第 10 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 4
1984 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1984

动态系统时变参数的辨识

韩 志 刚

（黑龙江大学，黑龙江省应用数学研究所）

摘　　要

本文给出了跟踪动态系统时变参数的一种简单而有效的算法，引出了多输出系统输出可分离性的概念，说明在辨识的过程中，在适当条件下，n 输出系统可分解成 n 个一定意义下与之等效的单输出系统，这种方法将给时变参数的辨识带来方便。本文的结果主要应用于预报模型的辨识。

一、问题的叙述

讨论如下所述系统的未知参数的辨识问题：

$$\boldsymbol{y}(k) = f[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}, k] + \boldsymbol{V}(k), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{y}(k)$ 是 n 维的输出；$\boldsymbol{V}(k)$ 是 n 维的噪声；$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ 是 n 维的向量值函数；$\boldsymbol{\theta}$ 是 m 维的参数向量。假定 $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ 关于参量 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度存在并连续，又

$$\mathrm{Y}_{k-1} = \{\boldsymbol{y}(0), \boldsymbol{y}(1), \cdots, \boldsymbol{y}(k-1)\},$$
$$\mathrm{U}_k = \{\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{u}(1), \cdots, \boldsymbol{u}(k)\}.$$

参量 $\boldsymbol{\theta}$ 为非时变的情形，文献[1]已得到了递推估计公式

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \delta_k A(k)^{-1} \nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\{\boldsymbol{y}(k) \\ - f[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1), k]\},\end{aligned} \tag{2}$$

其中$\{\delta_k\}$是适当的数列；$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的第K次估值。而且

$$\nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} f[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}, k]\big|_{\theta=\hat{\theta}(k-1)},$$

$$B_k = \nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]^T,$$

$$A(k) = B_k + \frac{1}{a_{r_k}} \phi_k(B_k), \quad r_k = \operatorname{rank} B_k,$$

$$\phi_k(\lambda) = \frac{\varphi_k(\lambda)}{\lambda^{m-r_k}}, \quad \varphi_k(\lambda) = \det(\lambda I - B_k),$$

$a_{r_k} = \phi_k(0)$. I 是单位矩阵.

算法(2)的收敛性可参看文献[1,2]. 文献[3]给出了公式(2)在单输出情形的特殊形式：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \frac{\delta_k}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\|^2} \nabla_{\hat{\theta}(k-1)} f[k, \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]\{y(k)$$

本文于 1982 年 11 月 5 日收到.

$$-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1),k]\}. \tag{3}$$

文献[4]考虑了时变参数系统的自适应预报问题，得到了多层递阶预报方法．实践证明，这种方法有较大的优越性，但要求对系统的时变参数有较好的跟踪公式．作者在公式(2)和(3)的基础上，提出了如下的跟踪公式：

$$\hat{\boldsymbol\theta}(k)=\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)+\delta A(k)^{-1}\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]\{\boldsymbol y(k)-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1),k]\}. \tag{4}$$

在单输出情形有

$$\hat{\boldsymbol\theta}(k)=\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)+\frac{\delta}{\|\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]\|^2}\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]\{y(k)-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1),k]\}. \tag{5}$$

公式中的参数 δ 应该满足：对于任意的 $\varepsilon>0$，有正整数 N，使得当 $K\geqslant N$ 时，恒有：

$$\|\boldsymbol\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol\theta}(k))\|<\varepsilon,\quad a.\ s.$$

其中

$$\boldsymbol\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol\theta}(k))=\boldsymbol y(k)-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol\theta}(k),k]$$

称为关于估值 $\hat{\boldsymbol\theta}(k)$ 的后验残差．

在实际应用中公式(5)比公式(4)方便得多．所以若能把系统(1)分离成 n 个在总体上与之“相当”的单输出系统，其参数就可以用公式(5)进行跟踪估计了．这将会给辨识工作带来方便．

本文的目的就是要指出，对于预报模型的辨识而言，在适当的条件下解决这种分离的可能性及前述的 δ 的存在性，对系统所要求的条件几乎是一样的．

二、时变参数跟踪算法分析

不失一般性，仅考虑单输出系统

$$y(k)=f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol\theta(k),k]+v(k). \tag{6}$$

此处除 $y(k)$ 与 $v(k)$ 的维数是 1 以外，其它符号的含义皆与系统(1)相同．时变参数的跟踪公式为式(5)．这一公式的“有效性”，能从下述定理中看出．

定理 1. 对于系统(6)，无论其噪声 $v(k)$ 的统计特性如何，如果有常数 C 使得对一切 k 皆有

$$|y(k)|<C,\quad a.\ s.$$

对一切 k，$y(k)$ 和 $\boldsymbol u(k)$，一切 $\boldsymbol\beta\in R^m$ 皆有

$$|f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol\beta,k]|<C.\quad a.\ s.$$

设 $\{\hat{\boldsymbol\theta}(k)\}$ 由跟踪公式(5)所确定，并对 $\delta>0$ 一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\overline{\boldsymbol\theta(k)}]^T\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]\|^2}=\mu>0,\quad a.\ s. \tag{*}$$

其中 $\overline{\boldsymbol\theta(k)}$ 由下式决定：

$$f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k)]=f[k,\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)]+\nabla_{\hat\theta(k-1)}f[k,\overline{\boldsymbol\theta(k)}]^T\tilde{\boldsymbol\theta}(k).$$

此处 $\tilde{\boldsymbol\theta}(k)=\hat{\boldsymbol\theta}(k)-\hat{\boldsymbol\theta}(k-1)$，$f[k,\boldsymbol\theta]=f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol\theta,k]$．则对于任何的 $\varepsilon>0$，

必有 $\delta>0$ 和 $N>0$，使与之对应的 $\{\hat{\theta}(k)\}$ 所导出的后验残差，当 $k\geqslant N$ 时恒满足

$$|\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))|=|y(k)-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\theta}(k),k]|<\varepsilon. \quad a.s.$$

证明. 对 $f[k,\hat{\theta}(k)]$ 在 $\hat{\theta}(k-1)$ 处应用微分中值公式有

$$f[k,\hat{\theta}(k)]=f[k,\hat{\theta}(k-1)]+\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\tilde{\theta}(k).$$

但是

$$\tilde{\theta}(k)=\hat{\theta}(k)-\hat{\theta}(k-1)=\hat{\theta}(k-1)+\frac{\delta}{\|\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\times\{y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]\}-\hat{\theta}(k-1),$$

所以

$$f[k,\hat{\theta}(k)]=f[k,\hat{\theta}(k-1)]+\delta\frac{\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\{y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]\}.$$

于是

$$\begin{aligned}y(k)-f[k,\hat{\theta}(k)]&=y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]\\&\quad-\delta\frac{\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\{y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]\}\\&=\left(1-\delta\frac{\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\right)\{y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]\}.\end{aligned}$$

由条件(*)，对任何的 $\varepsilon>0$ 必有 $N>0$，使当 $k\geqslant N$ 时恒有

$$\mu-\frac{\varepsilon}{6C}\mu\leqslant\frac{\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\theta(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}\leqslant\mu+\frac{\varepsilon}{6C}\mu. \quad a.s$$

注意到

$$\frac{\mu\left(1-\frac{\varepsilon}{6C}\right)}{\mu\left(1+\frac{\varepsilon}{6C}\right)}=\frac{1+\frac{\varepsilon}{6C}-\frac{\varepsilon}{3C}}{1+\frac{\varepsilon}{6C}}=1-\frac{\frac{\varepsilon}{3C}}{1+\frac{\varepsilon}{6C}}>1-\frac{\varepsilon}{3C}>1-\frac{\varepsilon}{2C},$$

所以有

$$\frac{1}{\mu\left(1+\frac{\varepsilon}{6C}\right)}>\frac{1-\frac{\varepsilon}{2C}}{\mu\left(1-\frac{\varepsilon}{6C}\right)}.$$

由此可见，只要取 δ 满足

$$\frac{1}{\mu\left(1+\frac{\varepsilon}{6C}\right)}\geqslant\delta\geqslant\frac{1-\frac{\varepsilon}{2C}}{\mu\left(1-\frac{\varepsilon}{6C}\right)},$$

当 $k\geqslant N$ 时就恒有

$$1-\delta\frac{\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}>0 \qquad a.s$$

以及

$$\begin{aligned}|\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))| &= |y(k)-f[k,\hat{\theta}(k)]| \\ &\leqslant \left[1-\delta\left(\mu-\frac{\varepsilon}{6C}\mu\right)\right]|y(k)-f[k,\hat{\theta}(k-1)]| \\ &\leqslant \left[1-\delta\mu\left(1-\frac{\varepsilon}{6C}\right)\right][|y(k)|+|f[k,\hat{\theta}(k-1)]|] \\ &\leqslant \left[1-\left(1-\frac{\varepsilon}{2C}\right)\right](C+C)=\varepsilon. \qquad a.\ s.\end{aligned}$$

定理证毕.

从定理 1 可以看出，如果系统和观测都不受噪声的干扰，对于算法(5)由于有 $\delta>0$，使参数估值所对应的后验残差从某一时刻开始可一致的任意小，所以可以认为这些估值是时变参数在预报意义下的较好的跟踪值．对于随机系统，当“信噪比”较高时，这种算法的跟踪效果仍较好．

由定理的证明过程可以看出，这种逼近性质仅依赖于条件(＊)和某些有界性假定，而与其它条件无关．综上所述，可以看出算法(5)的“有效性”．

关于条件(＊)的注释． 这一条件并不是过苛的．例如对于形如

$$y(k)=\boldsymbol{\varphi}(k)^T\boldsymbol{\theta}(k)+v(k) \tag{7}$$

的系统，恒有

$$f[k,\hat{\theta}(k)]-f[k,\hat{\theta}(k-1)]=\boldsymbol{\varphi}(k)^T\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k).$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\overline{\theta(k)}]^T\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]}{\|\nabla_{\hat{\theta}(k-1)}f[k,\hat{\theta}(k-1)]\|^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(k)^T\varphi(k)}{\|\varphi(k)\|^2}=1.$$

即对于系统(7)条件(＊)自然满足．这个条件的几何意义相当于，要求相应的函数的梯度方向随着参数的变化而改变的“角度”不要近于“直角”．

由上述注释不难得出：

定理 2. 对于系统 (7)，只要在跟踪公式 (5) 中取 $\delta=1$，则由它所确定的估值序列 $\{\hat{\theta}(k)\}$所对应的后验残差必满足

$$\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))=y(k)-\boldsymbol{\varphi}(k)^T\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=0,\quad \forall k\geqslant 1.$$

三、多输出系统的分解

就应用于预报的系统参数辨识的目的而言，在一定的条件下可以把多输出系统分解成为在某种意义下与之等效的一些“广义”单输出系统．为此，先引入一些概念．

定义 1. 多输出系统 S 的模型

$$\boldsymbol{y}(k)=f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\theta(k),k]+\boldsymbol{v}(k)$$

具有可分离参数的形式，或简称参数可分离的．如果 $f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\theta(k),k]$ 具有形式

$$f[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}(k), k] = \begin{pmatrix} f_1[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}_1(k), k] \\ f_2[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}_2(k), k] \\ \vdots \\ f_n[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}_n(k), k] \end{pmatrix},$$

而且每个 $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ 的维数皆不超过 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的维数. 其中 n 是输出 $\boldsymbol{y}(k)$ 的维数.

定义 2. 这里称形如

$$y_i(k) = f_i[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}_i(k), k] + v_i(k)$$

的系统为"广义"单输出系统. $y_i(k)$ 和 $v_i(k)$ 分别表示 $\boldsymbol{y}(k)$ 和 $\boldsymbol{v}(k)$ 的第 i 个分量.

例如,对于线性系统状态空间表示为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{v}(k). \tag{8}$$

$\boldsymbol{x}(k)$ 是 n 维状态向量; $\boldsymbol{u}(k)$ 是 m 维控制向量; $\boldsymbol{v}(k)$ 是 n 维随机噪声,而

$$A(k) = \begin{pmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k)\cdots a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k)\cdots a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k)\cdots a_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k)\cdots b_{1m}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k)\cdots b_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k)\cdots b_{nm}(k) \end{pmatrix}.$$

只要置

$$\boldsymbol{\theta}_i(k)^T = (a_{i1}(k), a_{i2}(k), \cdots a_{in}(k), b_{i1}(k), \cdots, b_{im}(k)),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k)^T = [\boldsymbol{x}(k)^T \vdots \boldsymbol{u}(k)^T], \ y_i(k) = x_i(k+1),$$

则 (8) 式就可以写成

$$y_i(k) = \boldsymbol{\varphi}(k)^T\boldsymbol{\theta}_i(k) + v_i(k), \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

可见模型 (8) 具有可分离参数的形式.

定义 3. 设 S_1 和 S_2 是两个动态系统, 如果在过去的输入完全相同的条件下, 现在的同一个输入在两个系统中对应着相同的输出,则说这两个系统是输入、输出等价的, 或说成是等效的.

还要用到系统并联的概念. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 n 个(广义)单输出系统, 如果一个 n 输出系统 S 的输出、输入和噪声分别由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的输出、输入和噪声所形成的向量而构成,则说系统 S 是由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 并联而成的,记作

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

定义 4. 如果一个 n 输出系统能够与 n 个 (广义) 单输出系统的并联系统等效, 就说这个系统是输出可分离的.

显然,每个参数可分离系统必然是输出可分离的. 所以为了寻求输出可分离的条件, 只要得到参数可分离的条件即可.

我们说系统 S 的模型 $\boldsymbol{y}(k) = f[\mathrm{Y}_{k-1}, \mathrm{U}_k, \boldsymbol{\theta}(k), k] + \boldsymbol{v}(k)$ 相对于参量的估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$,

具有一致小于 ε 的后验残差，如果有 $N>0$，使 $k\geqslant N$ 时恒有

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k))\|=\|\boldsymbol{y}(k)-f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k),k]\|<\varepsilon. \quad a.\ s.$$

关于参数可分离性的定理：

定理 3. 设多输出系统的模型为.

$$\boldsymbol{y}(k)=f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]+\boldsymbol{v}(k), \tag{9}$$

并且相对于参量的估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 具有一致小于 ε 的后验残差，其中

$$\boldsymbol{y}(k)=(y_1(k),y_2(k),\cdots,y_n(k))^T,$$
$$\boldsymbol{v}(k)=(v_1(k),v_2(k),\cdots,v_n(k))^T,$$
$$f[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]=\begin{pmatrix}f_1[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]\\ f_2[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]\\ \vdots\\ f_n[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}(k),k]\end{pmatrix}.$$

如果有常数 $C>0$，对一切K皆有

$$|y_i(k)|<C,\ a.\ s.,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对一切 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{y}(k)$，$\boldsymbol{u}(k)$ 和一切 $\boldsymbol{\beta}\in R^m$($m$ 是 $\boldsymbol{\theta}(k)$ 的维数)皆有

$$|f_i[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\beta},k]|<C,\ a.\ s.\quad i=1,2,\cdots,n.$$

考虑如下的 n 个系统：

$$y_i(k)=f_i[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}_i(k),k]+v_i(k),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

设 $\boldsymbol{\theta}_i(k)$ 的估值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k)$ 是由跟踪公式(5)所确定的，并对 $\delta>0$ 一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nabla_{\theta_i(k-1)}f_i[k,\overline{\boldsymbol{\theta}_i(k)}]^T\nabla_{\theta_i(k-1)}f_i[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1)]}{\|\nabla_{\theta_i(k-1)}f[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1)]\|^2}=\mu_i>0,$$

其中 $\overline{\boldsymbol{\theta}_i(k)}$ 满足

$$f_i[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k)]=f_i[k,\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1)]+\nabla_{\theta_i(k-1)}f[k,\overline{\boldsymbol{\theta}_i(k)}]^T\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(k),$$
$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1),$$

则必有 $\delta_i>0$，$N>0$，使得与之相应的估值序列 $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k)\}$ 当 $k\geqslant N$时，恒满足

$$|y_i(k)-f_i[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k),k]|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.\quad a.\ s.$$

证明. 由于对每个系统 $y_i(k)=f_i[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}_i(k),k]+v_i(k)$ 定理 1 的条件皆满足，所以只需对这些系统应用定理 1，即可得出当 $k\geqslant N$时有

$$|y_i(k)-f_i[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k),k]|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.\quad a.\ s.$$

显然系统

$$\begin{pmatrix}y_1(k)\\ y_2(k)\\ \vdots\\ y_n(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}_1(k),k]\\ f_2[\mathbf{Y}_{k-1},\mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}_2(k),k]\\ \vdots\\ f_n[\mathbf{Y}_{k-1}\ \ \mathbf{U}_k,\boldsymbol{\theta}_n(k),k]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1(k)\\ v_2(k)\\ \vdots\\ v_n(k)\end{pmatrix}$$

是参数可分离的．因而输出是可分离的．可得出如下推论：

推论 对于系统(9)只要满足相应的条件，在后验残差一致小前提下，总可找到一个与之等效的输出可分离的系统．

四、关于参数辨识问题

参数跟踪算法仅是参数辨识的一个组成部分．它只解决了依据已有的资料，对系统的“过去”和“现在”的参数值进行估计的问题．参数辨识的结果应该得到参数的“全部”的值．参数辨识应由两部分组成，1)，依据观测数据对参数的值进行跟踪估计；2)，对参数的将来值进行预测，至少要建立一个一般的预测算法．以下分两种情形进行讨论．

1. 非时变参数

非时变参数的现在估值也就是它的预测估值，应该与时变参数区别开来．下面给出参数非时变性的检验方法．

设 $\hat{\theta}(1)$，$\hat{\theta}(2)$，$\cdots$，$\hat{\theta}(N)$ 是依据N组观测数据所得出的关于参量的估值，并满足后验残差一致小准则，即有 $M>0$，当 $k\geqslant M$时有

$$|\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))| = |y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1}, \mathbf{U}_k, \hat{\theta}(k), k]| < \varepsilon. \quad a.\ s.$$

置．

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N-M}\sum_{k=M+1}^{N}\hat{\theta}(k).$$

如果当 $k\geqslant M$时也有

$$|\varepsilon(k,\hat{\theta})| = |y(k) - f[\mathbf{Y}_{k-1}, \mathbf{U}_k, \hat{\theta}, k]| < \varepsilon, \quad a.\ s.$$

即可认为参数 $\theta(k)$ 是非时变的，$\hat{\theta}$ 是 $\theta(k)$ 的一个估值．

也可考虑采用统计假设检验的方法．如果 $\{\varepsilon(k,\hat{\theta})\}$ 和 $\{\varepsilon(k,\hat{\theta}(k))\}$ 认为来自同一母体，就可以认为参数是非时变的．否则就是时变的．

2. 时变参数的预报

参数为时变时，必须依据估值序列 $\hat{\theta}(1)$，$\hat{\theta}(2)$，$\cdots$，$\hat{\theta}(N)$ 建立关于时变参数 $\theta(k)$ 的预报估计算法．这可采用“多层递阶方法”[4]．应用实例参见文献[4—6]．

参 考 文 献

[1] Z. G. Han, A Recursive Estimates Method of the Nonlinear Stochastic System and Its Convergence Analysis, 6th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Washington. D. C. 1982.

[2] 韩志刚，关于递推算法收敛性分析的常微分方程方法，黑龙江大学自然科学学报，第一期(1982)，1—13.

[3] 姜继忱，关于一类递推算法的进一步探讨，黑龙江大学自然科学学报，第一期 (1982)，18—29。

[4] 韩志刚，动态系统预报的一种新方法，自动化学报，第三期 (1983). 161—168.

[5] 韩志刚、郭一新等，轻工产品产量、产值和销售量的多层递阶预报，信息与控制，第一期 (1983)，14—18.

[6] 韩志刚等，关于工农业总产值预报的两种方法，信息与控制，第六期 (1983).

ON THE IDENTIFICATION OF TIME-VARYING PARAMETERS IN DYNAMIC SYSTEMS

HAN ZHIGANG

(Heilongjiang University, Heilongjiang Institute of Appliedy Mathematics)

ABSTRACT

In this paper, a simple and effective estimation method for tracking time-varying parameters in dynamic systems is presented. And the concept of output separability of multiple-output system is introduced. It has been proved that under some conditions the n-output system can be equivalently decomposed into n number generalized single-output systems, thus it is convenient for the identification of time-varying parameters. The method obtained here is quite suitable for dealing with prediction problems.