第 11 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 2
1985 年 4 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1985

反馈系统的无源性分析及其应用

冯 纯 伯
（南 京 工 学 院）

摘 要

文中给出了反馈系统为严格无源的条件及绝对稳定性的新判据；提出了设计模型参考自适应控制系统的新方案，该方案使系统具有强的鲁棒性；最后讨论了随机系统参数递推估算的综合方法.

对于因果动态系统，系统的无源性、正实性、超稳定性是等价的[1]. 本文将按文献 [1] 的定义讨论动态系统的无源性. 动态系统的无源性分析对于绝对稳定性的研究、最优控制、自适应系统的设计等均有重要意义. 本文首先给出反馈系统为严格无源的条件，然后讨论在几个重要领域中的应用.

一、反馈系统的无源性

1. 动态系统无源性的定义

首先按文献 [1] 来定义. $\mathscr{H}$ 表示内积函数空间 $\{f:\mathscr{T}\to\mathscr{U}|\langle f|f\rangle<\infty\}$，其中 $\mathscr{T}$ 表示时间；$\mathscr{U}$ 为线性空间. $\mathscr{H}_e$ 为扩展了的内积函数空间，函数在 T 时刻截尾. 以 H 代表线性或非线性系统的算子，设 $H:\mathscr{H}_e\to\mathscr{H}_e$，系统的输入为 u，输出为 x，记

$$\langle u|x\rangle_T=\int_0^T u(t)x(t)dt.$$

在初值为零时有

$$\langle u|Hu\rangle_T\geqslant\delta\|u(T)\|^2+\beta,\quad\forall u\in\mathscr{H}_e,\ \forall T\in\mathscr{T},\tag{1}$$

$$\delta=\sup\{\delta\in R_+|\exists\beta\ 使得\ (1)\ 式成立\}.$$

若 $\beta=\text{const}$，$\delta\geqslant0$，则称 H 为无源的；若 $\delta>0$，则称 H 为严格无源的. 因 H 稳定，输入 u 和输出 x 之间有对应关系，于是 (1) 式在 $\delta>0$ 的条件下还可表示为

$$\langle u|Hu\rangle_T\geqslant\varepsilon\|x(T)\|^2+\beta,\tag{2}$$

其中 ε 存在并为正.

2. 反馈系统的无源性

反馈系统的方程为

$$u-v=e,\quad H_1e=x,\quad H_2x=v.\tag{3}$$

本文于 1983 年 6 月 16 日收到.

设 $H_1, H_2: \mathscr{H}_e \to \mathscr{H}_e$. 于是对此系统有

$$\langle u|x\rangle_T = \langle e + H_2x|x\rangle_T = \langle e|x\rangle_T + \langle H_2x|x\rangle_T \geqslant \delta_1\|e(T)\|^2 + \delta_2\|x(T)\|^2 + \beta. \tag{4}$$

若 δ_1 和 δ_2 均为负,则此系统显然不是无源的;若 δ_1 和 δ_2 均为正,则此系统显然是严格无源的. 这是已有结果. 不再讨论.

当 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 < 0$, 即 H_1 严格无源、H_2 非无源时,因 $\delta_1 > 0$, 故存在正的 ε_1, 可将(4)式改写为

$$\langle u|x\rangle_T \geqslant \delta_1\|e(T)\|^2 + \delta_2\|x(T)\|^2 + \beta = (\varepsilon_1 + \delta_2)\|x(T)\|^2 + \beta. \tag{5}$$

上式表明若 $\varepsilon_1 + \delta_2 > 0$, 则反馈系统(3)严格无源,就是说以下定理成立.

定理 1. 对于反馈系统(3), 在 H_1 严格无源、H_2 非无源时, 若 $\varepsilon_1 + \delta_2 > 0$, 则此系统严格无源.

定理 1 表明若直输迴路 H_1 的正的无源度足以补偿反馈迴路 H_2 的负的无源度, 则全系统仍可保持为严格无源.

根据定理 1, 以下推论显然成立:

推论. 若反馈迴路 H_2 是无源的, 则反馈系统(3)严格无源的充要条件是直输迴路 H_1 为严格无源.

这一推论和 V. M. Popov 的超稳定性判据[2]完全一致. 就是说超稳定判据只是定理 1 的特例. 定理 1 拓宽了 V. M.Popov 的结果. 这一拓宽对于应用十分有利.

二、绝对稳定性

绝对稳定性问题是讨论图 1(a) 所示非线性系统的稳定性. 图中 $H(s)$ 表示线性稳定系统的传递函数;N 为单值非线性算子,其特性在第 1、3 象限内,并满足方程

$$[N(v) - \alpha v][N(v) - \beta v] \leqslant 0, \qquad \beta > \alpha \geqslant 0 \tag{6}$$

或

$$(\alpha + \beta)vN(v) \geqslant \alpha\beta v^2 + N^2(v). \tag{7}$$

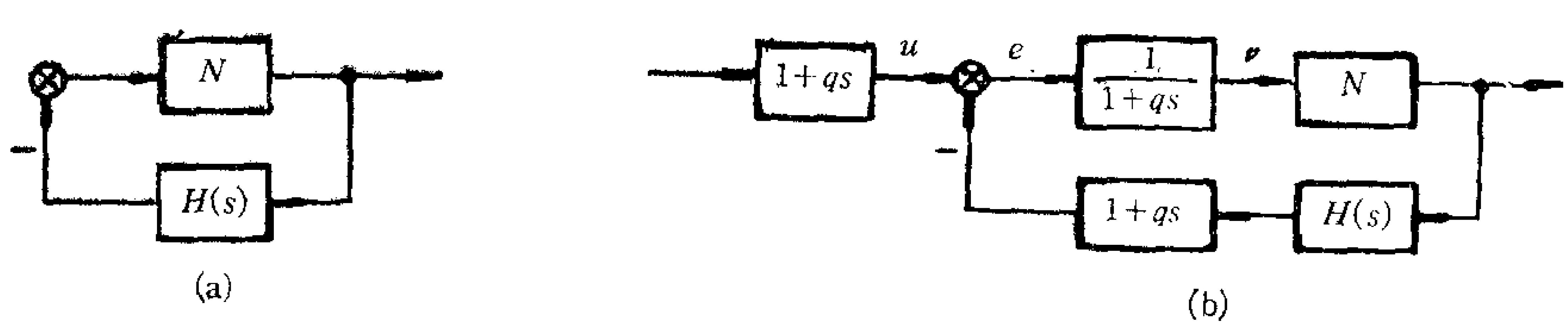


图 1

在文献[2]中, V. M. Popov 把绝对稳定性的分析纳入反馈系统的超稳定性的分析之中,绝对稳定性的条件就是系统超稳定的条件. 前已说明超稳定性和严格无源性等价, 这里按反馈系统的无源性来研究这一问题.

仿照文献[1], 把图 1(a) 所示系统转化为图 1(b) 所示系统, 并引入算子 $(1 + qs)$, 目的在于将非线性迴路所包含的信息更充分地挖掘出来. 以便使求得的稳定性的充分条

件更接近于充要条件．现在按图 1(b) 所示系统进行分析．只要 $u \longmapsto \langle u|x\rangle_T$ 为严格无源，则全系统绝对稳定．下面分别计算直输迴路和反馈迴路的无源度．由图 1(b) 可写出

$$\langle e|x\rangle_T = \left\langle v + q\frac{dv}{dt}\middle| N(v)\right\rangle_T = \int_0^T vN(v)dt + q\int_0^T N(v)dv. \tag{8}$$

利用式 (7) 并考虑到 $N^2(v) \leqslant \beta^2 v^2$，于是可得

$$\int_0^T vN(v)dt \geqslant \frac{1}{\beta}\int_0^T N^2(v)dt \geqslant \frac{1}{\beta}x^2(T). \tag{9}$$

已知非线性特性在第 1，3 象限内，当系统初值为零时有

$$\int_0^T N(v)dv \geqslant \int_0^T \alpha v dv = \frac{1}{2}\alpha v^2\Big|_0^T \geqslant \frac{\alpha}{2\beta^2}x^2(T). \tag{10}$$

将式 (9)，(10)，代入式 (8)，最后得到

$$\langle e|x\rangle_T \geqslant \frac{2\beta + \alpha q}{2\beta^2}x^2(T). \tag{11}$$

注意，上式是以输出 $x(T)$ 来估算直输迴路的无源度的．

根据文献 [1] 线性反馈迴路以其输入 $x(T)$ 计算的无源度为 $Re[(1 + jq\omega)H(j\omega)]$，$\forall\omega \in R$．于是根据定理 1 $u \longmapsto \langle u|x\rangle_T$ 严格无源的条件为

$$\frac{2\beta + \alpha q}{2\beta^2} + Re[(1 + jq\omega)H(j\omega)] > 0,\ \forall\omega \in R, \tag{12}$$

这就是系统绝对稳定的充分条件．

以上论述可归结为以下定理：

定理 2. 对于图 1(a) 所示系统，若非线性特性满足 (6) 式，线性特性 $H(s)$ 稳定，则此系统绝对稳定的充分条件是存在实数 q，使得 (12) 式成立．

若 $\alpha = 0$，则 (12) 式化为

$$\frac{1}{\beta} + Re[(1 + jq\omega)H(j\omega)] > 0, \quad \forall\omega \in R. \tag{13}$$

这就是有名的 Popov 判据，它只是定理 2 的特例．

三、模型参考自适应控制系统的设计

模型参考自适应系统是近年来文献中讨论较多的问题之一．人们注意的一个主要问题是如何保证整个系统是全局渐近稳定的，为此可以利用 Ляпунов 函数法或 V. M. Popov 的超稳定理论．迄今为止，按这两种理论所得参数的自适应调节规律基本相同[3]．这类系统的基本形式如图 2(a) 所示． 图 2(b) 是图 2(a) 所示系统的误差模型[4]． 图中 $\tilde{\theta}(t)$ 表示需调整的控制器的参数误差向量，它由 k_0，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 相对于其匹配值的误差组成．向量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 由 $r(t)$，$\boldsymbol{\phi}^{(1)}(t)$，$\boldsymbol{\phi}^{(2)}(t)$ 等组成． G 为对称正定增益阵． 当被调系统和参考模型 $W_m(s)$ 匹配时，$e(t) = 0$．

对此系统有

$$\langle e| - r\rangle_T = \int_0^T e(t)\boldsymbol{\phi}^T(t)\int_0^t G\boldsymbol{\phi}(\tau)e(\tau)d\tau dt \geqslant 0. \tag{14}$$

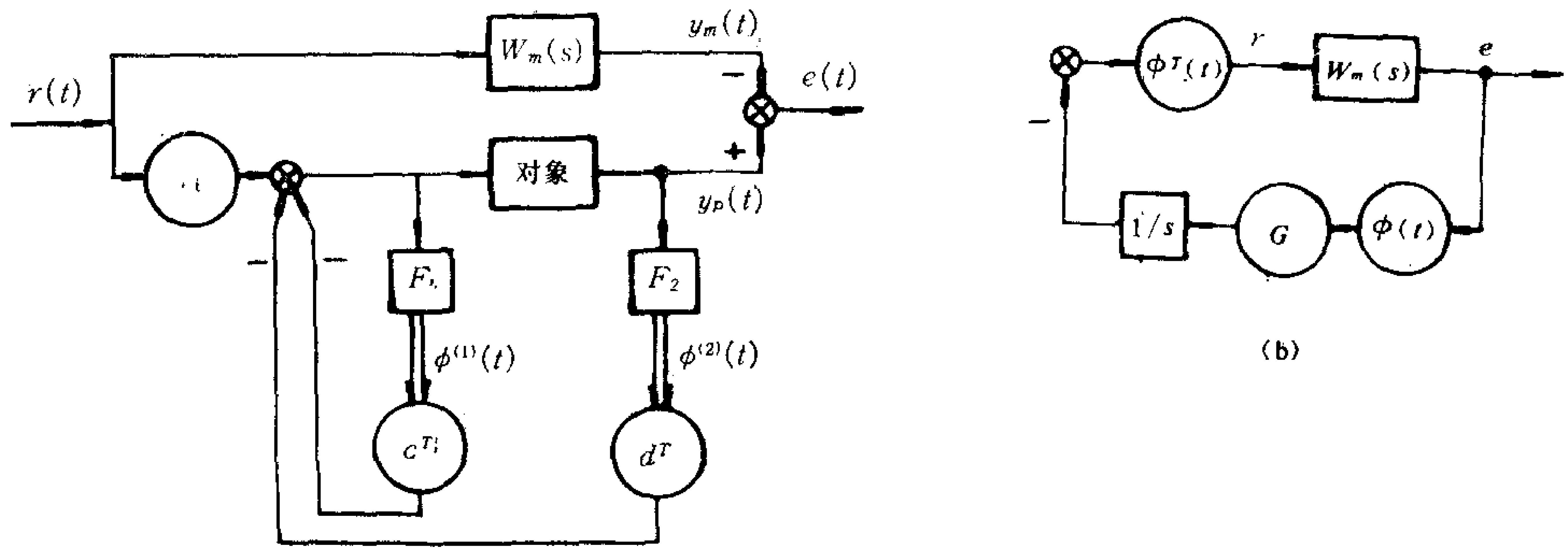
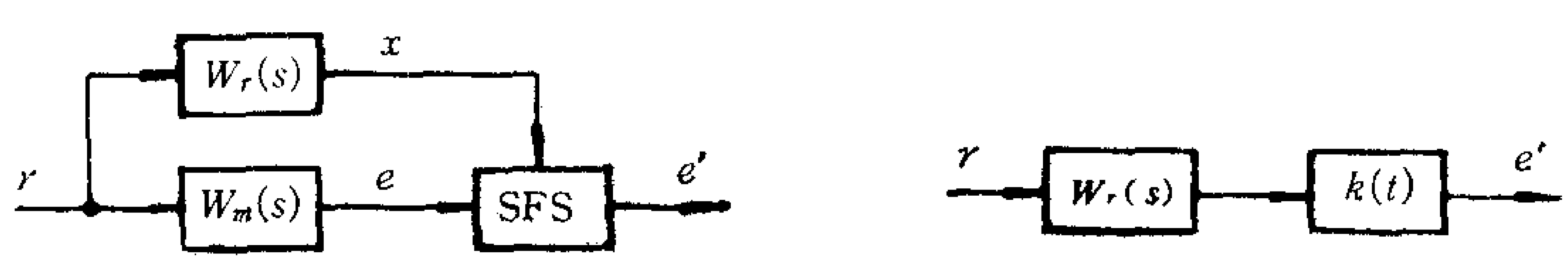


图　2

因 $G = G^T > 0$，所以 (14) 式成立．根据定理 1 的推论，若 $W_m(s)$ 严格无源，则图 2 所示系统严格无源，系统渐近稳定．以上结论在文献中早有证明．

按图 2(a) 所示结构只要取 $W_m(s)$ 分子分母的阶次和对象相同，则在参数 k_0，$\mathbf{c}$，$\boldsymbol{d}$ 等匹配的情况下就可使 $e(t) = 0$．但若被控对象的零极点数之差大于 1，则按图 2(a) 所示结构不能取 $W_m(s)$ 为严格无源．为了仍使所选的参考模型 $W_m(s)$ 严格无源，需要采用一些特殊的控制结构，如文献 [4] 所示．这类控制系统的结构比较复杂．如仍然采用图 2(a) 所示简单的控制结构，$W_m(s)$ 不一定严格无源．为保证全系统全局渐近稳定，需要有一种办法使误差模型中的非严格无源的直输迴路严格无源化．这里介绍一种简单可行的办法，如图 3(a) 所示系统，图中 $W_m(s)$ 稳定但不一定严格无源，$W_r(s)$ 为一严格无源系统．SFS 代表一符号跟随系统，由一符号比较设备及理想开关组成，能保证 e' 的符号和 x 总是相同的．于是图 3(a) 所示系统可用图 3(b) 所示等价系统代表，其中 $k(t)$ 为一非负有界增益．因 $W_r(s)$ 严格无源，$k(t)$ 不负，由图 3(b) 所示等价系统，可以看出 SFS 系统确实使系统严格无源化．



(a)

图　3

现在采用 SFS 系统设计稳定的模型参考自适应控制系统．采用图 4(a) 所示结构，对应的误差模型如图 4(b) 所示．用以调节参数的误差信号是 e'，不是 e．e' 的符号和 $W_r(s)$ 的输出完全一致，$\langle r | e' \rangle_T$ 已为严格无源，因此系统是全局渐近稳定的．

图 4(a) 所示系统除结构简单而外，还有一个重要的优点，即在 $W_r(s)$ 和 $W_m(s)$ 的分母不同阶时，仍可照样保证全局稳定．Athans 等[5]指出，当对象特性和 $W_m(s)$ 不完全同阶时(例如对象特性中有寄生高频部分，$W_m(s)$ 只和对象的降阶简化模型匹配)，文献中现有的参数自适应规律不足以保证系统全局稳定．这一结论可解释为：在 $W_m(s)$ 的阶次和对象的阶次不一样时，误差模型中的 $W'_m(s)$ 不可能和 $W_m(s)$ 相同，即使 $W_m(s)$ 是

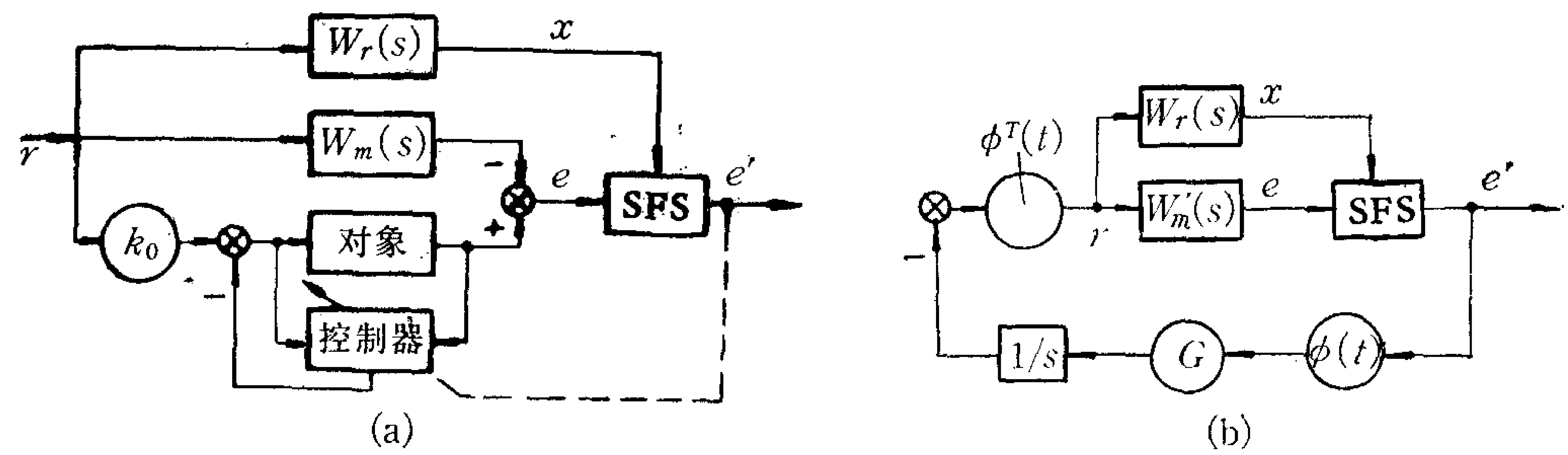


图　4

严格无源(正实)的，$W_m'(s)$ 也不一定是严格无源，因此全局稳定问题没有解决．如采用符号跟随系统总可以使 $\langle e'|r\rangle_T$ 严格无源，这就解决了这一矛盾，从而提高了模型参考自适应系统的鲁棒性．

四、随机系统参数递推估算的综合

Landau[6] 指出，许多随机系统的参数估算器或自适应控制器的参数递推算法可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)+F_k\boldsymbol{\phi}(k)v(k+1),\\&F_{k+1}^{-1}=F_k^{-1}+\alpha(k)\boldsymbol{\phi}(k)\boldsymbol{\phi}(k)^T,\ F_0>0,\ 0<\alpha(k)<2,\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ 为被估参数向量；F_k 为自适应增益矩阵；$\boldsymbol{\phi}$ 称为量测向量或回归向量，决定于估算器或控制器的具体结构；$v(k+1)$ 为残差或增广误差，可表示为

$$\left.\begin{aligned}&v(k+1)=H(q^{-1})\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)^T\boldsymbol{\phi}(k)+\omega(k+1),\\&\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)=\boldsymbol{\theta}^*-\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1).\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{\theta}^*$ 为匹配的真实参数向量；ω 为白色噪音；$H(q^{-1})$ 决定于系统结构和噪音模型；q^{-1} 表示延滞一步算子．根据 (15)，(16) 两式可得图 5(a) 所示结构图．

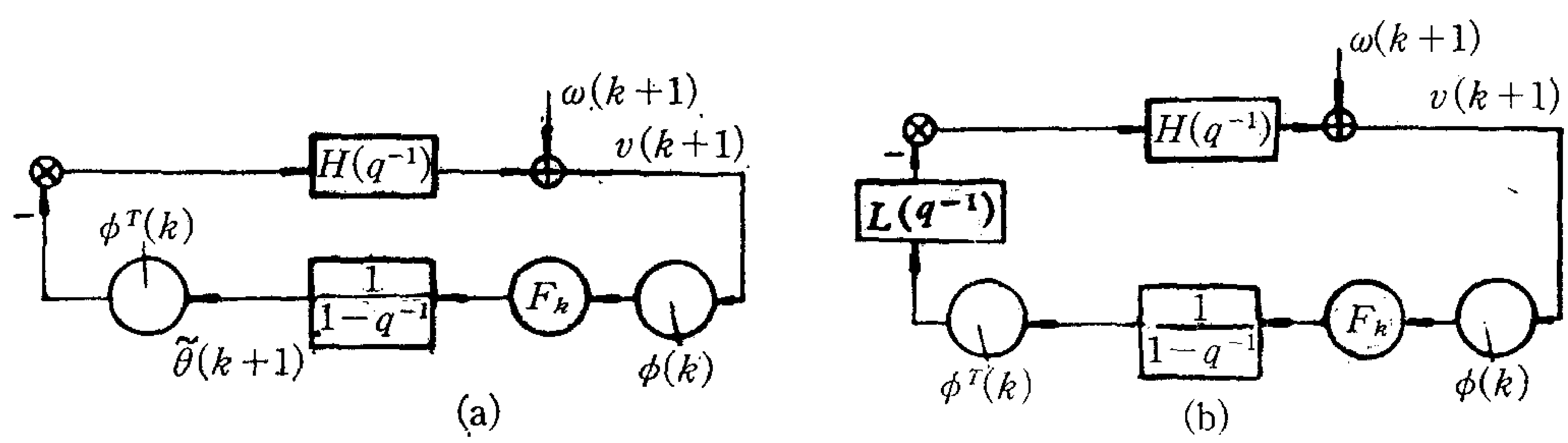


图　5

文献 [6] 指出，从图 5(a) 所示结构出发可获得一 Martingale 过程，若 $H(q^{-1})-\frac{\alpha}{2}\cdot$ $(\alpha\geqslant\alpha(k))$ 严格无源，则根据 Martingale 收敛定理，上述递推算法收敛．其实从无源性分析的角度看，这一结论是显然的，而且对 $H(q^{-1})$ 的要求还可放宽到只要 $H(q^{-1})$ 严格无源即可，因为不难证明以下定理成立：

定理 3. 递推算法 (15), (16) 式收敛的充要条件是 $H(q^{-1})$ 为严格无源.

证明. 根据定理 1 的推论, 只需证明图 5(a) 所示系统中的反馈迴路是无源的, 则以上定理得证.

记反馈迴路系统为

$$\Sigma = \boldsymbol{\phi}^T(k)W(q^{-1})F_k\boldsymbol{\phi}(k) = \boldsymbol{\phi}^T W F \boldsymbol{\phi}, \tag{17}$$

其中 $W(q^{-1}) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-q^{-1}}\right)$,为一对角线无源阵,相当于离散积分. 根据 (15) 式, F_k 只与 $\boldsymbol{\phi}(k-1)$ 有关,按递推计算的积累, F_k 也只与 $(k-1)$ 时刻以前的 $\boldsymbol{\phi}$ 值有关,与 $\boldsymbol{\phi}(k)$ 无关. 因此 (17) 式所示系统为一时变线性系统,这就给处理带来很大方便.

记 $F_k\boldsymbol{\phi}(k) = \boldsymbol{\phi}(k)$, 有

$$\Sigma = \boldsymbol{\phi}^T(k)F_k^{-1}W(q^{-1})\boldsymbol{\phi}(k) = \boldsymbol{\phi}^T F^{-1} W \boldsymbol{\phi}, \tag{18}$$

其中 F^{-1} 仍为对称正定阵. 每一对称阵均可用一直交阵将其对角线化,于是可设

$$F^{-1} = Q^T \Lambda Q, \tag{19}$$

其中 $Q^T = Q^{-1}$ 为直交阵,非奇异. 因为 F^{-1} 正定,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1(k) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(k) \end{bmatrix}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{20}$$

$\lambda_i(k)$ 为 F_k^{-1} 的特征值,且均为正.

将 (19) 式代入式 (18), 得

$$\Sigma = \boldsymbol{\phi}^T Q^T \Lambda Q W \boldsymbol{\phi}. \tag{21}$$

记 $\boldsymbol{X} = Q\phi$, 有

$$\Sigma = \boldsymbol{X}^T \Lambda Q W Q^{-1} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T \Lambda P^T W P \boldsymbol{X}, \tag{22}$$

式中 $P^{-1} = Q$, 仍为直交阵.

根据无源性的定义容易看出,若 W 无源, 则 $\Sigma_1 = P^T W P$ 是无源的. $\Sigma_2 = \Lambda P^T W P = \Lambda \Sigma_1$ 是 Σ_1 和正增益阵 Λ 的串联,它的无源性和 Σ_1 一致. 于是 Σ 的无源性和 Σ_1 的无源性一致,也即和 W 的无源性一致. 现 W 是无源的, 所以 Σ 也是无源的. 这就证明了定理 3.

前已指出 $\omega(k+1)$ 是白色噪音,与 $\boldsymbol{\phi}(k)$ 不相关. 于是 $F_k\boldsymbol{\phi}(k)v(k+1)$ 经离散积分 $\frac{1}{1-q^{-1}}$ 的作用后不会积累偏差 (Bias), 因此 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)$ 将收敛到真值 $\boldsymbol{\theta}^*$.

根据以上分析可以看出,不必对 $\alpha(k)$ 的数值提出约束, 只要求其为正即可, 也不必对 $H(q^{-1})$ 的无源性的程度提出要求, 只要求它严格无源即可. 这里所得出的结果和 Landau[6] 所得的结果有所差别的原因, 在于 Martingale 收敛定理和 Ляпунов 函数法相似,只给出收敛的充分条件, 不是充要条件. 此外图 5 (a) 所示系统严格无源的充要条件是 $H(q^{-1})$ 严格无源以前也未见证明.

设 $H(q^{-1}) = \frac{H_1(q^{-1})}{H_2(q^{-1})}$. 对于最小相位系统 $H_1(q^{-1})$ 和 $H_2(q^{-1})$ 都是稳定多项式, 但 $H(q^{-1})$ 可能不是严格无源的. 为了使 $H(q^{-1})$ 成为严格无源, 常要采用较复杂的递推算法,一些文献介绍了这类算法. $H(q^{-1})$ 虽非严格无源而如能使它严格无源化, 则问题

得以解决．不过这里不能采用上节所用的符号跟随系统使 $H(q^{-1})$ 严格无源化，因为有噪音存在 $v(k+1)$ 不能获得．作者采用图 5(b) 所示结构，引入了一稳定多项式 $L(q^{-1})$，使 $L(q^{-1})H(q^{-1})$ 为严格无源．按时变系统的结构变换的原理，由图 5(b) 所示结构可得参数递推算法应满足的方程为

$$(1-q^{-1})[\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)^T L(q^{-1})\boldsymbol{\phi}(k)+\boldsymbol{\phi}^T(k)L(q^{-1})\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)] = F_k\boldsymbol{\phi}(k)v(k+1) \tag{23}$$

或

$$\begin{aligned}&[L(q^{-1})\boldsymbol{\phi}^T(k)][\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)-\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k)]+[(1-q^{-1})L(q^{-1})\boldsymbol{\phi}^T(k)]\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)\\&+[\boldsymbol{\phi}^T(k)-\boldsymbol{\phi}^T(k-1)][L(q^{-1})\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)]+\boldsymbol{\phi}^T(k)[(1-q^{-1})L(q^{-1})\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k+1)]\\&=F_k\boldsymbol{\phi}(k)v(k+1).\end{aligned} \tag{24}$$

以上所得递推算法虽然烦一些，但能保证收敛．这一算法的特点，在于要求记忆 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 的多步采样时刻的数据进行多步递推运算，这和一般的一步递推运算是不同的．它开辟了一条设计递推算法的新路子．反馈系统无源性分析还可有其它应用，限于篇幅，文中未一一列出．

参　考　文　献

[1] Desoer, C. A. and M. Vidyasagar, Feedback Systems: Input-output Properties, Academic Press, 1975.
[2] Popov, V. M., Hyperstability of Control Systems, Springer-Verlag, 1973.
[3] Narendra, K. S. and Valavani, L. S. A Comparison of Lyapunov and Hyperstability, Approach to Adaptive Control of Continuous Systems, *IEEE Tr.* AC-**25**(1980), 243—247.
[4] ———, ———, Stable Adaptive Controller Design—Direct Control, *IEEE Tr.* AC-**23** (1978), 570—583.
[5] Athans, M. and K. L. Valavani, Some Critical Questions About Deterministic and Stochastic Control Algorithms (I), Proceedings of Sixth IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, **1**, 186—191, McGregor and Werner, Inc. 1982.
[6] Landau, I. D., Near Supermartingales for Convergence Analysis of Recursive Identification and Adaptive Control Schemes, *Int. J. Control*, **35**(1982), 197—226.

PASSIVITY ANALYSIS OF FEEDBACK SYSTEMS AND ITS APPLICATIONS

Feng Chunbo
(Nanjing Institute of Technology)

Abstract

Conditions for strict passivity of feedback systems and a new criterion for absolute stability are given in this paper. A new design scheme for model reference adaptive control system is presented. This design scheme makes the system possess strong robustness. Finally, a synthesis method for recursive parameter estimation of a stochastic system is also discussed.