第10卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 4
1984年10月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1984

对二阶系统最小 ITAE 阻尼系数的修正

林 德 新
（天水电气传动研究所）

摘　　要

本文提出了计算二阶系统 ITAE 的级数的表达式，并用可编程序计算器计算出使 ITAE 最小的阻尼系数为 0.752. 比用模拟计算机算得的 0.7 更为精确. 本文也提出计算其它类型误差积分性能指标的解析表达式.

一、引　　言

ITAE (Integral of Time Multiplied by the Absolute Value of Error) 是系统输出的期望值与实际输出值的误差的绝对值乘以时间后再取积分的值，它可作为系统的品质指标. 所谓 ITAE 准则就是使系统的 ITAE 最小作为设计系统的目标. 自从文献 [1] 提出 ITAE 准则后，已得到广泛的引用[2-4]. 文献[1]中的作者利用电子模拟计算机算出位移无静差系统使 ITAE 为最小的 2—8 阶最佳传递函数的分母表，其中二阶系统对应的最佳阻尼系数为 0.7，相应的超调量为 4.6%. 但是这个阻尼系数是偏小的，而超调量是偏大的. 本文把二阶系统的 ITAE 计算化为无限项级数之和，然后用可编程序计算器计算有限项之和，而这有限项级数与无限项级数之差的绝对值小于指定正数. 用 0.618 法寻找 ITAE 的最小值，得出最佳阻尼系数应为 0.752，相应的超调量为 2.78%.

二、二阶系统的 ITAE 计算

设系统闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2},\tag{1}$$

其中 ζ 为阻尼系数，ω_0 为自振角频率. 由 (1) 式可得单位输入与单位阶跃响应的误差为

$$e(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t-\theta).\tag{2}$$

其中

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}.\tag{3}$$

考虑 $0<\zeta<1$，则 $\theta<\pi/2$. 令 $\tau=\omega_0 t$，则 (2) 式可改写为

$$e(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau-\theta).\tag{4}$$

本文于 1982 年 8 月10日收到.

根据 ITAE 定义得性能指标

$$J=\int_0^\infty \tau|e(\tau)|d\tau=\int_0^\infty \tau\left|\frac{e^{-\zeta\tau}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\tau-\theta)\right|d\tau$$
$$=\int_0^{\tau_1}\tau|e(\tau)|d\tau+\int_{\tau_1}^{\tau_1+T}\tau|e(\tau)d\tau+\cdots$$
$$+\int_{\tau_1+nT}^{\tau_1+(n+1)T}\tau|e(\tau)|d\tau+\cdots, \tag{5}$$

其中 τ_1 为使 $e(\tau)$ 第一次等于零的值，

$$\tau_1=\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\Big/\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{6}$$

其中 T 为 $e(\tau)$ 振荡周期的 1/2，

$$T=\pi/\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{7}$$

由于(5)式第 1 项积分中 $e(\tau)$ 为正，所以可将绝对值符号取消．(5)式中第 2 项积分，由于 $e(\tau)$ 为负，所以

$$\int_{\tau_1}^{\tau_1+T}\tau|e(\tau)|d\tau=-\int_{\tau_1}^{\tau_1+T}\tau e(\tau)d\tau.$$

同理可证

$$\int_{\tau_1+nT}^{\tau_1+(n+1)T}\tau|e(\tau)|d\tau=(-1)^{n+1}\int_{\tau_1+nT}^{\tau_1+(n+1)T}\tau e(\tau)d\tau. \tag{8}$$

将 (8) 式代入 (5) 式则得被积函数不包含绝对值符号的表达式，即

$$J=\int_0^{\tau_1}\tau e(\tau)d\tau+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_{\tau_1+nT}^{\tau_1+(n+1)T}\tau e(\tau)d\tau. \tag{9}$$

设不定积分

$$\int\tau e(\tau)d\tau=F(\tau), \tag{10}$$

将 (10) 代入 (9) 式则得

$$J=-F(0)+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nF(\tau_1+nT). \tag{11}$$

于是(见文献 [5] p.275 积分表)可以列出

$$F(\tau)=\int\tau e(\tau)d\tau$$
$$=\int\frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau}[\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)+\zeta\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)]d\tau$$
$$=-e^{-\zeta\tau}\Big[2\zeta\tau\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)+\frac{(2\zeta^2-1)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\tau\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)$$
$$+(4\zeta^2-1)\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)+\frac{(4\zeta^2-3)\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\tau)\Big]. \tag{12}$$

以 $\tau=0,\tau_1,\cdots\cdots(\tau_1+nT)$ 代入 (12) 式则得

$$F(0)=-(4\zeta^2-1),$$

$$F(\tau_1)=\left[\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\Big/\sqrt{1-\zeta^2}+2\zeta\right]e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$F(\tau_1+nT)=(-1)^n\left[\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\Big/\sqrt{1-\zeta^2}+2\zeta\right]e^{-\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

以此代入(11)得计算 ITAE 的级数表达式

$$J=4\zeta^2-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\Big/\sqrt{1-\zeta^2}+2\zeta\right]e^{-\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{13}$$

三、 最佳阻尼系数

为了计算 ITAE，在允许误差的情况下可以用(5)式上限为 τ_a 的积分来近似 (5) 式. 在这种情况下误差为

$$R=\int_0^{\infty}\tau|e(\tau)|d\tau-\int_0^{\tau_a}\tau|e(\tau)|d\tau=\int_{\tau_a}^{\infty}\tau|e(\tau)|d\tau.$$

$$\because\quad \tau|e(\tau)|=\tau\left|\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau-\theta\right)\right|\leqslant\frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau},$$

$$\therefore\quad R<\int_{\tau_a}^{\infty}\frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau}d\tau=\frac{(1+\zeta\tau_a)}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\tau_a}. \tag{14}$$

若允许误差 $R<10^{-7}$，对于 $\zeta>0.5$ 时，τ_a 只要大于 40，相应 n 只要大于 11 即可.

利用 10 位可编程序计算器,采用循环语句计算(13)式,取 $n=12$，并用 0.618 法在 $0.5<\zeta<0.9$ 范围内查寻 J 的最小值程序，而 J 的允许误差绝对值小于 10^{-7}. 由此得出最佳阻尼系数为

$$\zeta=0.752475565,\quad \text{相应的 } J=1.951859469.$$

ζ 为不同值时 ITAE 的性能指标如表 1 所示.

表 1

ζ	J	ζ	J
0.5	2.941708126	0.752	1.951862208
0.6	2.278283070	0.8	1.984464713
0.7	1.989628294	0.9	2.301836332

若取最佳阻尼系数的 3 位有效数字即 0.752，则在单位阶跃作用下的最大超调量为

$$\sigma=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}=2.78\%.$$

显然上述结果比文献[1]得出的 $2\zeta=1.4$ 为精确.

四、几种误差积分准则的比较

为了便于比较各种误差积分准则，现将各种误差积分准则的解析表达式归纳如下.

1）ISE 准则. 性能指标为[3]

$$J_1=\int_0^\infty e^2(\tau)d\tau=\lim_{s\to 0}E_q(s)=\zeta+\frac{1}{4\zeta}. \tag{15}$$

其中

$$E_q(s)=\mathscr{L}e^2(\tau)=\frac{1}{2(1-\zeta^2)}\left[\frac{1}{(s+2\zeta)}+\frac{(s+2\zeta)(1-2\zeta^2)+4\zeta(1-\zeta^2)}{(s+2\zeta)^2+4(1-\zeta^2)}\right] \tag{16}$$

2）ITSE 准则. 性能指标为[3]

$$J_2=\int_0^\infty \tau e^2(\tau)d\tau=\lim_{s\to 0}\left[-\frac{d}{ds}E_q(s)\right]=\zeta^2+\frac{1}{8\zeta^2}. \tag{17}$$

3）ISTSE 准则. 性能指标为

$$J_3=\int_0^\infty \tau^2e^2(\tau)d\tau=\lim_{s\to 0}\left[\frac{d^2}{ds^2}E_q(s)\right]$$

$$=\zeta(2\zeta^2-0.5)+\frac{1+\zeta^2}{8\zeta^3}. \tag{18}$$

4）IAE 准则. 性能指标为 $J_4=\int_0^\infty|e(\tau)|d\tau$，$J_4$ 的计算可参照本文第二节方法得出.

$$J_4=2\zeta+2e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^n\right]$$

$$=2\left[\zeta+e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}/\left(1-e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right]. \tag{19}$$

由式（15），（17），（18），（19）可求得其性能指标的极小值 $J_{\min}$、相应的阻尼系数 ζ^*、超调量 σ 和调整时间 t_s（达到稳定值的 ±2%）如表 2 所示.

表 2

性能指标	$J_{\min}$	ζ^*	$\sigma\%$	t_s
ISE	1	0.5	16.3	$8.08/\omega_0$
ITSE	0.7071	0.595	9.77	$6.56/\omega_0$
ISTSE	0.8686	0.667	6.01	$6/\omega_0$
IAE	1.6051	0.662	6.24	$6.02/\omega_0$
ITAE	1.9519	0.752	2.78	$5.73/\omega_0$

注：w_0 含义见(1)式.

由表 2 可知，前二种性能指标超调量较大，尤其是 ISE 一般很少采用，而 ITAE 则响

应较快，且超调量小，即使对高阶系统也是如此．但是实际系统究竟应选用何种指标，则要看具体情况和能否实现而定．对于高阶系统的性能指标计算，则随着阶数增加，分析计算越加困难．但可以借助于电子计算机求瞬态响应的数值解，然后通过数值积分求性能指标，并且可以改变系统可变参数以达到所求性能指标为最小．

参　考　文　献

[1] Graham, D. and Lathrop, R.C., The Synthesis of Optimum Transient Response, Criteria and Standard Forms, *Trans. AIEE*, **72**, (1953), pt. 2.
[2] 项国波，线性负反馈系统 ITAE 最佳调节，电气传动，1977 年，第 2 期．
[3] 绪方胜彦，现代控制工程，科学出版社，1978．
[4] S. M. 欣内尔斯著，现代控制系统理论及应用，机械工业出版社，1981．
[5] 数学手册编写组，数学手册，人民教育出版社，1979 年．

CORRECTING THE MINIMUN ITAE DAMPING COEFFICIENT FOR 2ND-ORDER SYSTEM

LIN DEXIN
(*The Institute of Tianshui Electric Power Drive*)

ABSTRACT

In this paper a series expression for the calculation of ITAE in 2nd-order system is presented. And then, by using a programmable scientific calculator the damping coefficient for the ITAE to attain minimum value, is calculated to be 0.752 instead of 0.7 calculated by anolog computer before. Analytical expressions which calculate the performance index of other error integration criteria are also given.