第 10 卷 第 4 期 自动化学报 Vol. 10, No. 4
1984 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1984

能稳干扰解耦判据

张虎明
（山西大学）

摘　要

本文提出用状态反馈实现线性定常系统能稳干扰解耦的一个判别准则. 主要结果是定理2,不仅给出了问题有解的充分必要条件，同时定理的证明过程也包含了判别的程序和状态反馈矩阵 K 的求法.

对受外干扰作用的系统,往往需要引进某种形式的反馈，使输出不受外干扰的影响，同时使闭环系统稳定. Wonham 曾用几何的方法，给出了 DDP 和 DDPS 有解的充分必要条件[1],即干扰解耦和稳定的干扰解耦问题. 由于他的办法关键在于构造 (A, B) 不变子空间和能控不变子空间,所以其后有许多人致力于有关问题的研究[2-5]. 韩京清和许可康引进"绝对能观"的概念，用矩阵的语言，对 DDP 和 DDPS 给出一个使人深受启发的答案[6]. 受文献[6]的启发,本文给出 DDPS 有解的一个判别准则.

一、坐标变换和主要引理

本文主要讨论以下多变量线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + F\omega, \\ z = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\omega(t) \in R^r$, $u(t) \in R^m$ 和 $z(t) \in R^p$ 分别为任意外干扰信号、控制输入信号和输出信号. $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$, $F \in R^{n\times r}$. 不失一般性，可设 B 列满秩，C 行满秩. 对系统(1),简记

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & B & F \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_K = \begin{bmatrix} A + BK & B & F \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

又若有非奇异矩阵 $P \in R^{n\times n}$，使

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_{m+r} \end{bmatrix},$$

则记 $\hat{\Sigma} \sim \Sigma$. 另外,对 Σ_K 中凡与反馈阵 K 有关的子块(即可能加入 K 的子块)均表示为 K 的函数阵,记为 $x(K)$，x 为 Σ 的某一子块.

我们的目的是选取状态反馈 $u = Kx$，使闭环系统稳定,且输出子块不受干扰信号 ω

本文于 1982 年 4 月 5 日收到.

的影响．根据能稳干扰解耦问题对代数等价系统的不变性原理，需要找出一个与系统(1)代数等价的适当的系统，并且用以下办法来求代数等价系统的系数阵：

1）将第 i 块行与第 j 块行对调后，接着将第 j 块列与第 i 块列对调．

2）将第 i 块行左乘某一相应阶数的非奇异矩阵 A 后，接着将第 i 块列右乘 A^{-1}．

3）将第 j 块行左乘某一相应阶数的矩阵 T 加到第 i 块行后，接着将第 i 块列右乘 $(-T)$ 加到第 j 块列．

定义 1. (A_{11}, B_1, C_1) 称为 (A, B, C) 的绝对能观子系统，若

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_{22} & A_{21} & B_2 \\ A_{12} & A_{11} & B_1 \\ \hline 0 & C_1 & 0 \end{array}\right],$$

且 $(A_{11}+B_1K_1, B_1, C_1)$ 完全能观，对 $\forall K_1 \in R^{n_1\times m}$，$n_1$ 为 A_{11} 的阶数见文献[6]．

命题 1. 对系统(1)的系数阵 Σ，恒存在一个维数 $\geqslant P$ 的极大绝对能观子系统，即

$$\Sigma \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{21} & \tilde{B}_2 & \tilde{F}_2 \\ \tilde{A}_{12} & \bar{A}_{11} & \bar{B}_1 & \bar{F}_1 \\ \hline 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

其中 $\bar{C}_1 = [0\cdots 0C_0]$，$C_0$ 非奇异，$(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为 (A, B, C) 的极大绝对能观子系统．

$$\tilde{A}_{21} = [0\cdots 0x], \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\nu+1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & x \\ \begin{pmatrix} C_{\nu-1} \\ x \end{pmatrix} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix} C_1 \\ x \end{pmatrix} & x \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_\nu \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

C_i 均列满秩，且 C_i 的行数等于 B_i 和 B_{i+1} 之间的 0 行数，等于 $\tilde{A}_{12}$ 中相应的 0 行数，等于 $\bar{A}_{11}$ 中 C_i 左边的 0 行数，$i=1,\cdots,\nu-1$．$[B_{\nu+1}^T\cdots B_1^T]$ 非奇异[6]．

再将 $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2)$ 分出能稳和完全不稳定部分，最后得到与系统(1)代数等价的系统(2)．

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{F}\omega, \\ z = \bar{C}\bar{x}. \end{cases} \tag{2}$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{F} \\ \bar{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \bar{A}_{33} & x & x & \bar{B}_3 & \bar{F}_3 \\ 0 & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{21} & 0 & \bar{F}_2 \\ \bar{A}_{13} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} & \bar{B}_1 & \bar{F}_1 \\ \hline 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

其中 1) $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为 (A, B, C) 的极大绝对能观子系统，$\begin{bmatrix} \bar{B}_3 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}$ 的非 0 行线性无关（命题

1); 2) $(\bar{A}_{33}, \bar{B}_3)$ 完全能稳，$\sigma(\bar{A}_{22})\subset C^+$，$\sigma(\cdot)$ 表示矩阵特征值集合，C^+ 表示复平面右半部(闭),以后出现的 C^- 表示复平面左半部(开).

二、判别准则

定理 1. 若 $B=0$，则系统(1)能实现干扰解耦的充分必要条件为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} F = 0^{[7]}. \tag{2.1}$$

推论. 若

$$A=\begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix},\ C=[0 \quad C_1],\ F=\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix},\ B=0,$$

(A_{11}, C_1) 完全能观,则系统(1)能实现干扰解耦的充分必要条件为 $F_1=0$.

定理 2. 系统(2)能用状态反馈实现稳定干扰解耦的充分必要条件为:

$$1)\ \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}\ \text{能稳；}\ 2)\ \begin{bmatrix} \bar{F}_2 \\ \bar{F}_1 \end{bmatrix}=0.$$

证. 充分性. 若条件 1) 和 2) 成立,取 Q 非奇异,并取 K'_{33}, K'_{13}, K'_{11}, 使

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_3 \\ \bar{B}_1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \bar{B}'_3 & 0 \\ 0 & \bar{B}'_1 \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}'_1 \end{bmatrix} K'_{11}$$

稳定，$(\bar{A}_{33}+\bar{B}'_3K'_{33})$ 稳定，$(\bar{A}_{13}+\bar{B}'_1K'_{13})=0$. 令

$$K=Q\begin{pmatrix} K'_{33} & 0 \\ K'_{13} & K'_{11} \end{pmatrix},$$

则$(\bar{A}+\bar{B}K)$稳定,且 $z(t)=\bar{C}e^{(A+BK)t}\bar{x}(0)$ 与 $\omega(t)$ 无关.

必要性. 因为 $\bar{B}_1$ 的非 0 行线性无关,且 $\bar{B}_1$ 和 $\bar{A}_{13}$ 的非 0 行数相等,所以由$(\bar{A}-\lambda I, \bar{B})$行满秩容易知 $\left(\begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{11} \end{bmatrix}-\lambda I,\ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}\right)$ 行满秩,对 $\forall\lambda\in C^+$, 从而知条件 1) 成立. 以下证条件 2) 为真.

设当 $u=K\bar{x}$ 时，$(\bar{A}+\bar{B}K)$ 稳定,且(2.1)式成立,于是有

$$\bar{\Sigma}_K=\left[\begin{array}{ccc|c|c} \bar{A}_{33}(K) & x & x & \bar{B}_3 & \bar{F}_3 \\ 0 & \bar{A}_{22} & x & 0 & \bar{F}_2 \\ \bar{A}_{13}(K) & \bar{A}_{12}(K) & \bar{A}_{11}(K) & \bar{B}_1 & \bar{F}_1 \\ \hline 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

将 $(\bar{A}_{33}(K), \bar{A}_{13}(K))$ 分出完全能观和不能观部分，就得

$$\bar{\Sigma}_K \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} \bar{A}''_{33}(K) & x & x & x & \bar{B}''_3 & \bar{F}''_3 \\ 0 & \bar{A}'_{33}(K) & x & x & \bar{B}'_3 & \bar{F}'_3 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{22} & x & 0 & \bar{F}_2 \\ 0 & \bar{A}'_{13}(K) & \bar{A}_{12}(K) & \bar{A}_{11}(K) & \bar{B}_1 & \bar{F}_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

其中 $(\bar{A}'_{33}(K), \bar{A}'_{13}(K))$ 完全能观．所以存在 T，使

$$\tilde{A}_{33}(K) = \bar{A}'_{33}(K) + T\bar{A}'_{13}(K), \quad \sigma(\tilde{A}_{33}(K)) \cap \sigma(\bar{A}_{22}) = \phi.$$

将 $\bar{A}'_{13}(K)$ 所在行左乘 T 加到 $\bar{A}'_{33}(K)$ 所在行，并做相应的列变换，就有

$$\bar{\Sigma}_K \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} \bar{A}''_{33}(K) & x & x & x & \bar{B}''_3 & \bar{F}''_3 \\ 0 & \tilde{A}_{33}(K) & \bar{A}_{32}(K) & x & \tilde{B}_3 & \tilde{F}_3 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{22} & x & 0 & \bar{F}_2 \\ 0 & \bar{A}'_{13}(K) & \bar{A}_{12}(K) & \bar{A}'_{11}(K) & \bar{B}_1 & \bar{F}_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

因为 $\sigma(\tilde{A}_{33}(K)) \cap \sigma(\bar{A}_{22}) = \phi$，所以存在 S，使 $\tilde{A}_{33}(K)S - S\bar{A}_{22} = \bar{A}_{32}(K)$[8]．将 $\bar{A}_{22}$ 所在行左乘 S 加到 $\tilde{A}_{33}(K)$ 所在行，并做相应的列变换，就有

$$\tilde{\Sigma}_K \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} \bar{A}''_{33}(K) & x & \bar{B}''_3 & \bar{F}''_3 \\ 0 & \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{F} \\ \hline 0 & \tilde{C} & 0 & 0 \end{array}\right].$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{33}(K) & 0 & x \\ 0 & \bar{A}_{22} & x \\ \bar{A}'_{13}(K) & \bar{A}'_{12}(K) & \bar{A}'_{11}(K) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ 0 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{F}'_3 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [\,0 \quad 0 \quad C_0\,].$$

证明$(\tilde{A}, \tilde{C})$完全能观．注意到 $\sigma(\tilde{A}) \subset C^-$，而 $\sigma(\bar{A}_{22}) \subset C^+$，就可断言 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}'_{12}(K))$ 必完全能观． 否则将分出完全能观和不能观部分，则 $\tilde{A}$ 含有 $\bar{A}_{22}$ 的一部分不稳定特征根．因为 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}'_{12}(K))$ 完全能观，$(\tilde{A}_{33}(K), \bar{A}'_{13}(K))$ 完全能观，且 $\sigma(\bar{A}_{22}) \cap \sigma(\tilde{A}_{33}(K)) = \phi$，易推得

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{33}(K) & 0 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad [\bar{A}'_{13}(K), \ \bar{A}'_{12}(K)]$$

完全能观．对 $\begin{pmatrix} \tilde{A} - \lambda I \\ \tilde{C} \end{pmatrix}$ 进行如下的行初等变换：由 C_0 开始，依次由 C_i 消去与之同列的所有 x，再进行行的对调，即有

$$
\begin{pmatrix} \tilde{A}-\lambda I \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cccc}
\tilde{A}_{33}(K)-\lambda I_{33} & 0 & x & \cdots\cdots & x & x \\
0 & \bar{A}_{22}-\lambda I_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 & x \\
\hline
\begin{pmatrix}0\\P_\nu\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\R_\nu\end{pmatrix} & -\lambda I_\nu & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} & x \\
\begin{pmatrix}0\\P_{\nu-1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\R_{\nu-1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C_{\nu-1}\\x\end{pmatrix} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda I_2 & \vdots \\
\begin{pmatrix}0\\P_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\R_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}C_1\\x\end{pmatrix} & x \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & C_0
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}
\tilde{A}_{33}(K)-\lambda I_{33} & 0 & \\
0 & \bar{A}_{22}-\lambda I_{22} & 0 \\
\hline
\begin{pmatrix}P_\nu\\ \vdots \\ P_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}R_\nu\\ \vdots \\ R_1\end{pmatrix} & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix}C_{\nu-1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_0\end{matrix}
\end{array}\right]
$$

可知，对 $\forall\lambda$，$\begin{pmatrix} \tilde{A}-\lambda I \\ \tilde{C} \end{pmatrix}$ 列满秩，所以$(\tilde{A}, \tilde{C})$完全能观．由定理 1 的推论即知

$$
\begin{bmatrix} \tilde{F}'_3 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_1 \end{bmatrix} = 0
$$

证毕．

定理 2 给出了 DDPS 有解的一个判别法则以及状态反馈阵 K 的求法．

参 考 文 献

[1] Wonham, W. Murrary Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer-Verlag, New York, (1978).

[2] Moore B. C., and Laub, A. J. Computation of Supremal (A,B)-Invariant and Controllability Subspaces. *IEEE. Trans.* AC-**23** (1978), 783—792.

[3] Anderson, B, D, O, Output-nulling Invariant and Controllability Subspaces. Proc. of the IFAC 6th World Congress, Part.1,(1975), 43,4.

[4] Fuhrmann, P. A. and Millams, J. C. A Study of (A, B)-Invariant Subspaces via Polynomial Models. *Int. J. Control*, **31**(1980), No.3, 467—494.

[5] Hautus, M. L. J. (A,B)-Invariant and Stabilizability Subspace, A Frequency Domain Description. *Automatica*, **16**(1980), 703—707.

[6] 韩京清和许可康，用状态反馈实现稳定的抗干扰，中国科学，第 10 期(1982).

[7] 韩京清，线性系统的能抗干性，自动化学报，第 1 期(1981).

[8] 甘得马赫，矩阵论，高等教育出版社，(1958).

A CRITERION TO THE DISTURBANCE-DECOUPLING WITH STABILITY

ZHANG HUMING
(Department of Mathematics, Shanxi University)

ABSTRACT

A criterion is proposed in this paper. It is used to judge whether or not it is possible to realize the disturbance-decoupling with stability by state feedback for a certain linear time-invariant dynamic system. The main result is obtained by theorem 2, in which not only the necessary and sufficient conditions are given, but also the procedures of judgement and the way to get a state feedback matrix K are contained in the proving process of the theorem.

中国自动化学会代表团参加国际自控联第九届大会

国际自控联(简称 IFAC) 于今年 7 月 2—6 日在布达佩斯召开了第九届世界大会。有 44 个国家的 1100多名科学家和工程技术专家出席了会议。以中国自动化学会理事长宋健同志为首的中国代表团一行31人前往参加。

这次大会共有 574 篇论文和报告，分 37 个主题在会上宣读，其中我国学者宣读论文 34 篇。这次会议的大量论文是自动化、计算机、机械电子技术在国民经济各方面的应用。37 项主题中有 30 项是应用方面内容。可以说这次大会是世界各国把自动化技术应用于国民经济工程、社会、经济、生物等各方面的一次大检阅。我国代表所做的许多报告引起了与会学者的重视。例如严筱钧同志在分组会上宣读的“中国机械工业系统发展途径”及放映中国自行设计制造的计算机控制及管理的主体自动化仓库彩色幻灯片，受到分组听众及西德、美国和奥地利等国代表的好评；吕勇哉同志做了“分布参数系统过程模拟和控制的一种工程方法”的报告后，日本代表专门访问了作者，索取了详细资料和软件。此外张嗣瀛、吴沧浦、王洪瑞等同志的报告也引起了与会各国学者的注意。我国代表宣读论文的篇数在与会各国中列居第 4 位；参加会议人数居第 10 位，论文及人数之多在我国历史上是空前的.

这次 IFAC 大会中还召开了 7 个专题研讨会，27 个圆桌讨论会和 11 个工业课题讨论会。这些会以具有重要应用价值的问题为中心，以活泼的形式，展开了热烈的讨论。

会议期间召开了第九届 IFAC 会员国代表大会以及理事会、技术局和执行局会议。宋健同志当选为第九届理事会理事。在技术局会上，授予严筱钧同志第八届主席签署的奖状，表彰他在任 IFAC 发展中国家技术委员会副主席时所做的工作。 会议决定第十届世界大会将于 1987 年 7 月在西德慕尼黑举行。中国会员向大会提出 1996 年在北京召开第十三届世界大会的申请。

（中国自动化学会参加国际自控联第九届世界大会代表团）