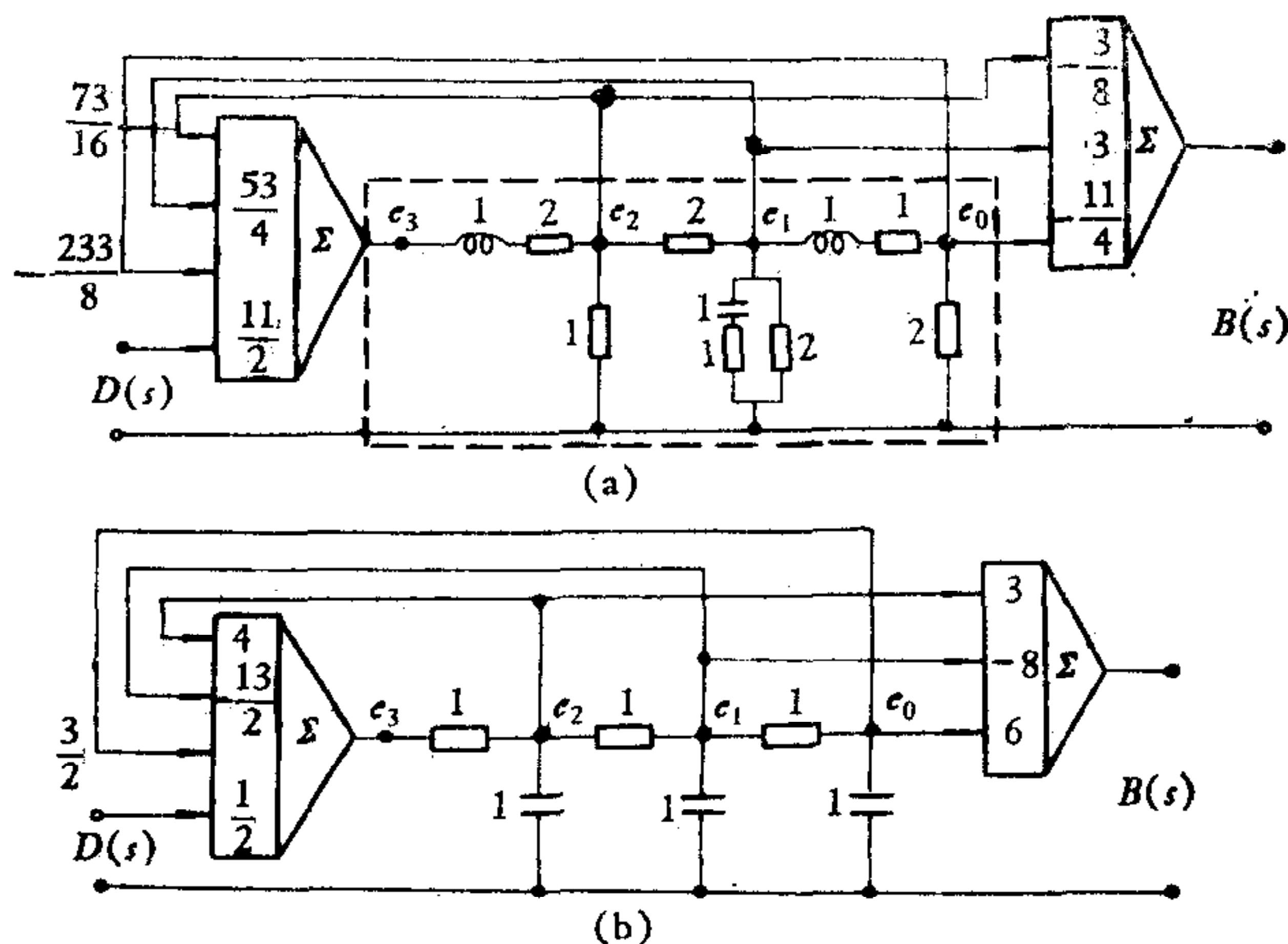


图 3 例题的实现网络

(a) 用一般结构梯形网络做的最小实现

(b) 用 RC 梯形网络做的最小实现.

对实现网络灵敏度的讨论请参阅文献[1]和[2].

1) 本判断过程仅作了 50 余次四则运算, 用结式约需作 400 余次, 用系统理论的可控可观测定理需作 150 余次. 可见定理 1 是简单判据.

本文承蒙北方交通大学王文焯副教授的热情指导, 谨表谢意.

附 录

定理 1 的证明.

设 (2) 式成立则有

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = \sum_{i=0}^m b_i s^i \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i, \quad (18)$$

比较等号两边 s 的同次幂项, 有

$$\sum_{k=0}^i c_k b_{i-k} = a_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^m c_{i-k} b_k = 0, \quad (i = n+1, n+2, \dots). \quad (20)$$

将 (19) 式代入结式^[4, 10]中, 并作如下行的变换: 将第 1 行乘以 $-c_0$, 第 2 行乘以 $-c_1, \dots$, 第 n 行乘以 $-c_{n-1}$, 然后把它们全部加到第 $n+1$ 行上. 再将第 2 行乘以 $-c_0$, 第 3 行乘以 $-c_1, \dots$ 第 n 行乘以 $-c_{n-2}$, 然后把它们全部加到第 $n+2$ 行上. 如此类推, 最后将第 n 行乘以 $-c_0$ 后加到第 $n+m$ 行上, 则有

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} n \text{ 行} \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{c} m \text{ 行} \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \end{array} \right\} \end{array} \left| \begin{array}{c} b_0 b_1 \dots b_m \\ \vdots \\ b_0 b_1 \dots b_m \\ \vdots \\ b_0 b_1 \dots b_m \end{array} \right| \\ = b_0^n \left| \begin{array}{c} \sum_{k=0}^0 c_{n-k} b_k \\ \sum_{k=0}^0 c_{n-1-k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^0 c_{n-m+1-k} b_k \\ \sum_{k=0}^m c_{n+1-k} b_k \dots \dots \sum_{k=m}^m c_{n+m-1-k} b_k \\ \sum_{k=0}^1 c_{n-k} b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=m}^m c_{n+1-k} b_k \\ \sum_{k=0}^1 c_{n-m+2-k} b_k \dots \dots \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k} b_k \end{array} \right| \quad m \text{ 行}. \quad (21)$$

将 (20) 式代入 (21) 式对角线以上元素中, 并作如下的变换: 将第 1 列除以 b_0 得新的第 1 列. 将新的第 1 列乘以 $-b_1$ 加到第 2 列后, 再除以 b_0 得新的第 2 列. 如此类推, 最后将新的第 1 列乘以 $-b_{m-1}$, 新的第 2 列乘以 $-b_{m-2}, \dots$ 新的第 $m-1$ 列乘以 $-b_1$ 加到第 m 列后再除以 b_0 , 得新的第 m 列, 则有

$$\left. \begin{array}{c} n \text{ 行} \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \\ \vdots \\ a_0 a_1 \dots a_n \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c} b_0 b_1 \dots b_m \\ \vdots \\ b_0 b_1 \dots b_m \\ \vdots \\ b_0 b_1 \dots b_m \end{array} \right| = b_0^{n+m} \left| \begin{array}{cccc} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \end{array} \right| \quad m \text{ 行} = b_0^{n+m} \Delta_{m,n}. \quad (22)$$

显然当 $b_0 \neq 0$ 时,若结式等于零必有 $\Delta_{m,n} = 0$, (1) 式可约. 证毕.

参 考 文 献

- [1] Cichocki, A., Synthesis of an Arbitrary Voltage Transfer Function, *Int J Electronics*, **41**(1976). No.1, 73—80
- [2] Shin-Ichi Takahashi, A State-Space Realization for Transfer Functions, *IEEE Trans Circuits & Syst*, **25** (1978), No. 2, 79—88.
- [3] 高橋進一,能動 RC 回路のシステム理論の構成, 電子通信学会論文誌. J60-A (1977), No. 7, 637—644.
- [4] 数学手册,人民教育出版社, 1979, P 96.
- [5] Dutta, S. C., Roy, Terminal Impedances and Transfer Function of Ladder Networks, *Proc IEE* **111** (1964), No. 10, 1653—1658.
- [6] Hwang, S. Y. On Signal Flow Graph Analysis of Ladder Networks, *IEEE Trans on Circuits Theory*, **CT-18** (1977), 563—566.
- [7] J. Billington, Ladder Networks with Elements in Geometric Progression, *IEEE Trans on Circuits & Syst*, **26** (1979), No. 1, 71—73.
- [8] 戴国胜,梯形网络电压传递函数的建立方法,武汉水运工程学院学报, (1980), No.3, 95—105.
- [9] 一松 信,近似式,竹内書店, (1963), P 95—97.
- [10] 科学技术百科全书,第一卷,数学,科学出版社, (1980), P51.

ALGEBRAIC MEANS FOR MINIMUM REALIZATION OF ARBITRARY TRANSFER FUNCTION

DAI GUOSHENG

(The Yangtze River Watercourse Research Institute, Wuhan)

ABSTRACT

In this paper, minimum realization of transfer function is discussed with algebraic means. Starting from the concept of whether or not the transfer function can be made common denomination, a new algebraic criterion of controllability and observability is introduced. State formulae of the ladder network and structure controllability and observability, algebraic means of any minimum realization by state feedback and output are also discussed. An example is given for illustration. Compared with state space method, this means of realization is simple in structure and uses minimum active and passive elements, and the values of the elements in the ladder network can be determined arbitrarily. Various values of gain for the ladder can be obtained by simple calculation.