

# 最优线性控制系统的计算机辅助设计

王 钦 友

(陕西机械电气研究所)

## 摘 要

本文阐述了满足二次型性能指标和时域性能指标的最优线性定常系统计算机辅助设计的方法,介绍了CAD程序包的功能以及用于求解最优系统的谱因子分解算法。设计的实例表明,所设计的系统具有良好的性能。

设计线性定常系统,可以运用多种多样的方法。本文采用了双指标设计法,即要求所设计的系统同时满足二次型性能指标和时域性能指标。这种设计法的特点是能够将最优系统的设计与其时域性能联系起来,从而使设计的系统更适合于实际需要。

## 一、系统设计指标

### 1. 二次型性能指标

设系统的参考输入为  $r(t)$ , 系统误差为  $e(t)$ , 加到给定的控制对象  $G(s)$  的控制量为  $u(t)$ 。在特定的  $q$  值条件下,能使指标泛函<sup>[1]</sup>

$$J = \int_0^{\infty} [qe^2(t) + u^2(t)] dt \quad (1-1)$$

达到极小值的系统称为最优系统 I。

根据二次型性能指标  $J$ , 运用极值原理可以求出其对应的最优系统 I 的传递函数<sup>[2]</sup> 为

$$\Phi_I(s) = \frac{q}{r(s)} \left\{ \frac{G^N(-s)r(s)}{D(-s)} \right\}^+ \frac{G^N(s)}{D(s)}. \quad (1-2)$$

式中  $r(s)$  是参考输入  $r(t)$  的象函数;  $D(s)$  是方程

$$D(s)D(-s) = qG^N(s)G^N(-s) + G^D(s)G^D(-s) \quad (1-3)$$

的一个解。其中  $G^N(s)$  和  $G^D(s)$  分别为  $G(s)$  的分子和分母多项式,

$$\left\{ \frac{G^N(-s)r(s)}{D(-s)} \right\}^+$$

表示  $G^N(-s)r(s)/D(-s)$  展开式中极点位于  $s$  左半平面的有理分式之和。

### 2. 时域性能指标

能够满足给定的时域性能指标的最优系统 I 称为最优系统 II, 简称最优系统。

设给定的  $p$  个时域性能指标为  $J_i$ , 则最优系统 II 可以表示为

$$\Phi_{II}(s) = \Phi_I(s) \{ \varphi_i \leq J_i, i = 1, 2, \dots, p \}. \quad (1-4)$$

其中  $\varphi_i$  表示最优系统 I 所对应的时域性能参数。

系统的时域性能指标可以根据实际需要进行选择。本文选用了常用的几项指标, 即  $M_p$  (超调量)、 $t_r$  (上升时间)、 $t_s$  (过渡过程时间或调整时间)、 $N_s$  (瞬态振荡次数)、 $e_r$  (系统允许误差) 和  $u_m$  (控制量峰值)。

## 二、系统设计方法

### 1. 最优系统 I 的设计方法

根据最优系统 I 的特性, 可以将其传递函数分为两个部分, 即

$$\Phi_I(s) = F_0(s)\Phi_0(s). \quad (2-1)$$

其中

$$F_0(s) = \frac{Kq}{r(s)} \left\{ \frac{G^N(-s)r(s)}{D(-s)} \right\}^+, \quad (2-2)$$

$$\Phi_0(s) = \frac{G^N(s)}{KD(s)} \quad (2-3)$$

分别为  $\Phi_I(s)$  的辅部和主部。K 是选择主部和辅部形式的待定常数。在设计过程中分别计算  $\Phi_I(s)$  的主部和辅部, 可以减少设计工作量。最优系统 I 的设计过程如图 1 所示。

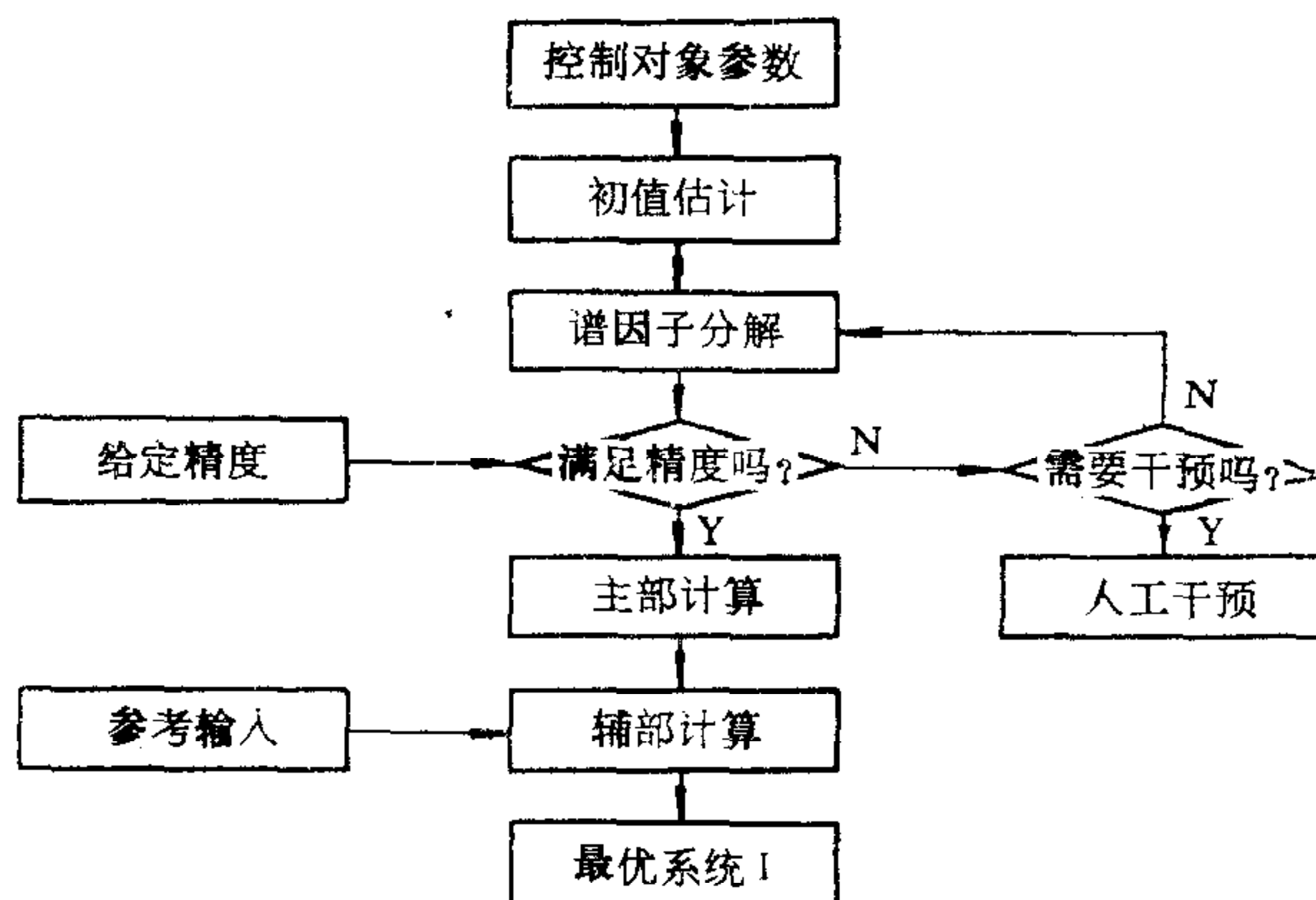


图 1 最优系统 I 的设计过程

至于系统的参考输入, 可以按实际情况选择常用的阶跃、斜坡、抛物线及正弦等函数。

### 2. 谱因子分解法

最优系统 I 的计算要用到多项式  $D(s)$ 。通过方程 (1-3) 求解  $D(s)$  即是所谓谱因子分解。下面介绍用改进的牛顿法<sup>[3]</sup>进行谱因子分解的算法。

设  $D(s)$  的  $s^i$  项系数为  $x_i$ , 令

$$\begin{cases} f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j x_{2i-j} x_j, \\ c_i = \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j (q g_{2i-j}^N + g_{2i-j}^D), \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2-4)$$

则求解向量  $\mathbf{x}$  的非线性方程为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}, \quad (2-5)$$

也可写成

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2-6)$$

式中

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}. \quad (2-7)$$

其中  $g_i^N$  和  $g_i^D$  分别为  $G^N(s)$  和  $G^D(s)$  的  $s^i$  项系数.

$\mathbf{y}(\mathbf{x})$  的 Jacobian 矩阵为

$$D[\mathbf{y}(\mathbf{x})] = 2 \cdot \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & -x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^n x_n \end{bmatrix}. \quad (2-8)$$

根据  $D[\mathbf{y}(\mathbf{x})]$  右上角和左下角的许多元素为零的特点,可以用较小的计算量将其化为下三角矩阵  $U(\mathbf{x})$ . 为防止  $U(\mathbf{x})$  降秩,可对其主对角线元素作如下处理:

$$u_{ii}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_{ii}(\mathbf{x}) & (|u_{ii}(\mathbf{x})| \geq \varepsilon) \\ \varepsilon & (|u_{ii}(\mathbf{x})| < \varepsilon), \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2-9)$$

在用行线性变换将  $D[\mathbf{y}(\mathbf{x})]$  化为  $U(\mathbf{x})$  的同时,也用行线性变换将  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  化为  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . 令

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = U^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2-10)$$

于是得到了求解  $\mathbf{x}$  的迭代公式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \omega_k \mathbf{z}_k, \\ \omega_k = \begin{cases} \omega \left\{ \min_{\omega \in [\omega_0, \omega_1]} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}_k - \omega \mathbf{z}_k)\| \right\}, & (\|\mathbf{y}_k\| \geq M), \\ 1, & (\|\mathbf{y}_k\| < M). \end{cases} \end{cases} \quad (2-11)$$

其中  $\varepsilon$  和  $M$  分别为给定的较小的正数和较大的正数;  $\omega_0$  和  $\omega_1$  为  $\omega$  的取值范围.

迭代公式 (2-11) 对初值  $\mathbf{x}_0$  的要求不苛刻,因此初值可由计算机粗略地估计给出.

上述谱因子分解算法的主要特点是收敛速度快,计算精度高,且无须使用者提供迭代初值.

### 3. 最优系统 II 的设计方法

最优系统 II 的设计,采用调整  $q$  值以使最优系统 I 满足时域性能指标的方式进行. 设计过程如图 2 所示.

设计最优系统 II 的主要工作量在于系统时域数字仿真. 为了提高设计效率,本文采用了一种速度快精度高的仿真方法——等效转移法进行系统数字仿真.

### 4. 系统补偿器的设计方法

在最优系统计算完成后,还应设计相应的补偿器(或校正器),以便与  $G(s)$  连接构成最优控制系统. 这里采用了复合校正、串联校正、输出反馈校正、状态反馈校正和部分状态反馈校正等补偿方式. 设置多种补偿方式的目的是为了便于设计者选择使用. 关于反



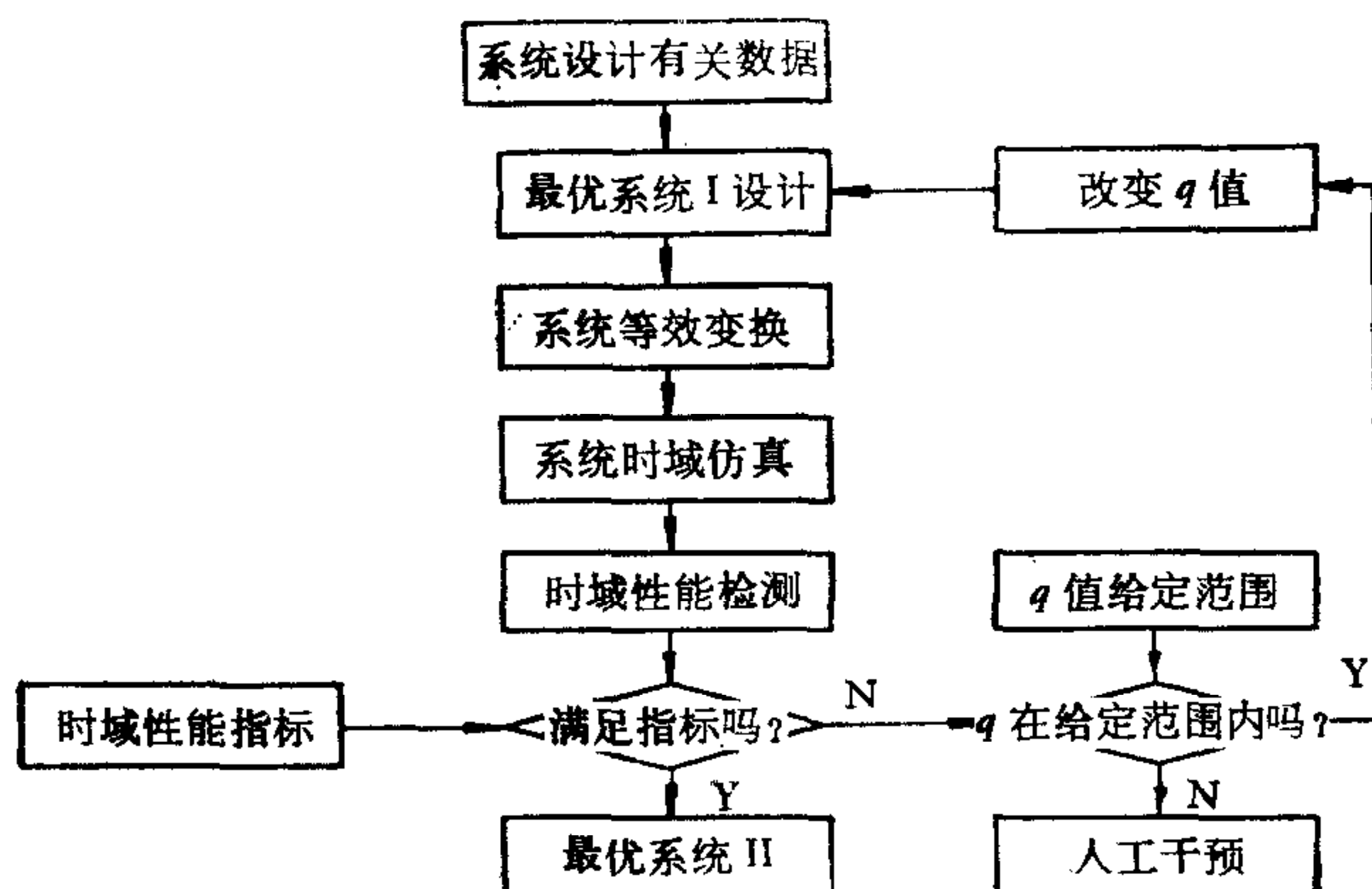


图 2 最优系统 II 的设计过程

馈补偿器的计算法,可参见文献 [1].

### 三、程序结构及功能

本文中 CAD 程序的主要作用限于两个方面: 一是由计算机完成系统设计过程中的

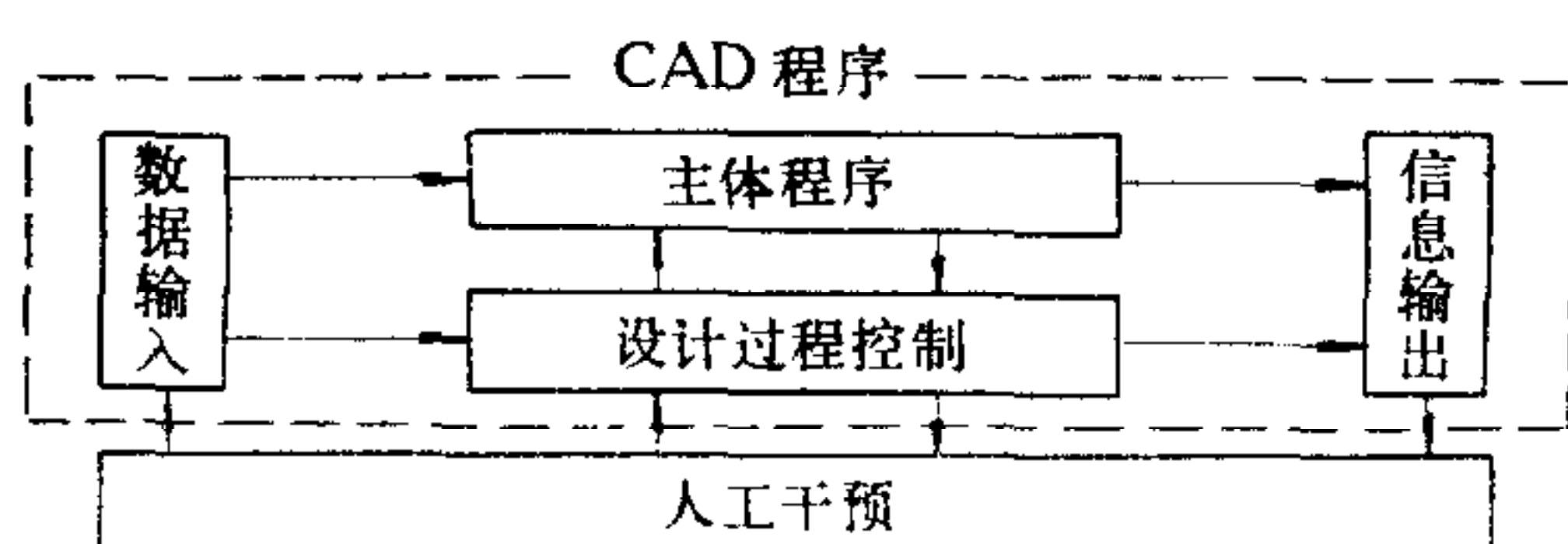


图 3 程序结构示意图

数据计算和处理工作; 二是建立设计过程中的人机对话通道(主要用于人工干预)。图 3 是程序结构的示意图。

程序各部分的基本功能如下:

1) 数据输入。数据输入包括被控装置参数、设计指标及要求和控制命令的输入。

若设计者不准备干预设计过程,则 CAD 程序可以自动完成全部设计工作。

2) 主体程序。主体程序是 CAD 程序的主要部分,它由十几个具有各种功能的子程序组成,基本作用是完成设计中的数据处理和计算工作。

3) 设计过程控制。设计过程控制的作用是按照控制命令完成设计过程中的管理工作,并建立人工干预通道。

4) 信息输出。在设计过程中出现异常情况时,输出有关信息,以便人工干预;设计结束后输出设计结果,如各种数据、图表及有关信息。

5) 人工干预。当设计者认为有必要干预设计过程时,可以进行人工干预。人工干预的方式有两种:一种是定点干预,另一种是随时干预。

上述 CAD 程序包的特点是功能较多,效率较高,使用方便。此程序可以以较快的速度完成 20 阶以下的线性定常系统的最优设计工作。

### 四、系统设计举例

下面介绍一个设计控制系统的例子。

设控制对象为

$$G(s) = \frac{1600.074}{(0.08s + 1)(0.6s + 1)s}$$

设计要求是  $q \leq 10$ ,  $e_r = 2\%$ ,  $M_p \leq 15\%$ ,  $t_s \leq 0.3(\text{sec.})$ ; 参考输入为单位阶跃函数; 按控制对象结构设计状态反馈补偿器; 输出系统的传递函数及响应曲线。

设计结果如下: 最优系统传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{3577.7655}{0.048s^3 + 4.1s^2 + 171.2854s + 3577.7655}$$

最优系统时域性能为  $e_r = 2\%$ ,  $M_p = 7.85\%$ ,  $t_r = 0.08(\text{sec.})$ ,  $t_s = 0.165(\text{sec.})$ ,  $N_s = 0.5$  (次),  $u_m = 0.91$ 。最优系统补偿方式及补偿器参数见图 4。最优系统响应曲线见图 5。

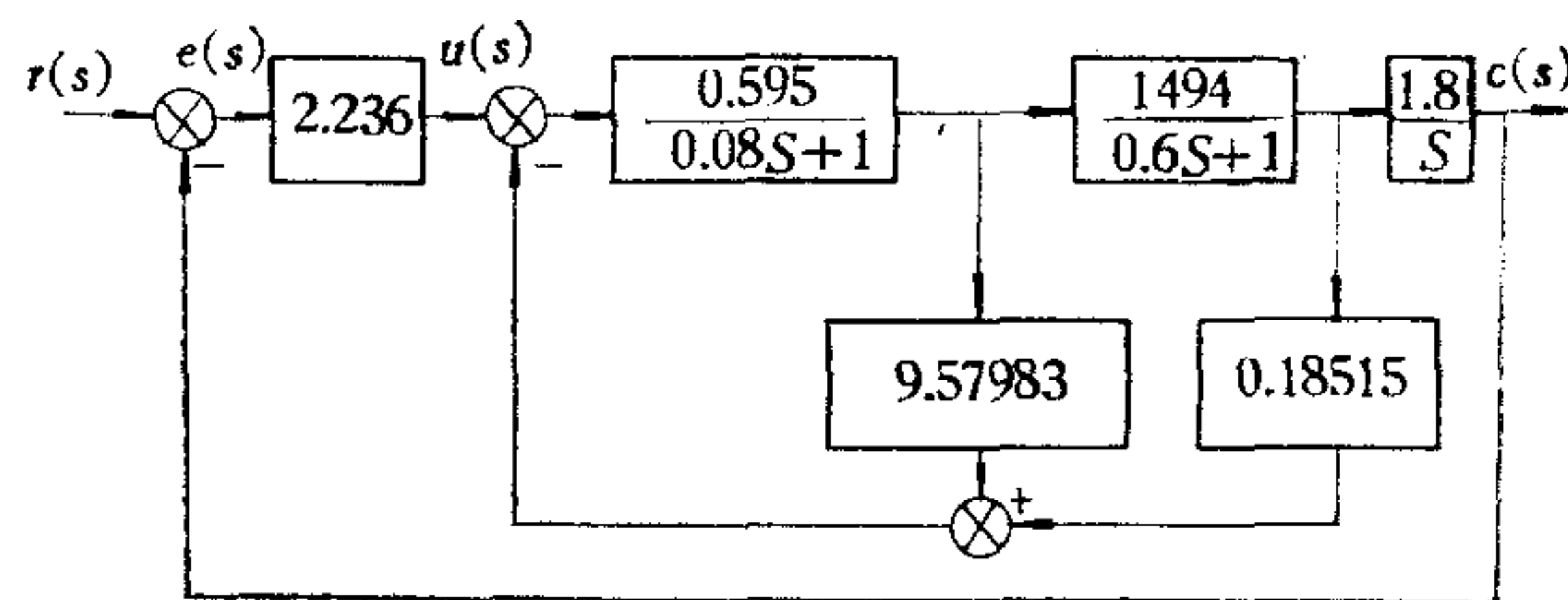


图 4 最优系统补偿方式及补偿器参数

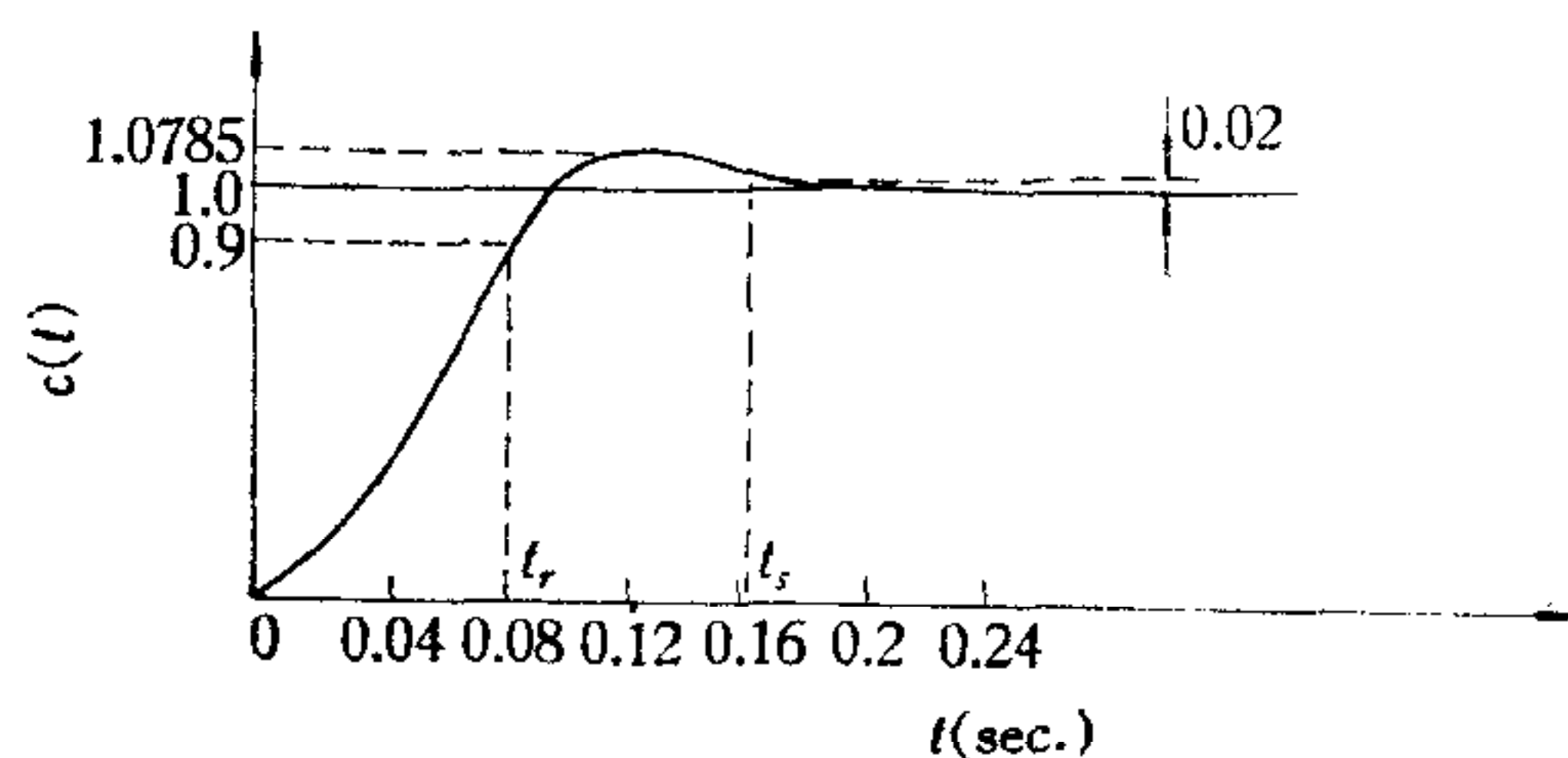


图 5 最优系统时域响应曲线

从以上设计结果可以看出, 用这个 CAD 程序包所设计的系统具有良好的响应特性。这些特性的突出之点在于系统的过渡过程时间短, 且超调量较小。

## 五、结 束 语

单变量线性定常系统关于二次型性能指标的设计方法很多, 本文选用了谱因子分解的方法。这种方法的主要特点是可以直接求出最优系统的传递函数。本文对这一算法进行了改进, 从而较好地解决了谱因子分解的算法问题。

在实际应用控制系统时, 使用者常常关心系统的时域性能指标。本文采用系统时域数字仿真的方法获得较准确的系统时域性能参数, 然后对这些参数进行约束设计。这样, 就将系统的最优设计与时域性能指标结合了起来, 使所设计的系统具有较强的适用性。

文中介绍的 CAD 程序是根据实际需要设计的, 主要特点是简明、易行、实用, 且适合于在中小型计算机以及微型计算机上使用。

在撰写本文时曾得到北京工业学院王子平教授、胡祐德副教授等老师的指导,在此深表谢意.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Chen C.T., *Analysis and Synthesis of Linear Control Systems*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
- [ 2 ] Chang S. S. L., *Synthesis of Optimal Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [ 3 ] 王德人, *非线性方程组解法与最优化方法*, 人民教育出版社, 1979.

## COMPUTER-AIDED DESIGN OF OPTIMUM LINEAR CONTROL SYSTEMS

WANG QINYOU

*(Shaanxi Institute of Mechanical and Electrical Engineering)*

### ABSTRACT

In this paper a computer-aided design method for optimum linear time-invariant systems satisfying both quadratic performance index and time-domain performance index is described. The function of CAD program package as well as the algorithm of spectral factoring to solve optimum systems are presented. An example of system design shows that the designed system has achieved good performance.