第10卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 10, No. 4
1984年10月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Oct., 1984

线性系统最经济控制问题的一种解法

涂莘生　　涂序彦
(南 开 大 学)　　(北京钢铁学院)

摘　　要

本文给出了线性系统最经济控制问题的一种解法. 该方法与现有方法不同，不需要把系统化为若唐标准形，求其变换阵及逆阵，只需计算系统的极点及某些矩阵的秩.

文献[1]，[2]提出了最经济控制的问题，并进行了相应的讨论. 文献[3]，[4]利用若唐标准形研究了这个问题. 本文从另一途径给出问题的一种解法.

设系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}.\end{cases} \tag{1}$$

其中 A, B, C 分别为 $n\times n$, $n\times m$, $p\times n$ 阶矩阵. 给定 A，求 $B(C)$，使 (A, B) 能控 ((C, A) 能观)，且使 $B(C)$ 中非零元个数最少. 这一问题称为"最经济控制"(量测)问题. 其 $B(C)$ 称为"最经济控制阵"(最经济量测阵)记为 $B_*(C_*)$.

本文的解法基于下述引理[5,6]

引理 1. 设 $\{\lambda_i, i=1, 2, \cdots, q\}$ 是 A 的全部不相重的特征根，则 (A, B) 能控的充分必要条件是对每个 λ_i 有 $\operatorname{rank}[A-\lambda_i I, B]=n$, $i=1, 2, \cdots, q$.

令 $A_i = A-\lambda_i I$, $r_i=\operatorname{rank} A_i$, $\alpha_i = n-r_i$, $\alpha=\max\{\alpha_i, i=1, 2, \cdots, q\}$. 容易看出 α 即为 A 的循环指数. 为了简单起见，令 $\underline{q}=\{1, 2, \cdots, q\}$, $\underline{n}=\{1, 2, \cdots, n\}$. 考虑 A_i，由于 $\operatorname{rank} A_i = r_i$，所以在 A_i 中一定存在第 $m^j_{i,1}, m^j_{i,2}, \cdots, m^j_{i,\alpha_i}$ 诸行，将 α_i 行删去后的 A_i 的秩仍为 r_i. 令 $M^j_i=\{m^j_{i,1}, m^j_{i,2}\cdots, m^j_{i,\alpha_i}\}\subset\underline{n}$，考虑具有这样性质的所有的 M^j_i, $j=1, 2, \cdots, k_i$，记 $\underline{M}_i=\{M^j_i; j=1, 2, \cdots, k_i\}$. 对每一个 $i\in\underline{q}$，任取一 $M^{j_0(i)}_i\in\underline{M}_i$, $j_0(i)\in\underline{k}_i$，构造如下集合

$$N(j_0(i), i\in\underline{q}) = \bigcup_{i\in\underline{q}} M^{j_0(i)}_i \subset\underline{n}. \tag{2}$$

记 $\beta(N(j_0(i), i\in\underline{q}))$ 为 $N(j_0(i), i\in\underline{q})$ 中所含元素的个数. 令 β 为所有的 $\beta(N(j_0(i), i\in\underline{q}))$ 中的最小值. 记 $N_1(\beta)$, $N_2(\beta)$, $\cdots$, $N_s(\beta)$ 为形如(2)，所包含的元素的个数为 β 的集合.

定理 1. 1) 系统 (1) 的最经济控制阵 B_* 中的非零元的个数为 β; 2). 当 B 为 $n\times\beta$ 的非奇异阵(即 $\operatorname{rank} B=\beta$) 时，$B$ 为最经济控制阵的充分必要条件是 B 的每列

本文于1982年2月5日收到.

有一个且仅有一个非零元,非零元所处的行数集合为某个 $N_i(\beta)$, $i\in \underline{s}$.

证明. 1) 选择一个 $N_k(\beta)=\{k_1, k_2, \cdots, k_\beta\}$, $k\in \underline{s}$, 构造一个 $n\times\beta$ 阶矩阵 B,使得在 B 中第 1 列第 k_1 行处,第 2 列第 k_2 行处,…,第 β 列第 k_β 行处皆为非零元, 在 B 中其它位置皆为零元. 根据 $N_k(\beta)$ 的定义,容易看出,对所有 $i\in \underline{q}$, $\operatorname{rank}[A_i, B]=n$. 由引理 1 可知 (A, B) 能控,故最经济控制阵 B_* 中非零元个数 $\leqslant\beta$. 若 (A, B) 能控,则对所有 $i\in \underline{q}$, $\operatorname{rank}[A_i, B]=n$. 对每个 i, 由于 $\operatorname{rank}A_i=r_i$, 故 $\operatorname{rank}B\geqslant n-r_i=\alpha_i$, 因而存在 $M_i^{j_0(i)}=\{m_{i,1}^{j_0}, m_{i,2}^{j_0},\cdots, m_{i,\alpha_i}^{j_0}\}$, 使得在 B 中第 $m_{i,1}^{j_0}, m_{i,2}^{j_0},\cdots, m_{i,\alpha_i}^{j_0}$ 诸行皆不能为零行, 即这些行中的每行至少有一个非零元. 否则, 可以证明, 对任意一个 $M_i^j=\{m_{i,1}^j, m_{i,2}^j,\cdots, m_{i,\alpha_i}^j\}\subset \underline{M}_i$. 若 B 中第 $m_{i,1}^j, m_{i,2}^j, \cdots, m_{i,\alpha_i}^j$ 诸行中至少有一行为零行,则有 $\operatorname{rank} A_i<n$, 即与$(A, B)$能控矛盾. 令

$$N(j_0(i), i\in \underline{q})=\bigcup_{i\in \underline{q}} M_i^{j_0(i)}, \tag{3}$$

那么在 B 中,行数为 $N(j_0(i), i\in \underline{q})$ 中的元的每一行至少有一个非零元, 故 B 的非零元个数大于等于 $\beta(N(j_0(i), i\in \underline{q})\geqslant\beta$. 由于$(A, B_*)$能控,故 B_* 的非零元个数大于等于 β. 这样,即得本定理的 1). 关于本定理中的2),很容易由1)以及1)的证明加以推论求得.

例 1[4]. 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

经过计算,可得 A 的不同特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, 而

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

$\operatorname{rank} A_1=3$, $\operatorname{rank}A_2=3$, 故 $\alpha_1=2$, $\alpha_2=2$. 容易算得 $\underline{M}_1=\{(2,5), (3,5)\}$, $\underline{M}_2=\{(1,3)\}$. 而 $(2, 5)\ U(1,3)=(1,2,3,5)$,$(3,5)\cup(1,3)=(1,3,5)$.故 $\beta=3$,且 $N_1(\beta)=(1,3,5)$, $s=1$. 根据定理 1 2), 可知 5×3 阶的最经济控制阵 B_* 的一般形式(不计列的排列次序)为

$$B_*=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{bmatrix}.$$

其中 b_1, b_2, b_3 皆为非零元. 这与文献[4]的结果一致.

考虑满足下面条件的矩阵 B:

1) 存在一个 $N_l(\beta)$

$$N_l(\beta)=\{l_1, l_2,\cdots, l_\beta\}=\bigcup_{i\in \underline{q}} M_i^{j^*(i)}, M_i^{j^*(i)}\in \underline{M}_i, l\in \underline{s}, \tag{4}$$

使得 B 在第 $l_1, l_2, \cdots, l_\beta$ 诸行中, 每一行有一个且仅有一个非零参数元 b_{l_j}, $j=1$,

$2, \cdots, \beta$;

2) 在行数为 $N_l(\beta) \cap M_i^{j*(i)}$，$i \in \underline{q}$ 中的诸行上的非零参数元 b_{l_j}，均在不同的列上；

3) B 中除 b_{l_j}，$j = 1, 2, \cdots, \beta$ 为非零元外，余者皆为零元，即 B 中非零元个数为 β.

将非零元 $(b_{l_1}, b_{l_2}, \cdots, b_{l_\beta})$ 看成是 β 维空间中一个点，并记为 $b = (b_{l_1}, b_{l_2}, \cdots, b_{l_\beta})$.

定理 2. 设 B 是满足条件 1)—3) 的矩阵；则对几乎所有的非零元的点 $b = (b_{l_1}, b_{l_2}, \cdots, b_{l_\beta})$（即在 β 维空间中除去一个零测度的点集，或者除去有限个超曲面的点集外的所有点），矩阵 B 都是最经济控制阵．反之，若 B_* 是最经济控制阵，则它一定满足条件 1)—3).

证明．设 B 是满足条件 1)—3) 的矩阵，(4) 式中 $M_i^{j*(i)}$ 设为 $M_i^{j*(i)} = \{m_{i,1}^{j*}, m_{i,2}^{j*}, \cdots, m_{i,\alpha_i}^{j*}\}$．对任一 A_i，考虑矩阵 $[A_i, B]$．由于 $\operatorname{rank} A_i = r_i$，故在 A_i 中可取 r_i 个列，使得由此 r_i 个列所构成的矩阵 A_i^* 的秩为 r_i，并且使得在 A_i^* 中删去第 $m_{i,1}^{j*} m_{i,2}^{j*}, \cdots, m_{i,\alpha_i}^{j*}$ 诸行后，所得子阵的行列式不为零．根据条件 1), 2)，在 B 中可取 α_i 个列，使得在这些列上的第 $m_{i,1}^{j*}, m_{i,2}^{j*}, \cdots, m_{i,\alpha_i}^{j*}$ 诸行上，有且仅有一个非零元，且这些非零元在不同的列上．由 B 中这样的 α_i 个列所构成的矩阵记为 B_i^*．考虑矩阵 $[A_i^*, B_i^*]$，易知为 $n \times n$ 的方阵．对于 $[A_i^*, B_i^*]$ 的行列式，按 B_i^* 诸列作拉普拉斯展开．设展开式为

$$\det[A_i^*, B_i^*] = f_i(b) = a_i f_i^*(b_*) + \bar{f}_i^*(b). \tag{5}$$

其中 a_i 是 A_i^* 中删去第 $m_{i,1}^{j*}, m_{i,2}^{j*}, \cdots, m_{i,\alpha_i}^{j*}$ 诸行后剩余的元素所构成的代数余子式，由前面讨论可知 $a_i \neq 0$；b_* 为 B 中在 $m_{i,1}^{j*}, m_{i,2}^{j*}, \cdots, m_{i,\alpha_i}^{j*}$ 诸行上的非零元的集合；而 $f_i^*(b_*) = \prod_{b_i \in b_*} b_i$ 或为 $-\prod_{b_i \in b_*} b_i$；$\bar{f}_i^*(b)$ 为 b 中诸元的一个多项式，是行列式 $\det[A_i^*, B_i^*]$ 按 B_i^* 诸列展开时，展开式中其它诸项之和．显见 $\bar{f}_i^*(b)$ 中不包括 $\prod_{b_i \in b_*} b_i$ 这样的项，因而 $f_i(b)$ 是关于 b 诸元的非零多项式．故

$$\pi_i: f_i(b) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, q \tag{6}$$

是 b 所在 β 维空间中的超曲面．除去 q 个超曲面 π_i，$i \in \underline{q}$ 点外，所有的点 b，均使 $\det[A_i^*, B_i^*] = f_i(b) \neq 0$，即 $\operatorname{rank}[A_i, B] = \operatorname{rank}[A_i^*, B_i^*] = n$，亦即 (A, B) 能控．再根据条件 3)，B 的非零元个数为 β，故 B 为最经济控制阵．

反之，若 B_* 是最经济控制阵，由定理 1 的 1)，可知 B_* 显然满足条件 3)，即非零元个数为 β．若条件 1) 对 B_* 不成立，则对任一个 $N_k(\beta) = (k_1, k_2, \cdots, k_\beta)$，$k \in \underline{s}$，在 B_* 中第 $k_1, k_2, \cdots, k_\beta$ 诸行中至少有一行全为零，由此容易证明 (A, B_*) 不能控，与 B_* 是最经济控制阵矛盾，故条件 2) 成立．条件 3) 对 B_* 也是成立的，若 3) 不成立，则 (A, B_*) 不能控．

定理 2 是定理 1 中 2) 的推广．

根据定理 2 以及定理 2 的证明，容易看出最经济控制阵 B_* 有如下性质：

1) 若 B_* 是最经济控制，则在 B_* 中添上一些零列后仍是最经济控制阵；对 B_* 的列作一置换后，仍是最经济控制阵．

基于这一性质，今后所讨论的最经济控制阵均假定不包含零列，且不计列的次序．

2）当系统输入 u 的维数(即 B 的列数) m 固定时，存在最经济控制阵 B^* 的充分必要条件为 $\alpha \leqslant m \leqslant \beta$（本性质即为文献[4]中定理 2，3）．当然，如果最经济控制阵 B_* 中包含零列，则 $m \leqslant \beta$ 不是必要的．

3）对于最经济控制阵 B_* 中的非零元 b，存在某一个邻域，当 b 的参数值在此邻域内变化时，B_* 仍为最经济控制阵，亦即 b 受到适当扰动时，B_* 仍为最经济控制阵．

定理 2 以及定理 2 的证明，给出了求全部最经济控制阵的方法．

例 2. 求例 1 的所有最经济控制阵．显然最经济控制阵的列数只可能为 $m=3$，$m=2$．当 $m=3$ 时，全部最经济控制阵由例 1 中(3)式给出．下面给出 $m=2$ 时，全部最经济控制阵．由于只有一个 $N_1(\beta)$，即 $s=1$，而 $N_1(\beta)=(3,5)\cup(1,3)=(1,3,5)$．根据条件 1)，3)，可知 B_* 中非零元的个数只有 3 个，而这 3 个非零元分布在 1，3，5 诸行上；由条件 3）可知，第 3 行非零元所在列只有一个非零元，因而第 1，5 行上的非零元在同一列上．故 B_* 的一般形式为

$$B_*=\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix},\quad b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_3 \neq 0. \tag{7}$$

考虑矩阵 $[A_i, B_*]$，$i=1, 2$．按照定理 2 的证明方法，构造矩阵

$$[A_1^*, B_1^*]=\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \end{array}\right],\quad [A_2^*, B_2^*]=\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_3 & 0 \end{array}\right].$$

分别按 B_1^*，B_2^* 的列展开，计算上面两矩阵的行列式，得

$$f_1(b_1, b_2, b_3)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} b_2 b_3 + 0 = b_2 b_3,$$

$$f_2(b_1, b_2, b_3)=(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} b_1 b_2 + 0 = b_1 b_2.$$

故只要 $b_1 \neq 0$，$b_2 \neq 0$，$b_3 \neq 0$ 时，则 $f_1(b_1, b_2, b_3)$，$f_2(b_1, b_2, b_3)$ 皆不为零，即由(7)式确定的 B_* 为最经济控制阵．结合例 1，对于 A，其全部最经济控制阵由(3)，(7)两式所给出，与文献[4]中的结果一致．

注 1．本文讨论的是满足能控性要求的最经济控制问题，对于仅满足能稳要求的最经济控制问题(即求 B，使 B 中非零元个数最少，且使 (A, B) 能稳)可作类似的讨论，只要将 A 的全部不同的特征根改为全部不同的具有非负实部的特征根即可，余者的讨论和本文完全相同．

注 2．根据能控性与能观性的对偶，可以得到关于最经济量测阵 C_* 的计算方法．

注 3．本文的结果对定常的离散线性系统也是适用的，只要将 (A, B) 能控改为 (A, B) 能达即可．

参 考 文 献

[1] 涂序彦,可控性、可观性的实用价值与最经济结构综合问题,全国第一届控制理论及应用交流会论文集，1981，科学出版社.
[2] 涂序彦,最经济控制系统结构综合问题,自动化学报 **8**(1982)，第2期.
[3] 黄琳、生成元,经济控制与线性多变量控制系统,北京大学学报,1981年第1期.
[4] 陈兆宽、张荣祥,线性控制系统最经济结构综合的代数方法,自动化学报 **7**(1981)，第3期.
[5] Francis, B. A. The Linear Multivariable Regulator Problem, *SIAM J. Control and Optimazation*, **15** (1977), No. 3.
[6] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, **101**, Springer-Verlag, New York, 1974.

A NEW METHOD FOR MOST ECONOMICAL STRUCTURAL SYNTHESIS OF LINEAR CONTROL SYSTEMS

TU FENGSHENG
(Nankai University)

TU XUYEN
(Beijing Iron and Steel College)

ABSTRACT

A new method for the most economical structural synthesis of linear control systems is reported in this paper. Unlike the existing methods which require to compute the transformation to reduce the matrix to a Jordan canonical form, this method only requires to compute the eigenvalues of the matrix and the ranks of some matrices.