

# 复杂系统可靠性设计中费用 最小化的一个方法

刘炳章

(中国精密机械公司北京研究院)

## 摘 要

本文用分解定理和分割树求出了复杂系统可靠性的函数表达式,给出了复杂系统可靠性设计中费用最小化的一种方法.本方法简单,适合工程应用.

## 一、引 言

在复杂系统可靠性设计中,经常会遇到费用最小化问题.最近几年,国内外在这方面发表了不少文章<sup>[1,5]</sup>.但大部分都仅仅是解决串并联系统的最优冗余问题,复杂系统可靠性设计最优化方面的文章并不多.

该类问题的难点,并不完全在于最优化的数学方法本身,而往往在于如何寻求可靠性的解析表达式.早在五十年代就曾有人提出用“因式分解定理”求解可靠性的解析表达式<sup>[3]</sup>.到了七十年代,尽管印度学者又对该方法进行了修改<sup>[4]</sup>,但在求解内联分支为 $m$ 的网络的可靠性时,不得不同时穷举 $2^m$ 个状态.这对稍微复杂一点的网络来说,是很困难的,有时甚至无从下手.本文应用二维分割树和相应的递推公式,使应用分解定理求解复杂网络的可靠性表达式成为可能.

## 二、问题的数学模型

一个典型的复杂网络,如图1所示.该网络里,最左边的一端为输入端,最右边的一端为输出端. $X_i, i = 1, 2, \dots, 11$ 表示各元部件的可靠度变量.

各元部件的费用与其可靠度之间的关系,可用下式表示<sup>[2]</sup>:

$$C_i = W_i \cdot \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \cdot X_i \right) \right]^{\alpha_i} \quad (1)$$

其中 $X_i$ 为第 $i$ 个元部件的可靠度变量; $C_i$ 为第 $i$ 个元部件的费用; $W_i$ 为费用比例系数.它反映第 $i$ 个元部件可靠度为0.5时的最低费用; $\alpha_i$ 为费用增长指数.它反映元部件可靠度由0.5向上增长时,费用增长的快慢程度.为简单起见,本文 $\alpha_i$ 选为1.选用正切函

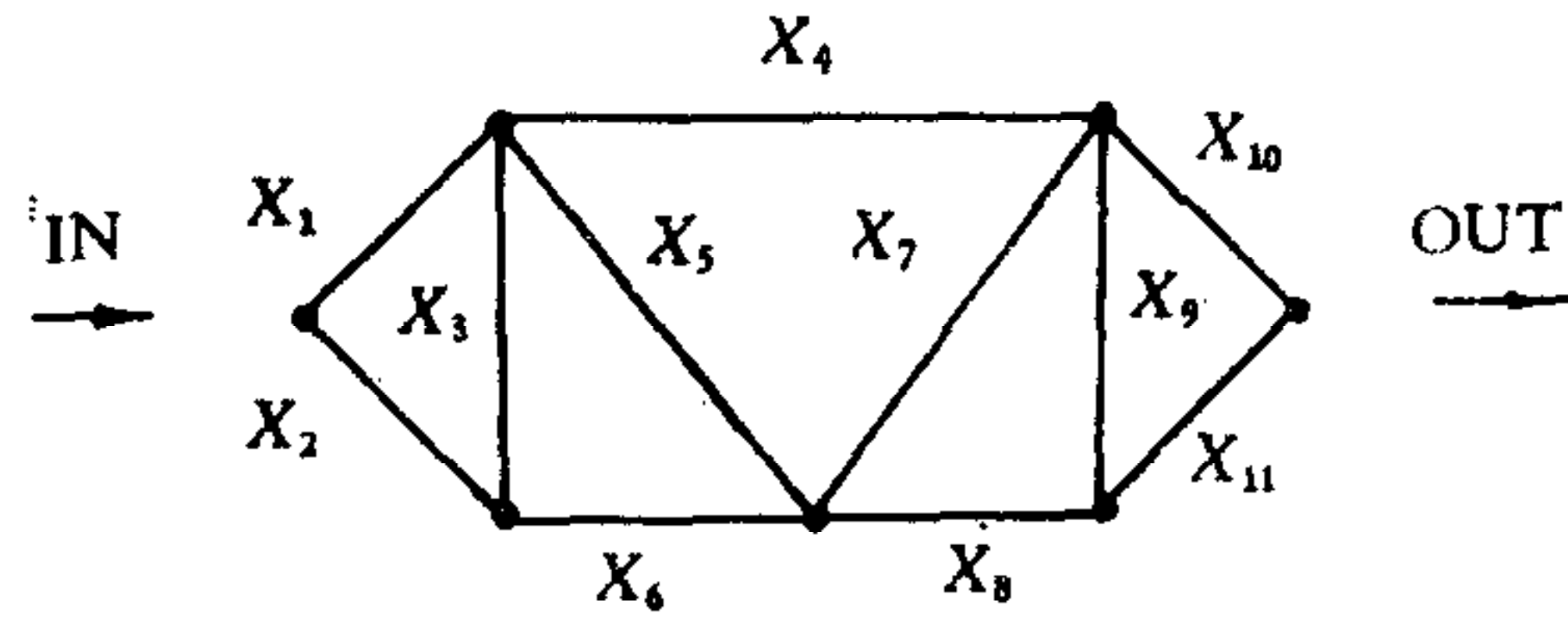


图 1 可靠性复杂网络

数是因为它比较真实地描述了元部件可靠度与费用之间的非线性关系。不难看出，当元部件可靠度为最低值 (0.5) 时， $C_i = W_i$ ；当  $X_i \rightarrow 1$  时， $C_i \rightarrow \infty$ 。

在满足系统总的可靠性指标的前提下，如何合理地分配  $X_i$ ，使系统总的费用最少？归纳起来，该问题的数学模型为：

$$\begin{cases} \min C_s(X_i) = \min_{X_i} \sum_{i=1}^{11} W_i \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \cdot X_i \right) \right]^{\alpha_i}, \\ R_s(X_i) \geq R_{s,\min}, \\ 0.5 \leq X_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, 11. \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\alpha_i = 1$ ， $R_{s,\min} = 0.99$ ， $W_1 = 25.5$ ， $W_2 = 25.5$ ， $W_3 = 37.5$ ， $W_4 = 50.0$ ， $W_5 = 30.2$ ， $W_6 = 32.5$ ， $W_7 = 30.2$ ， $W_8 = 34.5$ ， $W_9 = 37.5$ ， $W_{10} = 28.5$ ， $W_{11} = 28.5$ 。

### 三、可靠性的解析表达式

为了用“因式分解定理”寻求图 1 所示网络的可靠性表达式，先画出如图 2 所示的一棵分割树，以表示自上而下的分割过程。图中， $X_3, X_5, X_7, X_9$  均为进行分割的无向分支。分割树的二进制前缀编码集为：

{0000, 0001, 0010, 0011, 010, 011, 10, 11}

与上述各编码相对应的被分割出来的子网络如图 3 所示。

显然，图中各子网络均为串并联结构，它们的可靠性函数是很容易求出的。利用下面的递推关系式，再进行自下而上的回代，就可求出图 1 所示整个网络的可靠性表达式。

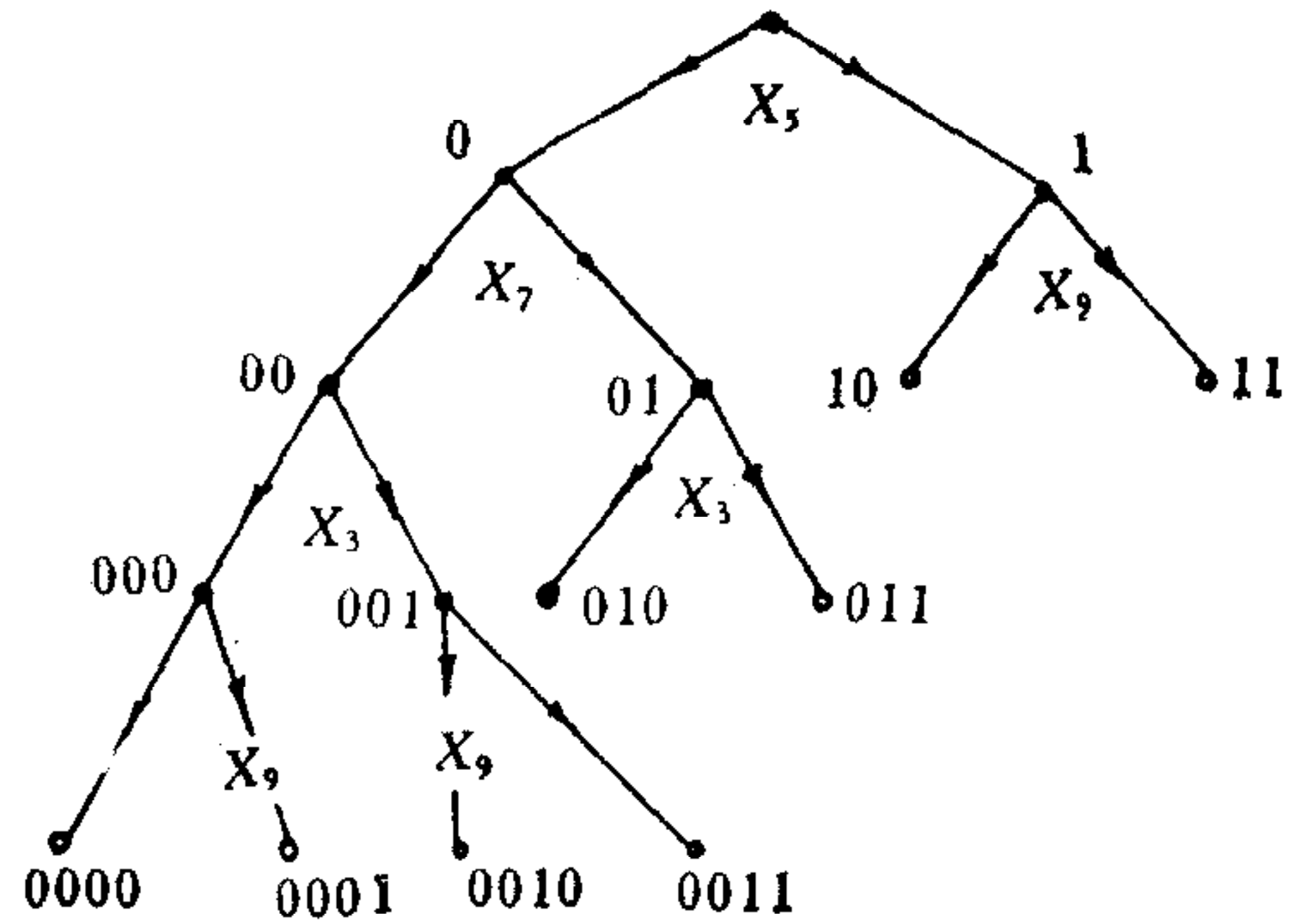


图 2 复杂网络的一棵分割树

$$\begin{cases} R_{000} = (1 - X_9) \cdot R_{0000} + X_9 \cdot R_{0001}, \\ R_{001} = (1 - X_9) \cdot R_{0010} + X_9 \cdot R_{0011}, \\ R_{00} = (1 - X_3) \cdot R_{000} + X_3 \cdot R_{001}, \\ R_{01} = (1 - X_3) \cdot R_{010} + X_3 \cdot R_{011}, \\ R_0 = (1 - X_7) \cdot R_{00} + X_7 \cdot R_{01}, \\ R_1 = (1 - X_9) \cdot R_{10} + X_9 \cdot R_{11}, \\ R = R_s(X_i) = (1 - X_5) \cdot R_0 + X_5 \cdot R_1. \end{cases}$$

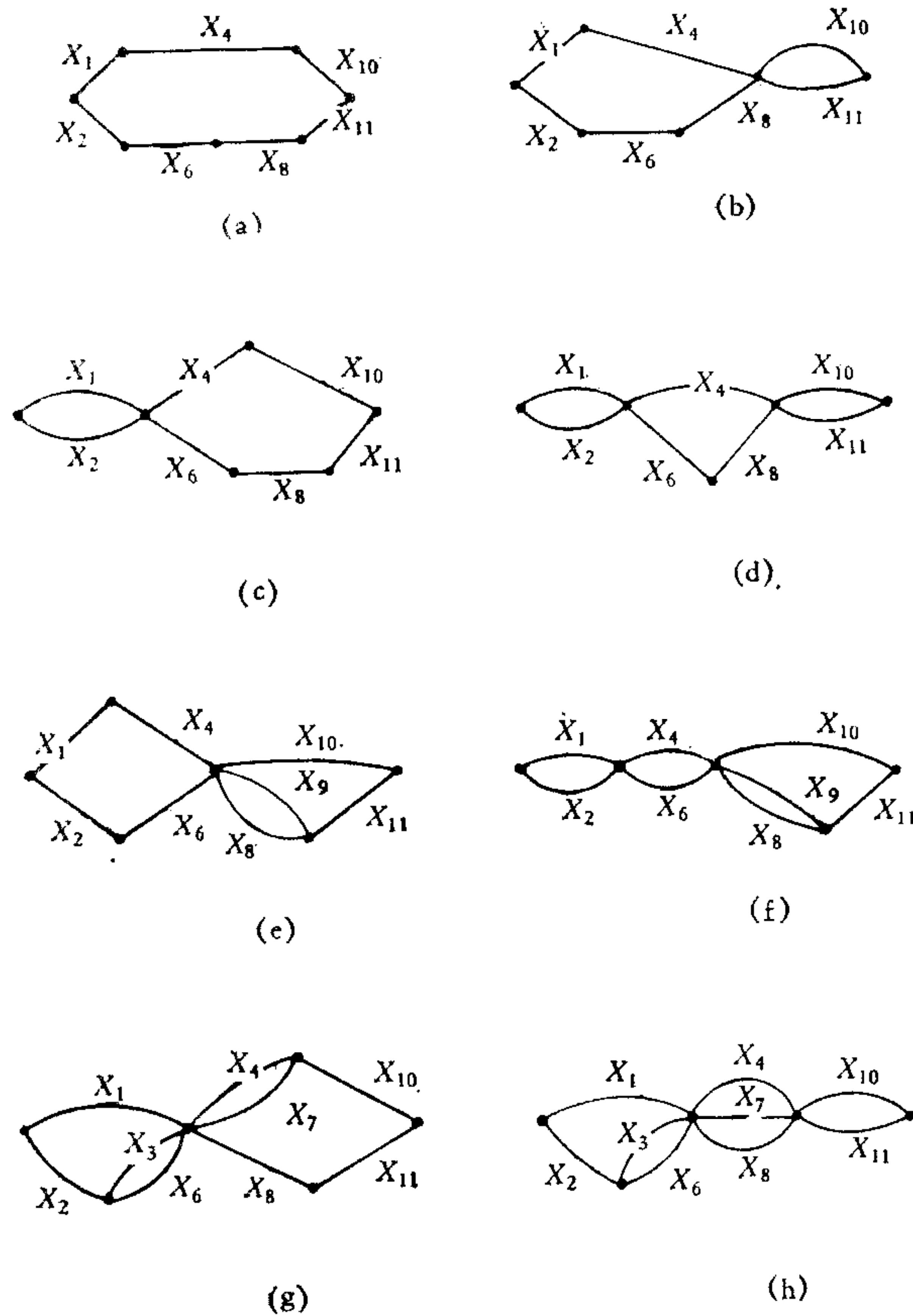


图3 分割出的各子网络图  
 (a) 0000 子网络; (b) 0001 子网络; (c) 0010 子网络; (d) 0011 子网络;  
 (e) 010 子网络; (f) 011 子网络; (g) 10 子网络; (h) 11 子网络.

### 四、最优化算法及其计算结果

由数学模型看出所要求解的问题是属于具有不等式约束的非线性规划问题。但是仔细分析后,不难发现:

$$\frac{\partial R_s(X_i)}{\partial X_i} > 0, \frac{\partial C_s(X_i)}{\partial X_i} > 0, 0.5 \leq X_i < 1.$$

这样就可以把可靠度分配的过程,看成是一个多步的最优决策过程。为此,把

$$V_i = \frac{\partial R_s}{\partial X_i} / \frac{\partial C_s}{\partial X_i} = \frac{\partial R_s}{\partial C_s} \quad (i = 1, 2, \dots, 11)$$

作为决策的数量指标,从任意一组初始值  $[X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0, \dots, X_{11}^0]$  开始,计算

$$A = \max_{V_i} \{V_1, V_2, \dots, V_m, \dots, V_{11}\}.$$

若  $V_m = A$ , 则  $X_m^* = X_m^0 + \delta$  ( $\delta$  为选定的步长), 于是, 第二步开始时的状态变量就变成  $[X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^*, \dots, X_{11}^0] \rightarrow R_s^1, C_s^1$ . 重复上述过程,直到  $R_s^{N-1} \geq 0.99$  时为止, 这时算出的  $C_s^{N-1}$  就是满足可靠性要求的最小费用.

在 ACOS-500 计算机上运行 98 秒后得到可靠度的最优分配结果如下:

$$X_1 = 0.955610, X_2 = 0.942297, X_3 = 0.771865, X_4 = 0.892972, X_5 = 0.870690, \\ X_6 = 0.907218, X_7 = 0.872601, X_8 = 0.904091, X_9 = 0.779455, X_{10} = 0.953682, \\ X_{11} = 0.940100. \quad R_s = 0.990000, C_s = 2563.888916.$$

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Tillman F. A. Hwang C. L., Way Kuo, Optimization of Systems Reliability, 1980, New York.
- [ 2 ] Aggarwal, K. K., Gupta J. S., On Minimizing the Cost of Reliable Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol R-24, No 3, 1975, pp205.
- [ 3 ] Moskowitz, F., The Analysis of Redundancy Networks, *AIEE Trans Commun. Electron*, Vol-77, 1958, pp 627—632.
- [ 4 ] Misra K. B., An Algorithms for The Reliability Evaluation of Redundant Networks, *IEEE Trans. Reliability*, Vol R-19, 1970, pp 146—151.
- [ 5 ] 疏松桂,最可靠控制系统的综合,自动化学报,1980年,第六卷,第一期.

## A METHOD OF COST MINIMIZATION ON RELIABILITY DESIGN OF COMPLEX SYSTEM

LIU BINGZHANG

(Beijing Research Institute of CPMC.)

### ABSTRACT

In this paper the reliability function expression of the complex system is given by factoring theorem and partitioning tree. A method of cost minimization on reliability design of complex systems is presented. The method is simple and suitable for engineering application.