第10卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 4
1984 年10月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1984

从逆问题指定闭环极点设计最优调节器

杨泰澄　李恬鉴　徐衍华
(同 济 大 学)

摘　　要

本文提出了矩阵主导和的概念;给出了从逆问题指定闭环极点设计最优调节器的方法,试图从工程角度解决单输入线性定常系统最优调节器的极点配置问题.

一、引　　言

考虑单输入线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

求最优反馈 $u = -kx$, 使性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^2) dt \tag{2}$$

取极小. 其中 $[A, b]$ 可控, $Q = H^T H$ 对称非负, $[A, H]$ 可观. 这个问题的提出和解决是用现代控制理论从数学上进行了定量分析. 从经典理论来看,不管 Q 的具体数值如何,最优调节器的闭环部分总具有大于 60° 的相位裕量、从 1/2 到 ∞ 的增益裕量、一定的延时、非线性容限等优良的工程性质[1]. 但是, 在解决工程问题时, 一个最大的困难就是如何保证闭环系统有满意的极点配置, 从而保证系统对给定输入有良好的阶跃响应和合理的闭环带宽. 这方面,已有不少理论成果[1-4],但还缺少一种较好的工程设计方法[5].

本文提出从逆问题指定闭环极点设计最优调节器的方法(简称为逆问题方法)试图解决这一问题.

二、矩阵主导和

作变换 $x = T\tilde{x}$, 将 (1) 式变换成能控标准形[6]

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u. \tag{3}$$

$\tilde{Q} = T^T Q T$ 为能控标准形下的加权矩阵,相应的 J 为

$$J = \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + u^2) dt. \tag{4}$$

从(1),(2)式解出的 k 与(3),(4)式解出的 $\tilde{k}$ 的关系为

$$k = \tilde{k} T^{-1}. \tag{5}$$

本文于 1981 年 11 月 19 日收到,曾在 1981 年 10 月中国自动化学会应用委员会年会上宣读.

记

$$\phi(s) = \det[sI - A] = \alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots\cdots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_n s^n,$$
$$(\alpha_n = 1),$$
$$\phi_k(s) = \det[sI - A + bk] = a_0 + a_1 s + \cdots\cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n,$$
$$(a_n = 1).$$

定义由 a_i 的乘积构成的 $n+1$ 阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_0a_0 & -a_0a_1\cdots\cdots(-1)^n a_0a_n \\ a_1a_0 & -a_1a_1\cdots\cdots(-1)^n a_1a_n \\ a_2a_0 & -a_2a_1 \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_na_0 & -a_na_1\cdots\cdots(-1)^n a_na_n \end{bmatrix}$$

为 C 矩阵，其第 i 行第 j 列的元素为 $(-1)^{j+1}a_{i-1}a_{j-1}$. 类似地，将上述 C 阵中的 a 换成 α，所形成的矩阵定义为 O 矩阵. 将 $\tilde{Q}$ 矩阵 $(\tilde{Q} = \tilde{q}_{ij})$ 中的偶数列加上负号，所形成的 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & -\tilde{q}_{21}\cdots\cdots(-1)^{n+1}\tilde{q}_{n1} \\ \tilde{q}_{21} & -\tilde{q}_{22}\cdots\cdots(-1)^{n+1}\tilde{q}_{n2} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \tilde{q}_{n1} & -\tilde{q}_{n2}\cdots\cdots(-1)^{n+1}\tilde{q}_{nn} \end{bmatrix}$$

定义为 W 矩阵.

在 C, O, W 矩阵中作一些斜线，使其与副对角线平行，并过主对角线上的元素. 依次称这些斜线为对应矩阵的第 i 阶主导线 ($i = 0, 1, \cdots\cdots n$, W 矩阵无 n 阶主导线)，被主导线划到的元素称为主导元素，第 i 阶主导线上各元素之和称为对应矩阵的第 i 阶主导和，记作 $\Sigma_i(C)$, $\Sigma_i(O)$, $\Sigma_i(W)$ (定义 $\Sigma_n(W) = 0$).

定理 1. 对于单输入的典型最优调节器问题，由闭环特征多项式决定的 C 矩阵的各阶主导和，等于由开环特征多项式决定的 O 矩阵的各阶主导和加上由能控标准形下加权矩阵 $\tilde{Q}$ 所决定的 W 矩阵的各阶主导和.

$$\Sigma_i(C) = \Sigma_i(O) + \Sigma_i(W), \quad (i = 0, 1, \cdots\cdots n). \tag{6}$$

证. 由于[2]

$$\phi_k(s)\phi_k(-s) = \phi(s)\phi(-s) + [\mathrm{adj}(-sI - \tilde{A})\tilde{b}]^T\tilde{Q}[\mathrm{adj}(sI - \tilde{A})\tilde{b}], \tag{7}$$

以三阶系统为例，(7)式左边为：

$$\phi_k(s)\phi_k(-s) = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3)(a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3)$$
$$= [1 \ \ s \ \ s^2 \ \ s^3]\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}[a_0 - a_1 \quad a_2 - 1]\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix}$$

$$
= [1 \; s \; s^2 \; s^3] \begin{bmatrix} a_0a_0 & -a_0a_1 & a_0a_2 & -a_0a_3 \\ a_1a_0 & -a_1a_1 & a_1a_2 & -a_1a_3 \\ a_2a_0 & -a_2a_1 & a_2a_2 & -a_2a_3 \\ a_3a_0 & -a_3a_1 & a_3a_2 & -a_3a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \Sigma_0(C)s^0 + \Sigma_1(C)s^2 + \Sigma_2(C)s^4 + \Sigma_3(C)s^6, \tag{8}
$$

类似地可导出

$$
\phi(s)\phi(-s) = \Sigma_0(O)s^0 + \Sigma_1(O)s^2 + \Sigma_2(O)s^4 + \Sigma_3(O)s^6. \tag{9}
$$

记(7)式右边第二项为 $\phi(s^2)$，由于 $\mathrm{adj}\,(sI - \tilde{A})\tilde{b} = [1 \; s \; s^2]^T$，故

$$
\phi(s^2) = [\mathrm{adj}\,(-sI - \tilde{A})\tilde{b}]^T \tilde{Q}\,[\mathrm{adj}\,(sI - \tilde{A})\tilde{b}]
$$

$$
= [1 \; -s \; s^2] \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{13} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} & \tilde{q}_{23} \\ \tilde{q}_{31} & \tilde{q}_{32} & \tilde{q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}
$$

$$
= [1 \; s \; s^2] \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & -\tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{13} \\ \tilde{q}_{21} & -\tilde{q}_{22} & \tilde{q}_{23} \\ \tilde{q}_{31} & -\tilde{q}_{32} & \tilde{q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}
$$

$$
= \Sigma_0(W)s^0 + \Sigma_1(W)s^2 + \Sigma_2(W)s^4. \tag{10}
$$

将(8)，(9)，(10)式代入(7)式，比较 s^{2i} 项前的系数就可得(6)式．上述推导可推广到任意阶系统，证毕．

推论． 若有一组 Q 矩阵 $Q_i = H_i^T H_i$，$[A, H_i]$ 可观，且由 A，b，Q_i 所决定的各个 W 矩阵的各阶主导和相等，则它们是互相等价的．等价的 Q 矩阵将导致相同的极点配置和最优反馈 $u = -kx$．

三、逆问题方法

这里先引用一个“最优调节器逆问题”的定理[2]：

给出 $\dot{x} = Ax + bu$ 及控制规律 $u = -kx$，只要 $[A, b]$ 可控，$\phi_k(s)$ 渐近稳定，且：

$$
\|\phi_k(j\omega)\| \geqslant \|\phi(j\omega)\|, \quad 0 \leqslant \omega < \infty, \tag{11}
$$

则必能找到 Q，$Q = H^T H$，$[A, H]$ 可观，使 $\phi_k(s)$ 为

$$
J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^2)\, dt
$$

取极小的最优调节器的闭环特征多项式．

$[A, b]$ 可控是事先假定的，如果能找到 $\phi_k(s)$，$\phi_k(s)$ 的零点就是所希望的闭环极点，且符合 (11) 式，则不难从已知的 A，b，$\phi_k(s)$ 求出 T，T^{-1}，并从 $\phi_k(s)$，$\phi(s)$ 算出 $\tilde{k}_i = a_i - \alpha_i$，最后得到 $k = \tilde{k}T^{-1}$．令 $u = -kx$，不管 Q 的数值如何，根据 $\phi_k(s)$ 求出 k，则所

设计的系统达到了理想极点配置及最优调节器有关优良品质的指标，这就是逆问题方法的基本思想.

如要求Q的数值，可根据定理1，从$\phi_k(s)$，$\phi(s)$求出W矩阵各阶主导和，并相应地构造一个对称非负的$\tilde{Q}$,算出性能指标J中的$Q=(T^T)^{-1}\tilde{Q}T^{-1}$. 从推论看出这样的$Q$可以找出很多.

综上所述,逆问题设计方法的关键是找到有希望零点且符合(11)式的$\phi_k(s)$，作为第一步判断

$$\|\phi_k(j\omega)\|>\|\phi(j\omega)\|,\quad 0\leqslant\omega<\infty \tag{11'}$$

是否成立. 若(11')式成立,(11)式一定成立. 对此,有

定理 2. $\|\phi_k(j\omega)\|>\|\phi(j\omega)\|$, $(0\leqslant\omega<\infty)$的充要条件为

$$\phi(s^2)=\phi_k(s)\phi_k(-s)-\phi(s)\phi(-s)=\sum_{i=0}^{n-1}(\Sigma_i(C)-\Sigma_i(O))s^{2i}=\sum_{i=0}^{n-1}\Sigma_i(W)s^{2i}$$

的常数项$\Sigma_0(W)$大于零，且由$\phi(s^2)$所作的 Routh 阵列的第一列符号改变数为$n-1$.

证. 式(11')等价于

$$\Phi(\omega^2)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\omega^{2i}=\|\phi_k(j\omega)\|^2-\|\phi(j\omega)\|^2>0,\quad 0\leqslant\omega<\infty. \tag{12}$$

D. Šiljak[7] 已经证明

$$\Pi(\omega)=\sum_{i=0}^{k}a_{2i}\omega^{2i}>0,\quad(0\leqslant\omega<\infty)$$

的充要条件为$a_{20}>0$，且以ω为变量的

$$\Pi'(\omega)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_{2i}\omega^{2i}$$

的 Routh 阵列的第一列的变号数为k. 由于

$$\Phi(\omega^2)=\phi(s^2)|_{s=j\omega}=\sum_{i=0}^{n-1}[(-1)^i\Sigma_i(W)\omega^{2i}],$$

故$c_i=(-1)^i\Sigma_i(W)$. 作

$$\Phi'(\omega^2)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i c_i\omega^{2i}$$

的 Routh 阵列所用的系数,即作$\phi(s^2)$的 Routh 阵列所用的系数$\Sigma_i(W)$，证毕.

一般地说，$\phi(s)$给定后对于一个$\phi_k(s)$，(11')式不一定能满足，但是可预先指定$n-1$个希望的闭环极点作为$\phi_{n-1}(s)$的零点，再令λ以一定的初值、步长变化，计算$\phi_\lambda(s)=\phi_{n-1}(s)(s+\lambda)$，并根据定理2判断(11')是否成立，最后总能找到一个λ^*,使$\|\phi_{n-1}(j\omega)\|\cdot\|j\omega+\lambda^*\|>\|\phi(j\omega)\|$. 可取$\lambda_k\geqslant\lambda^*$，使$-\lambda_k$为系统的第$n$个不能事先指定的非主导极点，确定$\phi_k(s)$后,可算出$k$. 逆问题设计方法的程序框图如图1所示:

例. 为图2所示被调对象设计最优调节器,使其中三个闭环极点为$-1\pm j$，-5.

解. 将对应于本例的A，b和有关数据送入计算机,算出$\lambda^*=7$,令$\lambda_k=\lambda^*=7$,计算机又算出

$$\phi_k(s)=s^4+14s^3+61s^2+94s+70,\quad K=[4.375,2.875,1.625,0.75].$$

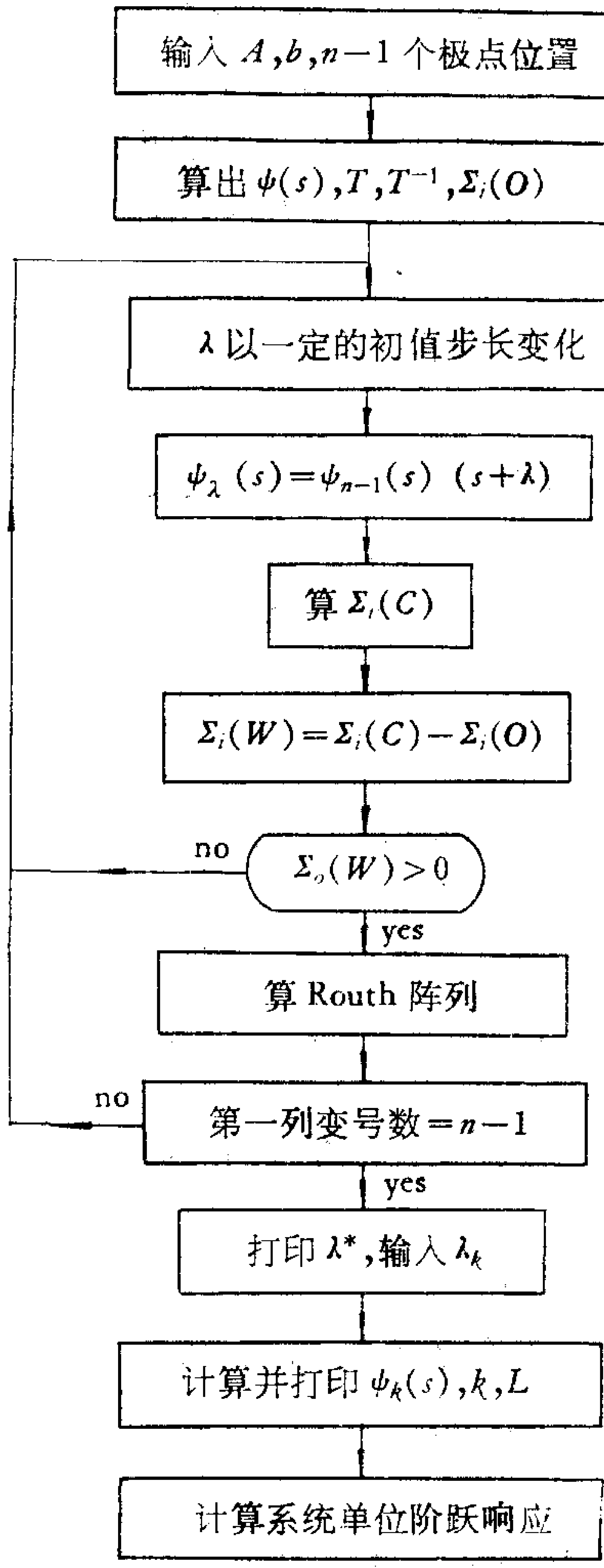

图 1

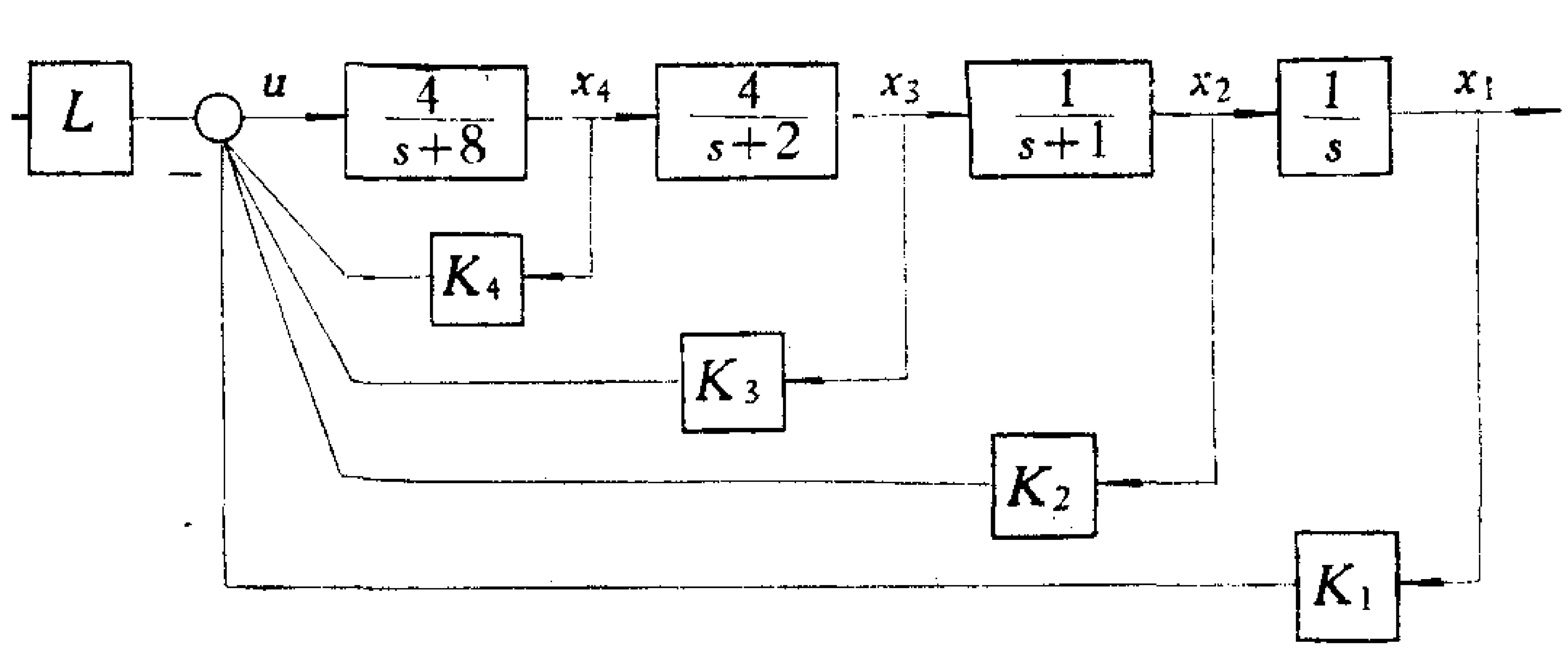

图 2

前置放大器增益 $L=4.375$ 是为消除静差而设置的。闭环系统的阶跃响应指标上升时间为 2.7，超调为 4%，调整时间为 4.4。

逆问题方法有以下特点：

（1）逆问题方法是将现代控制理论和经典理论、时域方法和频域方法相结合，为工程

技术人员提供了一种简单、使用方便、易于掌握的计算机辅助设计方法.

(2) 逆问题方法不需求解特殊形式的最优调节器[1-3]或者用反复试凑的方法[4]求得希望的极点配置，而是“构造”一个最优调节器，或看作是通过状态反馈，实现有指定极点且满足 $\|\phi_k(j\omega)\| > \|\phi(j\omega)\|$ 的一种极点配置方法，不需要求取 Q 的数值.

(3) 所设计的系统有精确的希望极点配置，无需大的 k 值 ($\lambda_k = \lambda^*$ 提供了在保证 $n-1$ 个指定极点位置条件下“最小”的 k 值)，易于工程实现，且具有最优调节器的所有优良品质.

(4) 只适用于单变量系统. 对于多变量系统，除了稳定性、精度等方面的要求外，还要求无交互作用(non-interaction)、性能可靠. 这些要求通过设计有希望极点的最优调节器是无法满足的. 相反，由 H. H. Rosenorock, A. G. J. MacFarlane 等人提出的现代频域方法较好地解决了多变量系统的设计问题[5].

四、关于极点配置的一个定理

定理 3. 若开环系统由惯性环节和积分环节串联而成，即

$$\phi(s) = \prod_{i=1}^{n} (s + \lambda_i),$$

λ_i 为实数，且不全为零，则不能通过设计最优调节器将全部闭环极点配置成巴氏 (Butterworth) 构形.

证. 最优调节器必须符合 (11) 式，并等价于 $\Phi(\omega^2) \geqslant 0$. 当 $\omega \to \infty$ 时，为使 $\Phi(\omega^2) \geqslant 0$, $\Phi(\omega^2)$ 中最高次项前的系数不能为负，即 c_{n-1} 不能为负. 对巴氏构形有[8]

$$\phi_k(s)\phi_k(-s) = (-1)^n s^{2n} + r^{2n} \quad (r\ 是巴氏圆的半径). \tag{13}$$

而

$$\phi(s)\phi(-s) = (-1)^n s^{2n} + (-1)^{n-1}[\alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2}]s^{2n-2} + \cdots\cdots. \tag{14}$$

将(13)式减去(14)式，并令 $s = j\omega$，可得 ω^{2n-2} 前的系数 $c_{n-1} = -[\alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2}]$，注意到

$$\phi(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots\cdots + \alpha_0 = \prod_{i=1}^{n} (s + \lambda_i),$$

所以

$$\alpha_{n-1}^2 - 2\alpha_{n-2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0,$$

可知 c_{n-1} 为负，(11)式不能成立，证毕.

Kalman 曾指出[2]，若最优调节器的性能指标取为

$$J = \int_0^\infty (\rho x^T Q x + u^2)\, dt,$$

当 $\rho \to \infty$ 时，闭环极点中的一部分将趋于巴氏构形，定理 3 是对 Kalman 结论的一个补充.

参 考 文 献

[1] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-Hall (1971).
[2] Kalman, R. E., When is a Linear Control System Optimal , *Trans ASME (D)*, **86** (1964), 51—60.
[3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear System Optimization with Prescribed Degree of Stability, *Proc, IEE,* **116** (1969), 2083—2087.
[4] Fallside, F. and Seraji, H., Design of Optimal System by a Frequency-domain Technique, *Proc, IEE,* **117** (1970), 2017—2024.
[5] 郑应平，现代频域法展望，信息与控制，**9**(1980)，57—70.
[6] Bellman, R., Introduction to Matrix Analysis (second edition) Mcgraw-Hill (1970).
[7] Šiljak, D., Analytic Test for Absolute Stability, Electron Letters, 4(1968), 358—359.
[8] Hamming, R. W., Digital Filters, Prentice-Hall, (1977).

DESIGN OF OPTIMAL REGULATOR WITH PREASSIGNED CLOSED-LOOP POLES BY INVERSE PROBLEM APPROACH

YANG TAICHENG LI TIANJIAN XU YANHUA
(Tongji University)

ABSTRACT

In this paper, a new concept of "Dominant Sum of Matrix" is presented. From the engineering point of view, a design method for single input optimal regulator with preassigned closed-loop pole by inverse problem approach has been derived.