

模型降阶的机理探讨及几种新方法

钱钟韩 周其鉴 胡锡恒
(南京工学院) (重庆大学)

摘 要

本文从机理和实现两方面研究模型降阶问题。提出了在降阶模型中“中、低频段分别处理”和“有限信息资源合理分配”的原则,介绍了由此导出的几种新的模型降阶方法。新方法具有物理概念明确,计算简单易行,所得到的降阶模型在宽广的频带内有较高的逼近精度等优点,适合于工程应用。

一、导 言

由于所研究的对象很复杂,所以对象的数学模型(传递函数或状态方程)也十分复杂,模型降阶也就成为必要。十多年来,这一领域有了很大的发展^[1-3]。但总的说来,大多数文献都是着重于导出一些新的、改进的算法,而对方法中所隐含的降阶机理则缺乏深入探讨。不少算法也过于繁复,不便于推广应用。

六十年代中期,笔者在运用降阶模型模拟热工对象方面做了一些工作^[4]。近几年来,又在降阶机理和实用方法两方面进一步进行了研究^[5,6,7]。为了在计算方法上突破现有框框,必须探讨模型降阶的机理。

二、模型降阶的机理探讨

1. 关于 Padé 法的两个重要缺陷

Padé 法(包括连分式法,时矩匹配法等)具有计算简单易行和低频逼近精度高的优点。但有两个重要缺点:

1) 稳定降阶问题。对于稳定的高阶模型, Padé 法可能会得出不稳定的低阶近似式。对此,国内外出现了保证开环稳定性的所谓“部分 Padé 法”^[1-3]。对于 $[m/n]$ 阶低阶模型,部分 Padé 法首先以某种稳定格式(如依据 Routh 判据 Hurwitz 多项式、Mihailov 判据、稳定方程等等)来选择降阶模型的分母(n 阶),再用 Padé 法来获得其分子(m 阶),因此,这种“稳定降阶”方法通过对分子项的选择只能保留原型的 $m+1$ 个 Padé 系数,而完全 Padé 法则可保留 $m+n+1$ 个系数。可见,这种方法精度的损失是严重的^[6,8]。

本文于 1983 年 4 月 20 日收到。

本文曾于 1983 年 12 月在昆明召开的第四届全国控制理论及应用学术交流会上宣读。

事实上,采用 Padé 法降阶,只有某些阶次的近似式可能是不稳定的. 这时只须调整 Padé 展开式的一个(或两个)相应高频项系数,就可以获得稳定的降阶模型,且降阶模型仍可保留原型的 $m+n$ (或 $m+n-1$) 个 Padé 系数^[6],与上述“稳定降阶”法相比,精度损失要小得多. 如果对这种调整赋予某种新的含义和内容(例如中频点拟合),就能使降阶模型具有更高的使用价值.

模型降阶或简化的一个重要目的,是为了进一步综合设计,特别是把对象纳入一个更大的闭环系统,并通过计算和仿真来估计它在闭环系统中的动态品质^[4]. 一些作者过分强调了降阶模型的开环零极点和开环稳定性,而没有抓住工程应用中的要害. 此外,一个对象的开环稳定性必须用原型来分析,因为在降阶模型中往往会引入或忽略某些高频极点,从而改变了系统的稳定性.

2) 改善 Padé 法的中频(动态)精度. Padé 降阶模型很好地保留了原型的主要单调衰减成份,但没有反映原型的高频振荡成份. 通常,主要的改进办法是将原型在 $s=0$ 和 $s=\infty$ 两端交错展开^[4-3]. 这是一种进步. 但文[6]的分析表明,很多系统的动态响应,主要取决于系统的低频成份,而其动态变化的细部或小波动则取决于某一频段的系统特性. 因此,在降阶模型中,仅仅校正模型在 $s=\infty$ 附近的特性是很不够的.

由于某些实际对象的原型所包含的信息相当复杂,它的各个主要成分所覆盖的频段也相当宽,因此,很难以现有的降阶方法获得理想结果. 对于这类对象,应放弃对高阶系统进行单一处理的手段,而代之以一种“中、低频段分别处理”的方法. 一个较好的处理方案是用 Padé 法保证原型的低频特性,而用其他手段来拟合某些中频段的特性. 文[7]提出的计算公式为指定频率点的拟合提供了一种简单易行的数学手段.

2. 充分利用降阶模型的“有限信息资源”

对于 $[m/n]$ 阶降阶模型,称它的 $m+n+1$ 个独立的系数为它的“信息资源”. 降阶模型的阶次必然比原型低. 因此,降阶模型的“信息资源”是有限的.

过去很多文献介绍的方法,没有考虑如何最有效地利用这些有限个系数. 因此,低阶次和高精度两者之间的矛盾没有得到统一. 下面用一个典型例子对各种方法进行比较.

如已知 $[7/8]$ 阶系统

$$\begin{aligned}
 G_{7/8}(s) &= (1 + 2.24359s + 1.07502s^2 + 0.28667s^3 + 0.05409s^4 + 5.7487 \times 10^{-3}s^5 \\
 &\quad + 5.09439 \times 10^{-4}s^6 + 2.35225 \times 10^{-5}s^7) / (1 + 3.95129s + 4.5926s^2 \\
 &\quad + 1.78946s^3 + 0.47971s^4 + 0.077183s^5 + 9.49411 \times 10^{-3}s^6 + 8.05503 \\
 &\quad \times 10^{-4}s^7 + 2.64881 \times 10^{-5}s^8) \\
 &= \frac{k'(s + 0.5882)(s^2 + 1.968s + 74.756)}{(s + 0.46)(s + 0.75)(s^2 + 0.7s + 46.3625)} \\
 &\quad \times \frac{(s + 3.587)(s + 12.055)(s^2 + 3.459s + 22.29)}{(s + 8.5)(s + 15.6)(s^2 + 4.4s + 17.8)} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

(式中的 k' 很易决定. 为简明起见,均不写出它的具体数值,但各式中 k' 的值并不一定相同).

这是一个具有相当难度的算例. Shieh 等^[9]及 Marshall^[10] 都使用过它. 其特性曲线,见图 1 和 2. 图中还绘出了完全用 Padé 法得到的降阶模型的特性曲线.

表 1 各种降阶方法的计算结果

降阶方法	降阶模型
Padé 法	$R_{3/4}^S(s) = \frac{1 + 2.24847s + 1.01394s^2 + 0.13904s^3}{1 + 3.95168s + 4.53991s^2 + 1.53065s^3 + 0.19452s^4}$
Shieh 等 ^[7]	$R_{3/4}^{SH}(s) = \frac{1 + 1.81464s + 0.18800s^2 - 0.00321798s^3}{1 + 3.52334s + 2.97739s^2 + 0.11945s^3 + 0.062537s^4}$
Marshall ^[8]	$R_{3/4}^M(s) = \frac{1 + 0.19583s + 0.017839s^2 + 0.002667s^3}{1 + 2.24069s + 0.14746s^2 + 0.049395s^3 + 0.00199s^4}$
部份分式法*	$R_{3/4}^{PF}(s) = \frac{1 + 1.44148s + 0.09375s^2 + 0.021583s^3}{1 + 3.14920s + 2.24169s^2 + 0.10041s^3 + 0.046867s^4}$ $R_{2/3}^{PF}(s) = \frac{1 + 0.06228s + 0.01505s^2}{1 + 1.77000s + 0.04806s^2 + 0.03785s^3}$
FF—Padé 法*	$R_{3/4}^{FF}(s) = \frac{1 + 1.41172s + 0.084261s^2 + 0.023152s^3}{1 + 3.11943s + 2.18130s^2 + 0.09509s^3 + 0.04592s^4}$
保留主模式的*	$R_{3/4}^{RF}(s) = \frac{1 + 1.4179s + 0.08842s^2 + 0.02207s^3}{1 + 3.12560s + 2.19613s^2 + 0.09922s^3 + 0.04589s^4}$
FF—Padé 法	$R_{2/3}^{RF}(s) = \frac{1 + 0.06023s + 0.01572s^2}{1 + 1.76795s + 0.048034s^2 + 0.037807s^3}$

* 为本文提出的几种方法, 详见第三节. 表中 R 右上角的符号表示所用的降阶方法, R 的右下角表示降阶模型的“分子阶次/分母阶次”.

表 2 各种模型的零、极点比较

模型	主要 实零点 实极点	主要 复零点 复极点	次要 零点 极点
$G_{7/8}(s)$	$\frac{s + 0.5882}{(s + 0.46)(s + 0.75)}$	$\frac{s^2 + 1.968s + 74.756}{s^2 + 0.7s + 46.3625}$	$\frac{(s + 3.587)(s + 12.055)}{(s + 8.5)(s + 15.6)}$ $\frac{(s^2 + 3.459s + 22.29)}{(s^2 + 4.4s + 17.8)}$
$R_{3/4}^{FF}(s)^*$	$\frac{s + 0.7340}{(s + 0.476)(s + 0.990)}$	$\frac{s^2 + 2.9054s + 58.843}{s^2 + 0.6050s + 46.1446}$	
$R_{3/4}^{RF}(s)^*$	$\frac{s + 0.7326}{(s + 0.477)(s + 0.9847)}$	$\frac{s^2 + 3.7278s + 61.835}{s^2 + 0.7s + 46.3625}$	
$R_{2/3}^{RF}(s)^*$	$\frac{1}{s + 0.5705}$	$\frac{s^2 + 3.8315s + 63.61}{s^2 + 0.7s + 46.3625}$	
$R_{3/4}^M(s)$	$\frac{1}{s + 0.46}$	$\frac{s^2 + 1.968s + 74.756}{s^2 + 0.7s + 46.3625}$	$\frac{s + 5.8997}{s + 23.6798}$
$R_{3/4}^{SH}(s)$	$\frac{s + 0.58715}{(s + 0.46)(s + 0.75)}$	$\frac{1}{s^2 + 0.7s + 46.3625}$	$(s + 7.6759)(s - 53.2370)$
$R_{3/4}^S(s)$	$\frac{s + 0.58816}{(s + 0.463)(s + 0.744)}$.	$\frac{s^2 + 6.7043s + 12.2282}{s^2 + 6.6896s + 14.9194}$

* 同表 1.

表 1 列出了各种降阶模型的参数, 表 2 列出了原型和各种降阶模型的零、极点分布.

从表 2 可以看出各种降阶方法对“信息资源”的使用情况. 总的说来, 过去的一些降阶方法带有一定的盲目性, 因而结果不够理想. 例如:

1) $R_{3/4}(s)$ (Padé 法) 精确地保留了原型的主要单调成份 (两个实极点和一个实零点),

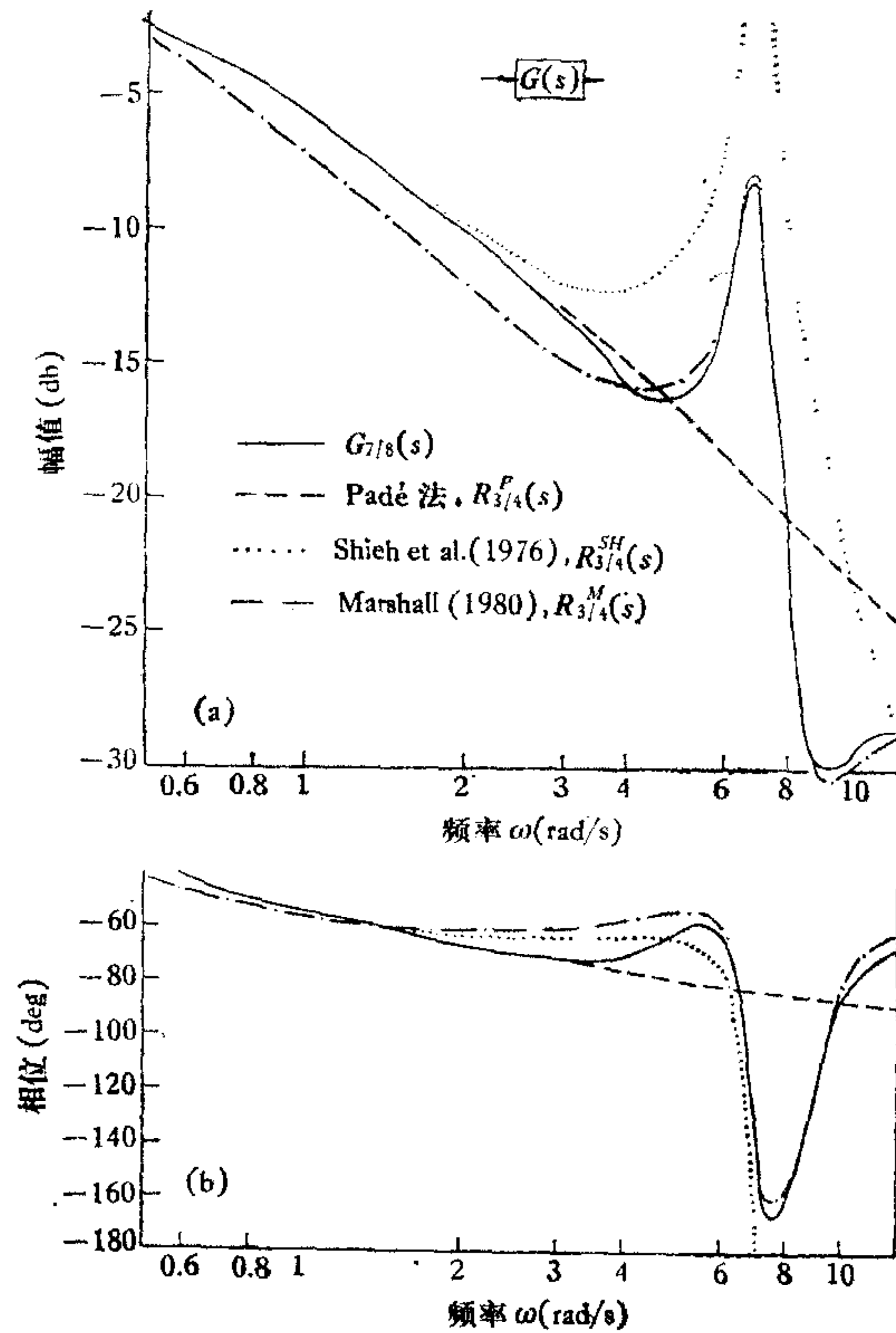


图 1 $G_{7/8}$ 及其 $R_{3/4}^P$ 、 $R_{3/4}^{SH}$ 、 $R_{3/4}^M$ 的频率特性
(a) 幅频特性 (b) 相频特性

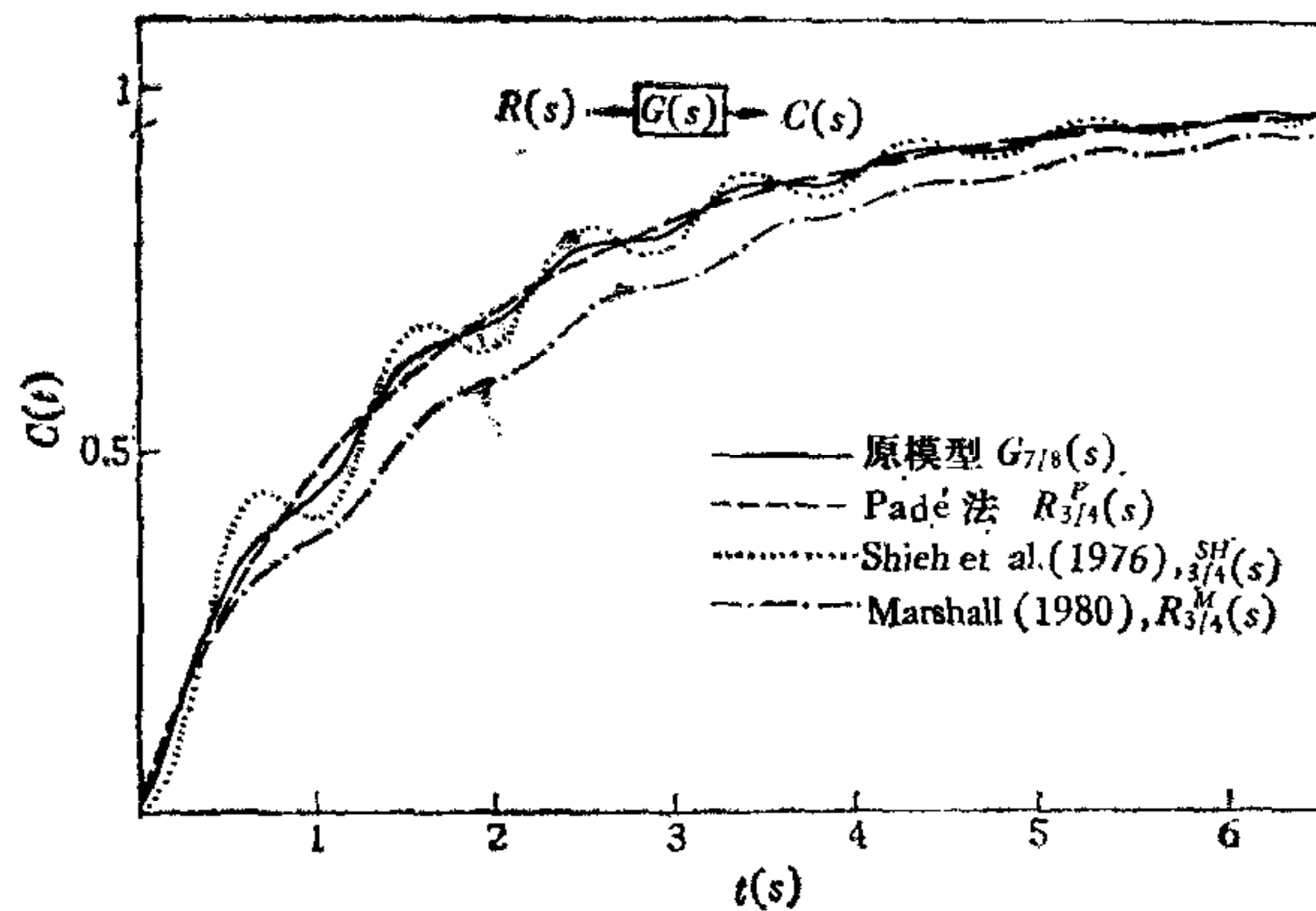


图 2 $G_{7/8}$ 及其 $R_{3/4}^P$ 、 $R_{3/4}^{SH}$ 、 $R_{3/4}^M$ 的单位阶跃响应

但没有复现原型的振荡成份。由图 1 可见，它丝毫没有反映出原型中频振峰；由图 2 可见它没有复现原型在单位阶跃作用下的振荡特性。

2) $R_{3/4}^{SH}(s)$ (Shieh 等)既保留了原型最多数目的实因子(三个),又保留了原型的一对主要复极点。剩下的三个系数则用 Padé 法拟合。一个振荡成分应包含: 振荡频率、阻尼、振幅和相位四个信息。在传递函数里,前两项信息包含在分母中,后两项则由分子、分

母共同决定。 仅仅保留主要复极点，并不能正确反映振荡成份的振幅和相位，这是使 $R_{3/4}^{SH}(s)$ 的振幅大大超过原型的振幅的原因(见图 1,2)。 由此可见，当近似模型的阶次受到一定限制时，在降阶模型中过多地保留原型的实因子，反而会降低近似模型的拟合精度。

3) $R_{3/4}^M(s)$ (Marshall) 保留了原型的一个实极点、一对复极点和一对复零点，而把剩下的两个系数用于中频拟合 ($\omega = 7$) 处，故它具有较高的中频拟合精度。 但由于没有充分

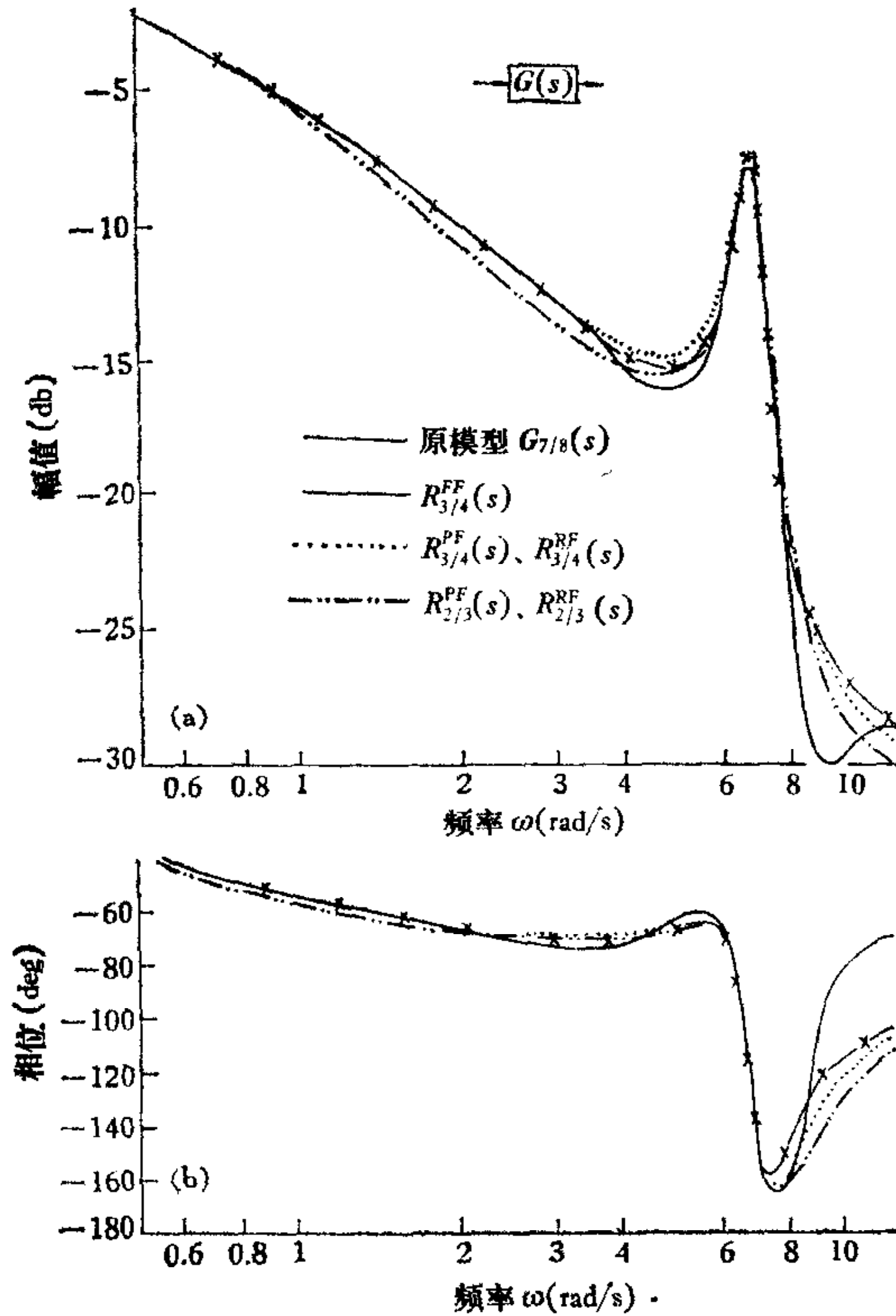


图 3 $G_{7/8}$ 及其 $R_{3/4}^{FF}$ 、 R^{PF} 、 R^{RF} 的频率特性
(a)幅频特性 (b)相频特性

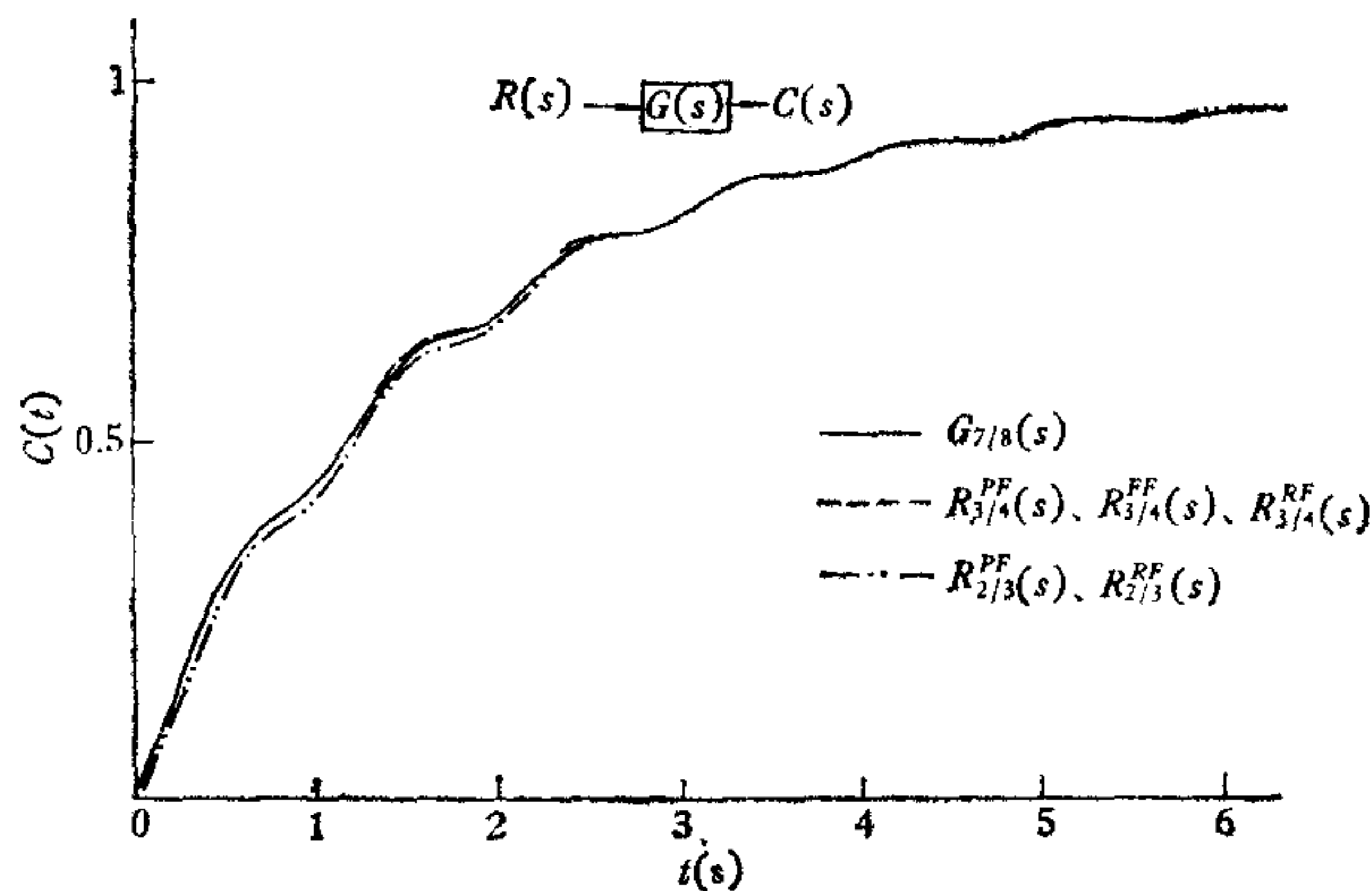


图 4 $G_{7/8}$ 及其 $R_{3/4}^{FF}$ 、 R^{PF} 、 R^{RF} 的单位阶跃响应

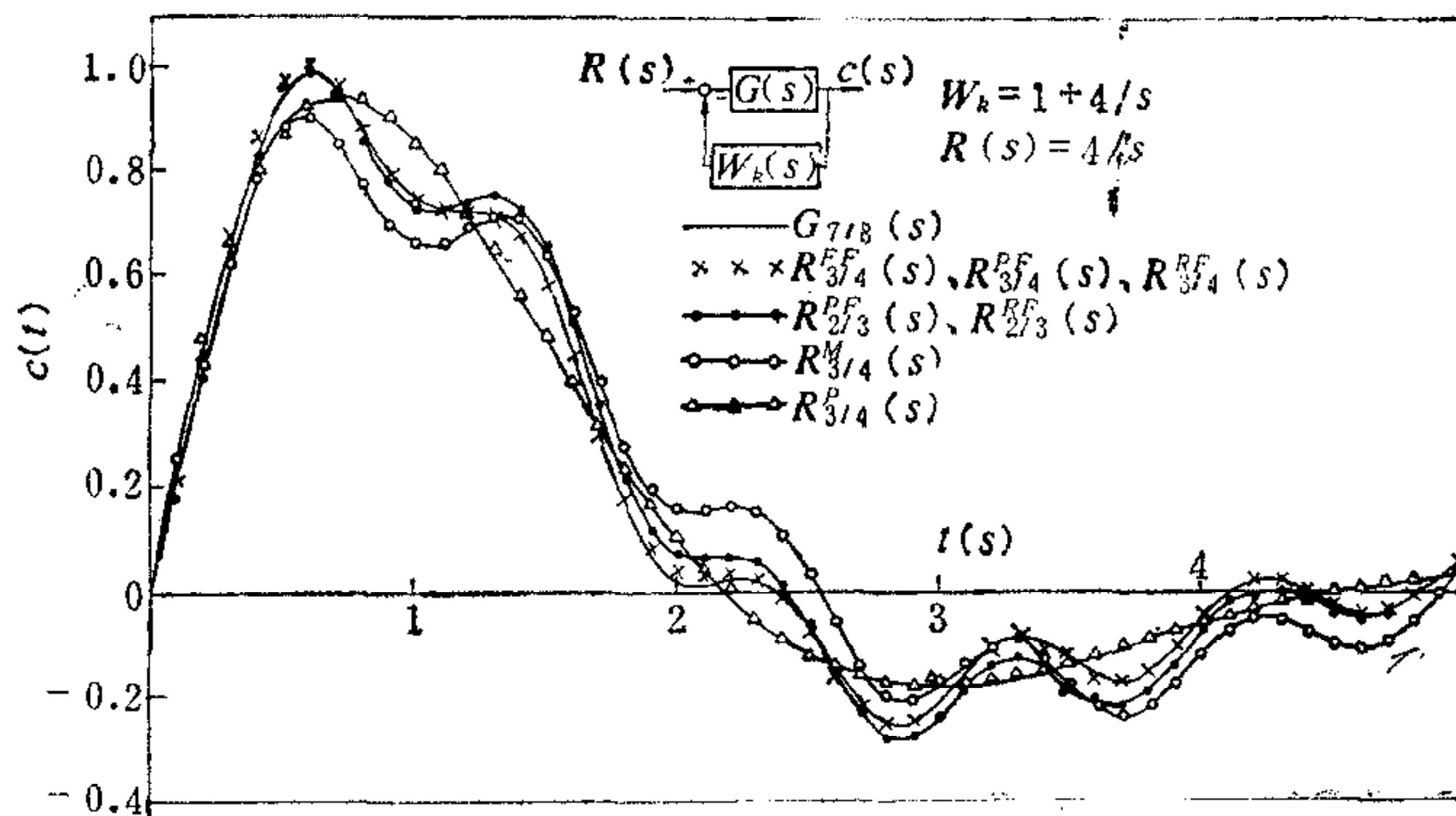


图 5 $G_{7/8}$ 及其各种降阶模型在 PI 调节下的闭环阶跃响应

注意低频端的逼近(只用了一个系数保证静态增益),使它在低频或直流信号作用下产生了较大误差(图 1,2).

4) 本文方法所得的几种降阶模型 $R_{3/4}^{PF}(s)$ 、 $R_{2/3}^{PF}(s)$ 、 $R_{3/4}^{FF}(s)$ 、 $R_{3/4}^{RF}(s)$ 、 $R_{2/3}^{RF}(s)$ 等,都用了四个系数来全面反映原型的中频振峰,其余四个(或两个)系数则用于低频拟合.这样分配“信息资源”比较经济合理,故能全面地近似原型(见图 3、4).比较它们的闭环响应曲线也可看出这种优点(见图 5).

特别值得指出的是本文提出的降阶模型 $R_{2/3}^{PF}(s)$ 和 $R_{2/3}^{RF}(s)$ 中没有保留原型中的任何实因子.它们阶次虽然很低(用四个系数保证主要振荡成份,两个系数作低频逼近),但无论从开环还是闭环特性看,仍然优于前人的 [3/4] 阶降阶模型.可以认为,这就是能够全面反映原型特性的最低阶次.由此可见,只有合理地安排和分配降阶模型的“有限信息资源”,才能以阶次尽可能低的近似模型最大限度地逼近高阶原型.

三、几种模型降阶的新方法

根据上节提出的“中、低频段分别处理”和“有限信息资源的合理分配”的原则,导出了几种更加完善的新方法.这些方法都有计算简单易行、使用灵活方便和能获得较高精度的突出优点,很适于工程上推广应用.这些方法是:

1. 部份分式法(用 PF 表示)

首先把原型分解为两个并联的子系统(用部份分式法),其中一个代表原型的主要中

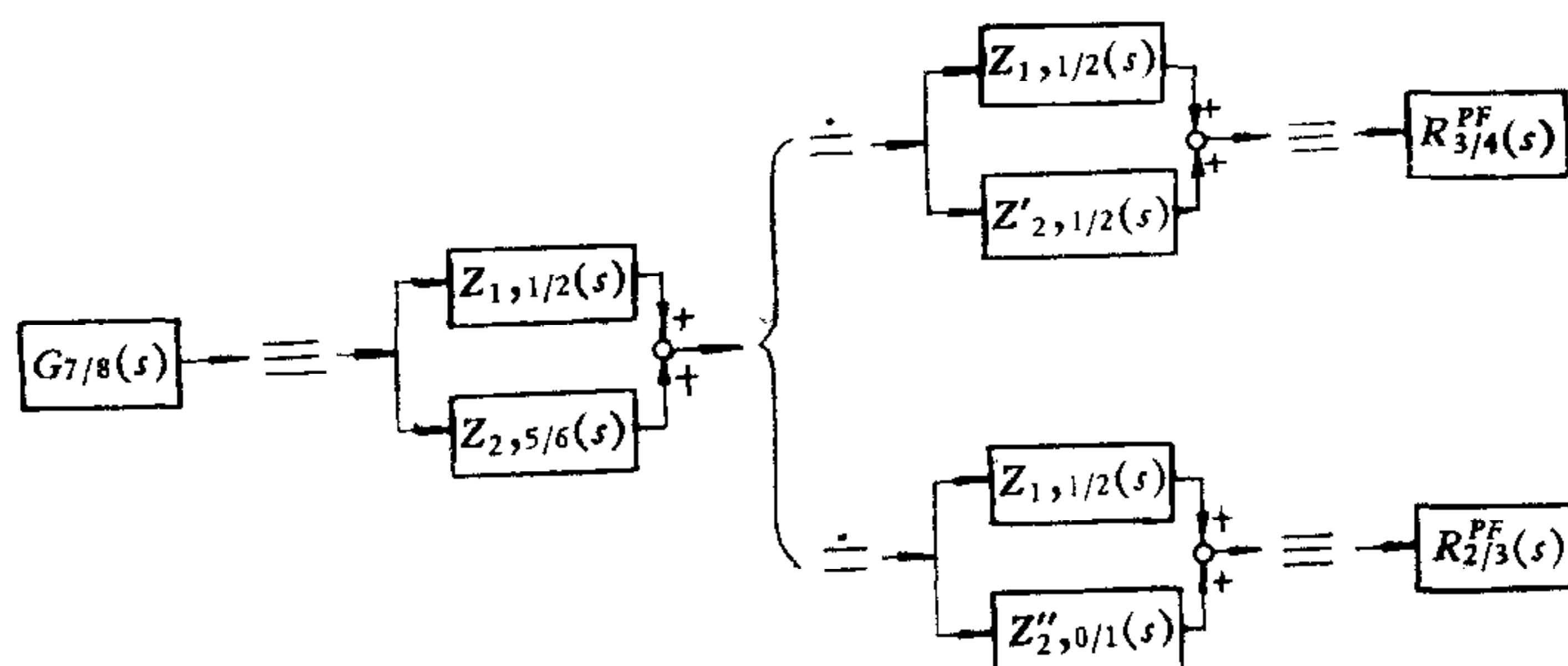


图 6 部份分式法降阶框图

频振荡成份,这部分不再简化;另一个代表原型的其他成分,对这个子系统用 Padé 法降阶,以逼近原型的低频特性。

图 6 的框图概括了本文例题的简化过程。

实际计算时并不需要算出第二个子系统的具体参数,只需计算其幂级数展开式(至第二项或第四项)即可。

设原型为

$$G_{7/8}(s) = \frac{1}{D_0(s)} \times \frac{A(s)}{C(s)} = Z_1(s) [\text{中频, } 1/2 \text{ 阶}] + Z_2(s) [\text{其他, } 5/6 \text{ 阶}]. \quad (3.1)$$

其中主要振荡成分的分母 $D_0(s)$ 为

$$D_0(s) = 1 + d_1s + d_2s^2 = 1 + 0.015098s + 0.021569s^2. \quad (3.2)$$

由部份分式法可得相应的分子项

$$Z_1(s) = (e_0 + e_1s)/D_0(s) = (0.02905 - 0.00336s)/D_0(s). \quad (3.3)$$

$$Z_2(s) = G_{7/8}(s) - Z_1(s) = [A(s)/C(s) - (e_0 + e_1s)]/D_0(s) \quad (\text{用长除法展开})$$

$$= 0.97095 - 1.703897s + 3.23059s^2 - 6.42284s^3 + \dots$$

$$\doteq \frac{0.97095(1 + 1.3792s)}{1 + 3.1341s + 2.1728s^2} = Z'_2(s) \quad (1/2 \text{ 阶 Padé 法近似式}) \quad (3.4)$$

$$\doteq \frac{0.97095}{1 + 1.7594s} = Z''_2(s) \quad (0/1 \text{ 阶 Padé 近似式}). \quad (3.5)$$

从而得出下面两个近似模型:

$$R_{3/4}^{FF}(s) = Z_1(s) + Z'_2(s)$$

$$= \frac{k'(s + 0.722)(s^2 + 3.6203s + 64.164)}{(s + 0.4764)(s + 0.966)(s^2 + 0.7s + 46.3625)} \quad (3.6)$$

和

$$R_{2/3}^{FF}(s) = Z_1(s) + Z''_2(s)$$

$$= \frac{k'(s^2 + 4.1380s + 66.456)}{(s + 0.5698)(s^2 + 0.7s + 46.3625)}. \quad (3.7)$$

2. FF—Padé 法(用 FF 表示)

即频率拟合——Padé 联合降阶法。这个方法用 Padé 法来保证低频特性,并在选定的两个频率点进行中频段的拟合。整个算法可以化成一个线性方程组,十分有利于程序设计,详见文献 [6]。

使用 FF—Padé 法的主要环节是如何选定两个关键的频率拟合点,以最好地体现原型的中频特性。一般说来,它们应该在中频振峰附近选择。(本文 $R_{3/4}^{FF}(s)$ 的两个拟合点为 $\omega_1 = 6.4\text{rad/s}$, $\omega_2 = 7.0\text{rad/s}$ 。

3. 保留主模式的 FF—Padé 法(用 RF 表示)^[11]

在某些情况下,为准确地反映原型的某些主要模式,可以将原型分解为两个串联的子系统:

$$G(s) = G_1(s) \times G_2(s). \quad (3.8)$$

其中 $G_1(s)$ 为希望完全保留的模式, $G_2(s)$ 为其他成份。用 FF—Padé 法将 $G_2(s)$ 简化为

$R_2(s)$, 则

$$R^{RF}(s) = G_1(s) \times R_2(s). \quad (3.9)$$

对于一个振荡成份, 如果保留了其主要复极点, 则振荡频率和阻尼已有保证, 余下的振幅和相位问题, 只需在峰值点拟合就行了. 这时可令

$$G_1(s) = 1/D_0(s) = (1 + d_1s + d_2s^2)^{-1}. \quad (3.10)$$

式中 $D_0(s)$ 见式 (3.2). 对 $G_2(s)$ 用 FF—Padé 法简化, 并在峰点 ($\omega_M = 1/\sqrt{d_2}$) 处与原型拟合. 由此得到两个不同阶次的降阶模型:

$$R_{3/4}^{RF}(s) = \frac{k'(s + 0.7326)(s^2 + 3.2728s + 61.835)}{(s + 0.4773)(s + 0.9847)(s^2 + 0.7s + 46.3625)} \quad (3.11)$$

和

$$R_{2/3}^{RF}(s) = \frac{k'(s^2 + 3.8315s + 63.61)}{(s + 0.5705)(s^2 + 0.7s + 46.3625)}. \quad (3.12)$$

四、结 语

对于复杂的高阶系统, 遵循中、低频段分别处理及充分注意合理分配和使用降阶模型的“有限信息资源”可以最大限度地使降阶模型的特性逼近原型. 本文据此提出的几种模型降阶新方法, 物理概念明确, 计算简单易行, 适合于工程应用.

参 考 文 献

- [1] 前田 肇, 大规模の線性システムの低次元モデルとシステムの構造, システムと制御, **22**, (1978), No. 11, 655—664.
- [2] 万百五、吴受章, 大系统的模型简化, 自动化学报, **6**, (1980), No. 1, 57—66.
- [3] 张启人, 大系统模型降阶理论, 信息与控制, **9**, (1980), No. 4, 2—25.
- [4] 钱钟韩、孟祖浩, 热工对象的低阶近似模拟, 自动化学报, **4**, (1966), No. 1, 1—17.
- [5] 周其鉴、李祖枢, 便于动态系统设计的模型降阶, 信息与控制, **11**, (1982), No. 2, 1—7.
- [6] 胡锡恒, 频率拟合——Padé 联合降阶, 信息与控制, **12**, (1983), No. 2, 1—8.
- [7] 胡锡恒, 一类含幅、相等式的非线性方程组的线性化及其应用, 应用数学与力学, **3**, (1983), No. 4, 519—527.
- [8] Graham, P. J. and Shamash, Y., Critical Review of Methods for Deriving Stable Reducedorder Models, *6th IFAC Symp. Identification and system Parameter Estimation, June, 1982, U.S.A.*
- [9] Shieh, L. S. et al., Two Methods for Simplifying Multivariable System with Various Numbers of Inputs and Outputs, *Int. J. Systems Sci.*, **7**, (1976), 501—512.
- [10] Marshall, S. A., The Design of Reducedorder Systems, *Int. J. Contr.*, **31**, (1980), 677—690.
- [11] 胡锡恒, 保留主模式的 FF—Padé 降阶法, 信息与控制, **14**, (1985), No. 1.

AN INVESTIGATION ON THE MECHANISM AND TECHNIQUE OF ORDER-REDUCTION OF MATHEMATICAL MODELS

QIAN ZHONGHAN

(*Nanjing Institute of Technology*)

ZHOU QIJIAN

(*Chongqing University*)

HU XIHENG

(*Guizhou Institute of Technology*)

ABSTRACT

In this paper an attempt is made to probe into both the mechanism and some new computational methods of model-reduction. The principle of an optimal allotment of information resources in a reduced-order model and the technique of separate treatment for middle-frequency and low-frequency ranges are presented. Several methods and algorithms based upon these concepts are offered. Results of computation show convincingly that these new methods of model-reduction are superior to the current methods from the point-of-view of a better similitude to the original model over a wide range of frequency. They are also simple to use and versatile in engineering application.

一九八五年第五届全国系统仿真学术会议 征文通知

中国宇航学会空间控制及计算机应用专业委员会、中国自动化学会系统仿真专业委员会和中国航空学会控制专业委员会仿真学组，定于一九八五年十月联合召开一九八五年第五届全国系统仿真学术会议。

征文范围为：模型建立及仿真方法，仿真中的误差分析及可信度研究，连续系统仿真，离散事件系统仿真，仿真实验、研究型及训练仿真器，并行处理、专用仿真计算机的硬件及软件，仿真在工程系统中的应用，仿真在社会、经济、生物、生态系统中的应用，仿真研究中的专家系统。

应征论文作者必须先写一个 500—700 字的摘要，于一九八五年二月十五日前寄会议联络处（北京 2729 信箱倪彦勤或北京 842 信箱吴连伟同志收）。作者在收到初步接受通知后于一九八五年五月一日前将全文寄大会联络处。一九八五年六月十五日发出最后接受通知。

凡在全国性刊物或会议上发表过的论文不再征集。请自留底稿，录用与否一律不退。