第 11 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 1
1985 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1985

大系统分散稳定的一种算法

邝　硕
(华 中 工 学 院)
刘 玉 生
(成 都 科 技 大 学)

摘　　要

本文研究系统在信息分配上受到任意约束时的稳定问题，提出了系统分散可稳定的充要条件以及获得了分散稳定控制器的一种算法. 数值实例表明,该算法很有效且收敛很快.

一、引　　言

实际工程往往要求在分散信息约束下稳定一个系统. 在分散最优控制中，一个十分关键的问题是如何获得一个稳定初值.文 [1] 提出了在每一个控制站设置一个补偿器时，系统分散可稳定的充要条件. 在其证明中隐含了一构造性算法，但这种算法要付诸实用尚存在一些问题[2]. 此外,它只适合反馈增益矩阵为分块对角或分块三角的情形. 文 [3] 采用增广乘子法提出了获得分散稳定初值的一种算法，适合系统受到任意分散信息约束的情形,不足的是: 在一维搜索中要同时解两个 Lyapunov 方程,计算时间长; 由罚因子引起的 Hesse 矩阵病态问题不能根本消除，影响收敛速度; 事前不能对所获解的稳定度作出估计.

本文根据极小化二次代价函数提出了在给定任意分散信息结构下系统分散可稳定的充要条件,并由此导出了分散稳定的一种新算法. 该算法适合“完全分散”、“部分分散”、“完全不通信”和“部分通信”等情况[4],是一种简单、有效而实用的算法.

二、系统受到任意分散信息约束时的稳定问题

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{x}(t) + \hat{B}\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \hat{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = F\boldsymbol{x}(t) + G\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = H\boldsymbol{z}(t) + E\boldsymbol{y}(t). \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为对象状态向量; $\boldsymbol{z}(t)\in R^p$ 为补偿器状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in R^r$ 为对象输入;

本文于 1982 年 12 月13日收到

$\boldsymbol{y}(t)\in R^q$ 为输出；$\hat{A},\hat{B},\hat{C},F,G,H,E$ 为适当维常矩阵．其中 F,G,H,E 是所要选择的四个矩阵．为方便起见，定义

$$N=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle q & \scriptstyle p \end{array} \\ \begin{bmatrix} E & H \\ G & F \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle r \\ \scriptstyle p \end{array}. \tag{5}$$

令

$$\boldsymbol{m}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)\end{bmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle n\\ \scriptstyle p\end{array},\ A=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\scriptstyle n & \scriptstyle p\end{array}\\ \begin{bmatrix}\hat{A} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\scriptstyle n\\ \scriptstyle p\end{array},\ B=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\scriptstyle r & \scriptstyle p\end{array}\\ \begin{bmatrix}\hat{B} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\scriptstyle n\\ \scriptstyle p\end{array},\ C=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\scriptstyle n & \scriptstyle p\end{array}\\ \begin{bmatrix}\hat{C} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\scriptstyle q\\ \scriptstyle p\end{array}. \tag{6}$$

上述各矩阵上侧、右侧所标小写字母代表相应的列、行数．系统 (1)—(4) 可以写成

$$\dot{\boldsymbol{m}}(t)=(A+BNC)\boldsymbol{m}(t),\ \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}_0=[\boldsymbol{x}_0^T,\ \boldsymbol{z}_0^T]^T. \tag{7}$$

由于大系统在信息分配上往往存在各种约束，表现在N矩阵中即某些元素必须为零或其它固定值．为此，用以下公式来描述系统的信息结构：

$$N=\sum_{(i,j)\in S}T_iN_fF_j+N_c,1\leqslant i\leqslant(r+p),1\leqslant j\leqslant(q+p). \tag{8}$$

式中 S 为N中所有需要选择的自由元素的阶偶 (i,j) 的集合；N_f 为所有元素均自由的 $(r+p)\times(q+p)$ 全矩阵；N_c 为 $(r+p)\times(q+p)$ 矩阵，它除保留N中具有固定值的元素为相应值以外，其余元素为零；T_i 为 $(r+p)\times(r+p)$ 基本矩阵，其第 (i,i) 个元素为 1，其余为零；F_j 为 $(q+p)\times(q+p)$ 基本矩阵，其第 (j,j) 个元素为 1，其余为零．此外，定义集合 $\Omega(S)$ 为具有结构 (8) 的 $(r+p)\times(q+p)$ 矩阵的全体，即

$$\Omega(S)=\left\{N\,|\,N=\sum_{(i,j)\in S}T_iN_fF_j+N_c\right\}. \tag{9}$$

由此，具有任意分散信息约束的稳定问题可以叙述为：设 A 为不稳定矩阵，目的是求一个 $N\in\Omega(S)$ 使系统 (7) 稳定．显然，从信息结构(以及下面提出的算法通用性)上来考虑，输出反馈稳定 [5] 和增益矩阵呈分块对角的分散稳定均为具有任意分散信息约束的稳定问题的特例．

三、分散可稳定的充要条件

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{m}}(t)=A\boldsymbol{m}(t)+B\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}_0. \tag{10}$$

式中 A 为不稳定矩阵．目的是求一控制规律

$$\boldsymbol{v}(t)=NC\,\boldsymbol{m}(t), \tag{11}$$

使

$$\dot{\boldsymbol{m}}(t)=(A+BNC)\boldsymbol{m}(t) \tag{12}$$

稳定．此处，$\boldsymbol{v}(t)\in R^{r+p}$ (以下省略 t)．

定义． 对于给定的分散信息结构 (8)，如果存在一个 $N\in\Omega(S)$，使得 $(A+BNC)$ 的所有特征值具有负实部，则系统 (10) 称为分散可稳定的．

设 $\boldsymbol{v}$ 为分段连续的控制规律，$NC\boldsymbol{m}$ 为由它引起的分散输出． 对于给定的信息结构 (8)，$\boldsymbol{v}$ 为分散反馈控制规律(以下省略反馈二字)，当且仅当对于一切 $\boldsymbol{m}_0\in R^{n+p}$，存在一个 $N\in\Omega(S)$，使下式成立：

$$\int_0^\infty (\boldsymbol{v} - NC\,\boldsymbol{m})^T(\boldsymbol{v} - NC\,\boldsymbol{m})dt = 0. \tag{13}$$

事实上，即使对于同一控制律 $\boldsymbol{v}$，若 $\boldsymbol{m}_0$ 不同，输出 $NC\,\boldsymbol{m}$ 也不相同．为使所研究的问题独立于初态，把 $\boldsymbol{m}_0$ 看作均值为零、方差为 M_0 的高斯随机变量．即

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{m}_0] = 0,\ \mathrm{E}[\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{m}_0^T] = M_0 > 0. \tag{14}$$

对式 (13) 的左边取相对于初态 $\boldsymbol{m}_0$ 的数学期望，定义代价函数

$$I(\boldsymbol{v},N) = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{v} - NC\boldsymbol{m})^T(\boldsymbol{v} - NC\boldsymbol{m})dt\right\}. \tag{15}$$

在所有的分段连续控制规律中，仅对那些使系统 (10) 稳定的控制律感兴趣，故用 U 表示使 (10) 稳定的分段连续控制规律的集合．

定理 1． 对于给定的分散信息结构 (8)，当且仅当

$$\min_{\boldsymbol{v}\in U, N\in\Omega(S)} I(\boldsymbol{v},N) = 0 \tag{16}$$

时，系统 (10) 是分散可稳定的．

证．由被积函数的正定性，对一切 $\boldsymbol{v}\in U$，$N\in\Omega(S)$，有 $I(\boldsymbol{v},N)\geqslant 0$．又因 $\boldsymbol{v}$ 和 $NC\boldsymbol{m}$ 均为分段连续．当 $I(\boldsymbol{v}^*,N^*) = 0$，必有 $\boldsymbol{v}^* - N^*c\boldsymbol{m} = 0$，

即有
$$\boldsymbol{v}^* = N^*c\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{v}^*\in U,\ N^*\in\Omega(S).$$

因此系统 (10) 是分散可稳定的．

反之，若系统 (10) 是分散可稳定的，根据定义存在一个 $N^*\in\Omega(S)$，使 $(A + BN^*C)$ 的所有特征值具有负实部，取 $\boldsymbol{v}^* = N^*C\boldsymbol{m}$，则 $\boldsymbol{v}^*\in U$．故有

$$\min_{\boldsymbol{v}\in U, N\in\Omega(S)} I(\boldsymbol{v},N) = I(\boldsymbol{v}^*,N^*) = 0.$$

证毕．

四、分散稳定控制器的求解

设 (A, B) 完全可控且系统 (10) 分散可稳定，则定理 1 提供了求解分散稳定控制器的途径．这就是 $I(\boldsymbol{v},N)$ 相对于 $\boldsymbol{v}\in U$ 和 $N\in\Omega(S)$ 求极小．为此，先固定 N，使 $I(\boldsymbol{v},N)$ 相对于 $\boldsymbol{v}$ 求极小．令

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + Nc\boldsymbol{m}, \tag{17}$$

分别将其代入式 (10),(15)，得

$$\dot{\boldsymbol{m}} = (A + BNC)\boldsymbol{m} + B\bar{\boldsymbol{v}}, \tag{18}$$

$$I(\boldsymbol{v},N) = I(\bar{\boldsymbol{v}} + NC\,\boldsymbol{m},N) = \frac{1}{2}E\left\{\int_0^\infty \bar{\boldsymbol{v}}^T\bar{\boldsymbol{v}}dt\right\}. \tag{19}$$

显然，I 相对于 $\boldsymbol{v}$ 求极小等价于求一控制律 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 使式 (19) 极小，且使式 (18) 稳定．根据线性定常状态调节器理论[6]，使式 (19) 极小的控制律为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -B^TP\,\boldsymbol{m}. \tag{20}$$

式中，P 为如下 Riccati 方程的解：

$$(A + BNC)^TP + P(A + BNC) - PBB^TP = 0. \tag{21}$$

式 (19) 中不含 $\boldsymbol{m}$ 的项意味着其加权矩阵为零矩阵．因此，式 (21) 的对称解不一定唯

一，且式(20)运用到式(18)也不能保证得到的闭环系统是稳定的．但可以证明如下定理：

定理 2. 设(A,B)完全可控，$(A+BNC)$没有实部为零的特征值，又设B为满秩矩阵，则式(21)存在一个唯一的使闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{m}}=(A+BNC-BB^TP)\boldsymbol{m} \tag{22}$$

渐近稳定的解$P\geqslant 0$.

证．由于反馈不改变系统的可控性，(A,B)完全可控意味着$(A+BNC,B)$完全可控．因B满秩，故$(A+BNC,-BB^T)$也必完全可控．又$P_1=P_1^T=0$是(21)式的一个自明解，根据文[7]的定理1的i)和ii)以及推论5，(21)式存在一个解$P_2=P_2^T$，使$\mathrm{Re}\lambda(A+BNC-BB^TP_2)\leqslant 0$．进一步，根据文[7]的定理3，上述$P_2$是唯一的．作矩阵

$$M=\begin{bmatrix}A+BNC & -BB^T\\ 0 & -(A+BNC)^T\end{bmatrix},$$

$$M_1=\begin{bmatrix}A+BNC-BB^TP_2 & -BB^T\\ 0 & -(A+BNC-BB^TP_2)^T\end{bmatrix},$$

据文[7]定理8，M和M_1相似．因$(A+BNC)$没有实部为零的特征值，这就保证了

$$\mathrm{Re}\,\lambda(A+BNC-BB^TP_2)<0.$$

由文[8]的引理7的iv)得$P=P_2\geqslant P_1=0$．证毕．

定理2中假定$(A+BNC)$没有实部为零的特征值，这在迭代计算中是容易得到保证的(见下节)．

设(20)式中的P即为(21)式的唯一使闭环系统(22)渐近稳定的正半定解．将(20)式代入(17)式得

$$\tilde{\boldsymbol{v}}=NC\,\boldsymbol{m}-B^TP\,\boldsymbol{m}, \tag{23}$$

则$\tilde{\boldsymbol{v}}$是使$I(\boldsymbol{v},N)$极小，且使系统(10)稳定的唯一最优控制，它满足条件

$$\frac{\partial I}{\partial v}=0.$$

此时相应的代价为

$$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)=\min_{\boldsymbol{v}\in U}I(\boldsymbol{v},N)=\mathrm{E}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_0^TP\boldsymbol{m}_0\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(PM_0). \tag{24}$$

若式(24)还没有达到极小值零，通过适当选择$N\in\Omega(S)$可进一步减小$I(\boldsymbol{v},N)$．为此，固定$\tilde{\boldsymbol{v}}$使$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)$相对于$N$求极小．

据(8)式，$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)$相对于$N$中的自由参数最优化，等价于$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)$相对于$N_f$求最优．将$\tilde{\boldsymbol{v}}$和(9)式代入(15)式，并应用tr函数对矩阵求导法则[8]，得

$$\frac{\partial I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)}{\partial N}=\frac{\partial I\left(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \sum_{(i,j)\in S}T_iN_fF_j+N_c\right)}{\partial N_f}$$

$$=\mathrm{E}\left\{\int_0^\infty\sum_{(i,j)\in S}T_iB^TP\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^TC^TF_jdt\right\}$$

$$= \sum_{(i,j)\in S} T_i B^T P \left[\mathrm{E} \left(\int_0^\infty \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^T dt \right) \right] C^T F_j = \sum_{(i,j)\in S} T_i B^T P W C^T F_j \tag{25}$$

容易证明，若在极小化过程中保持系统（22）渐近稳定，则（25）式中的

$$W = E\left(\int_0^\infty \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^T dt \right)$$

为满足如下 Lyapunov 方程的唯一正定解：

$$(A + BNC - BB^TP)W + W(A + BNC - BB^TP)^T = -M_0. \tag{26}$$

应指出，随着 N 的改变（对于固定的 $\tilde{\boldsymbol{v}}$）$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N)$ 也在变化，可推出其表达式为

$$I(\tilde{\boldsymbol{v}},N) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(PBB^TPW) \tag{27}$$

反复进行上述求极小的过程，直到条件 $\dfrac{\partial I}{\partial v} = 0$，$\dfrac{\partial I}{\partial N} = 0$ 同时得到满足.

五、算　法

引理. 当且仅当 $(A + BNC + \alpha I)$ 是稳定的（I 为单位阵，证明见文 [6]），则 $(A + BNC)$ 有稳定度 α.

根据引理，若希望得到具有稳定度 α 的分散控制器，只需用 $\bar{A} = A + \alpha I$ 代替上述有关公式中的 A 即可. 此外，为保证 $(A + BNC)$ 的所有特征值有非零实部，计算中有时要有一个 α 的摄动. 现把计算步骤概括如下：

1）任选一个 $N^1 \in \Omega(S)$，令 $1 \Rightarrow k$.

2）检查 $(A + BN^kC)$ 是否稳定（或稳定度 α）. 若稳定，$N^* = N^k$，计算结束；否则，继续.

3）对于给定的 N^k，解 Riccati 方程

$$(A + BN^kC + \alpha I)^TP^k + P^k(A + BN^kC + \alpha I) - P^kBB^TP^k = 0$$

得到渐近稳定解 $P^k \geqslant 0$.

4）令 $N_1^k = N^k$，$1 \Rightarrow l$.

5）对于给定的 P^k、N_l^k，解 Lyapunov 方程

$$(A + BN_l^kC + \alpha I - BB^TP^k)W_l + W_l(A + BN_l^kC + \alpha I - BB^TP^k)^T = -M_0$$

6）计算梯度 $D_l = \sum_{(i,j)\in S} T_iB^TP^kW_lC^TF_j$.

7）对于给定的 $\varepsilon > 0$，检查 $\|D_l\| < \varepsilon$ 是否成立，若成立，$N_l^k \Rightarrow N^{k+1}$，$k + 1 \Rightarrow k$，转 2)；否则，继续.

8）计算搜索方向，若 $l = r(n + P) + 1$（式中 $r = 0,1,2,\cdots$；$(n + p)$ 为状态 $\boldsymbol{m}$ 的维数），则搜索方向为 $Z_l = D_l$；否则，搜索方向为 $Z_l = D_l + tZ_{l-1}$，式中

$$t = \{\|D_l\| - \mathrm{tr}\{D_lD_{l-1}^T\}\}/\|D_{l-1}\|^{-1}$$

为校正系数.

9）一维搜索寻最优步长 λ_l，$\min\limits_{\lambda} I(\tilde{v},N_l^k + \lambda Z_l) = I(\tilde{v},N_l^k + \lambda_l Z_l)$，搜索中监视下降步长，保持 $[A + B(N_l^k + \lambda Z_l)C + \alpha I - BB^TP^k]$ 稳定.

10）更新 N_l^k，$N_{l+1}^k = N_l^k + \lambda_l Z_l$，$l + 1 \Rightarrow l$，转 5）.

六、数值实例

例 1[9]. 考虑动态系统 $\dot{\boldsymbol{m}}(t) = A\boldsymbol{m}(t) + B\boldsymbol{v}(t)$，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 & 3 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

由计算可知，系统是开环不稳定的．现要求一分散控制器N使得 $\dot{\boldsymbol{m}}(t) = (A+BN)\boldsymbol{m}(t)$ 具有稳定度 $\alpha = 0.5$． 假定，根据系统的分散信息结构并考虑经济性、可靠性等因素，系统要设立三个控制站．第一控制站可获 m_1，m_2 信息，第二控制站可获 m_3，m_4 信息，而第三控制站可获 m_5，m_6 信息． 这就要求N的结构为

$$N = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

式中“*”表示需要选择的自由元素(第二控制站输出两个控制信号).

设 $\mathrm{E}[\boldsymbol{m}_0] = 0$，$\mathrm{E}[\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{m}_0^T] = I$，根据本文的算法编制了程序，在 DJS-130 机上进行了计算．任取初值 N^1 为

$$N^1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

经过一次循环，得到 $I(\boldsymbol{v},N) = 6.614 \times 10^{-22}$． 分散稳定控制器为

$$N^* = N^2 = \begin{bmatrix} -6.029 & 3.308 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10.342 & 13.992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.543 & -7.492 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16.996 & 12.112 \end{bmatrix}.$$

$(A + BN^*)$的特征值为

$$\lambda_1 = -3.103,\ \lambda_2 = -54.949,\ \lambda_3 = -6.886 + j14.023,$$
$$\lambda_4 = -6.886 - j14.023,\ \lambda_5 = -2.824 + j4.995,$$
$$\lambda_6 = -2.824 - j4.995.$$

所有特征值的实部均小于 -0.5，故符合稳定度 0.5 的要求．

例 2．系统的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{m}}(t) = A\boldsymbol{m}(t) + B\boldsymbol{v}(t),$$

$$A=\begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.208 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3 & -3.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.425 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5441 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5441 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -0.05 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.208 & -12.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3 & -3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.425 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 12.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

容易检查出系统是开环不稳定的．现在要求一个具有结构

$$N=\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

的分散控制器，使闭环系统 $\dot{\boldsymbol{m}}(t)=(A+BN)\boldsymbol{m}(t)$ 具有稳定度 $\alpha=0.5$．

设 $E[m_0]=0$，$E[m_0m_0^T]=I$，采用本文的算法编制了计算程序，在 DJS-130 机上进行求解．任选初值

$$N^1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

经过一次循环得 $I(\boldsymbol{v},N)=9.47\times10^{-15}$．分散稳定控制器为

$$N^*=N^2=\begin{bmatrix} -0.276 & -0.521 & -0.670 & -0.651 & 1.266 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.266 & -0.276 & -0.521 & -0.670 & -0.651 \end{bmatrix}.$$

$(A+BN^*)$ 的特征值为 $\lambda_1=-17.819$，$\lambda_2=-17.754$，$\lambda_3=-1.678+j3,080$，$\lambda_4=-1.678-j3.080$，$\lambda_5=-2.051+j1.849$，$\lambda_6=-2.051-j1.849$，$\lambda_7=-0.593+j0.669$，$\lambda_8=-0.593-j0.669$，$\lambda_9=-0.506$．可见系统具有稳定度 $\alpha=0.5$．

七、结　论

由上可知，通过解 Riccati 方程，对于固定的 $N\in\Omega(S)$，可以得到方程 (21) 的使闭环系统 (22) 渐近稳定的唯一解 $P\geqslant0$．而在固定 $\boldsymbol{v}$，代价 I 相对于 N 极小化过程中，共轭梯度法保证迭代中闭环系统稳定并使代价逐步减小．一般来说，由于满足要求的稳定解

是一个较大的集合，从任意一个初值出发经过多次循环，就可达到 $I(\boldsymbol{v},N)=0$，从而得到问题的解. 但对于某些稳定区域不连通的情况，有可能出现多次循环后 $I(\boldsymbol{v},N)\neq 0$，此时不能对系统的可稳定问题作出结论，可另取初值进行计算(这种情况笔者在实际计算中尚未遇到. 但若出现这种情况，如何选择初值?这是一个值得进一步研究的问题)，只要系统是分散可稳定的，本算法可以确保得到分散稳定控制器. 如果，对于一个充分大的初值集未能获得问题的解，则可以推论，该系统实际上不是分散可稳定的. 从这点上来说，本算法也可用来确定一个系统对于给定的信息结构是否可稳定. 与文 [3] 的算法相比，本算法在一维搜索中每一次仅需解一个 Lyapunov 方程. 由于总的计算时间绝大部分化费在一维搜索中，因而本算法可大大节省计算时间. 本算法不存在 Hesse 矩阵病态问题，所以收敛很快. 此外，本算法可以获得具有预定稳定度的分散控制器.

参 考 文 献

[1] Wang, Shihho, Davison E. J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-**18**, 5, (1973), 473—478.

[2] Sandell N., et al., Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale System, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-**23**, 2, (1978), 108—128.

[3] Wenk C. J., Knapp C. H., Parameter Optimization in Linear Systems with Arbitrarily Constrained Controller Structure, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-**25**, 3, (1980), 496—500.

[4] 涂序彦，关于大系统理论的几个问题，自动化学报，**5**，(1979).

[5] Kreisselmeier G., Stabilization of Linear Systems by Constant Output Feedback Using the Riccati Equation, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-**20**, 4, (1975) 556—557.

[6] Anderson B. D. O., Moore J. B.. Linear Optimal Control, Prentice-Hall Inc., (1971)

[7] Lancaster P., Rodman L., Existence and Uniqueness Theorems for the Algebraic Riccati Equation, *Int. J. Control*, **32**, 2, (1980), 285—309.

[8] [日]须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，(1979).

[9] Geromel J. C., Bernussou J., Stability of Twolevel Control Schemes Subjected to Structural Perturbations, *Int. J. Control*, Vol. **29**, No. 2, (1979),313—324.

AN ALGORITHM FOR DECENTRALIZED STABILIZATION OF LARGE SCALE SYSTEMS

Kuang Shuo

(Hauzhong Institute of Technology)

Liu Yusheng

(Chengdu University of Science and Technology)

Abstract

In this paper the stabilizing problem of systems with arbitrary constraints in decentralized information is studied. A necessary and sufficient condition for stabilizing a decentralized system is developed and a new algorithm for obtaining a stabilizing controller is presented. Numerical examples demonstrate that the algorithm is very efficient and converges very fast.