第 11 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 1
1985 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1985

短 文

两个多项式阵最大公因子的计算

韩京清 陈晓东
(中国科学院系统科学所) (上海交通大学)

摘 要

本文给出了用对多项式阵的系数阵进行初等变换的方法确定两个多项式阵的最大公因子及其互质部分的一种算法.

两个多项式阵最大公因子的求法是控制系统分析与综合理论中的基本算法，因此引起了人们的兴趣[4,5,7]. 本文给出了用对多项式阵的系数阵进行初等变换的办法确定两个多项式阵的最大公因子,并确定消去公因子后的互质部分的新算法.

众所周知,当 $M_1(s)$,$M_2(s)$ 分别为 $r_1\times m$, $r_2\times m$ 多项式阵，$r=r_1+r_2$ 时，存在 r 阶单位模阵 $U(s)$ 及 m 阶多项式阵 $G(s)$，满足

$$U(s)\begin{bmatrix} M_1(s)\\ M_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G(s)\\ 0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

这时，$G(s)$ 为 $M_1(s)$,$M_2(s)$ 的最大右公因子. 把 $U(s)$ 之逆 $U^{-1}(s)$ 分块成

$$U^{-1}(s)=\begin{bmatrix} \hat{U}_{11}(s) & \hat{U}_{12}(s)\\ \hat{U}_{21}(s) & \hat{U}_{22}(s)\end{bmatrix}, \tag{2}$$

则 $\hat{U}_{11}(s)$,$\hat{U}_{21}(s)$ 是 $M_1(s)$,$M_2(s)$ 中消去 $G(s)$ 后的右互质部分. 因此问题的关键是确定 $U(s)$ 及 $U^{-1}(s)$.

在 (1) 式中，$U(s)$ 是有限个如下变换之积:

1) i, j 行对调;

2) i 行加上乘以多项式 $f(s)$ 的 j 行;为了便于计算,把 2) 换成

3) i 行加上乘以 $\beta s^k(k\geqslant 0$, 整数)的 j 行;显然，变换 2) 是有限个 3) 型变换之积，且变换

4) j, i 列对调;

5) 从 j 列减去乘以 βs^k 的 i 列,分别是变换 1),3) 的逆变换. 易证.

定理. 设 $M(s)\in R^{r\times m}[s]$,$r>m$, 则对 $M(s)$ 实行有限次 1),3) 型变换，总可以把它化成形式 $\begin{bmatrix} G(s)\\ 0\end{bmatrix}$, $G(s)\in R^{m\times m}[s]$,且每次变换都不使 $M(s)$ 的行次增加.

本文于 1981 年 6 月 13 日收到.

此定理说明 $U(s)$ 可由有限次 1),3) 型变换构成，而 $U^{-1}(s)$ 是由有限个相应变换 4), 5) 构成.

变换 1),3) 易在 $M(s)$ 的系数阵上实现. 设 $\partial_{ri}M(s) = d_i$, $d = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$. 这时，$M(s)$ 可展开成

$$M(s) = M_0 s^d + M_1 s^{d-1} + \cdots + M_d. \tag{3}$$

而矩阵

$$\bar{M} = [M_0 \vdots M_1 \vdots \cdots \vdots M_d] \tag{4}$$

是 $M(s)$ 的一种系数阵. 显然，对 $M(s)$ 做变换 1) 等价于对 $\bar{M}$ 做变换 1)；而对 $M(s)$ 做变换 3) 等价于对 $\bar{M}$ 做如下变换：

6) i 行加上乘以 β 并"左移" k 块的 j 行，但为了不使 $M(s)$ 的行次增加，必须有

$$k \leqslant d_i - d_j.$$

设 D 是表示 $M(s)$ 的行次的 $r \times 1$ 阵：

$$D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}.$$

对矩阵 $D, \bar{M}$ 的如下三种变换：

a) 当 $d_i \geqslant 0$，且 M_0 的 i 行为零时，$\bar{M}$ 的 i 行"左移"一块，并从 d_i 减去 1；

b) D 和 $\bar{M}$ 同时调换 i, j 行；

c) 当 $d_i \geqslant d_j$ 时，在 $\bar{M}$ 中，对 i 行加上乘以 β 的 j 行.

显然，变换 a) 对 $M(s)$ 不起任何作用；变换 b) 等价于对 $M(s)$ 的变换 1)；变换 c) 等价于 $k = d_i - d_j$ 时对 $\bar{M}$ 的变换 6)，也等价于对 $M(s)$ 的变换 3). 因此，对 $D, \bar{M}$ 的变换 a), b), c) 将实现对 $M(s)$ 的行初等变换.

根据以上讨论，可给出求最大右公因子的如下算法：

***GCD* 算法.** 先按式(3)构造矩阵 $M(s) = \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix}$ 的系数阵 $\bar{M}$ 及矩阵 D，并在 D 中先置 $d_i = d$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

step1. D, $\bar{M}$ 实行变换 a)，使 $d_i \geqslant 0$ 所对应的 M_0 中的行均不等于零；

step2. $D, \bar{M}$ 实行变换 b)，使 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_r$；

step3. 如果 D 的后 $r - m$ 个元为 -1，则转 step5；

step4. 对 $\bar{M}$ 实行变换 c)，消去 M_0 的行中一个线性相关者，转 step1；

step5. 当 $d_i \geqslant 0$ 时，$\bar{M}$ 的 i 行"右移" $d_1 - d_i$ 块，$i = 2, \cdots, r$，并按 (3) 式恢复多项式阵，就得最大右公因 $G(s)$.

为了确定 $U(s)$，只要把 step2，step4 中出现的变换 b), c) 所对应的变换 1), 6) 依次作用于矩阵 $[0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0 \vdots I_r]$ (I_r 为 r 阶单位阵)上，并把所得矩阵做为系数阵按(3)式恢复多项式阵就可以了. 为了确定 $U^{-1}(s)$，先把变换 5) 译成：

7) 从 i 列减去乘以 β 并"上移" k 块的 i 列. 然后把 step2, 4 中出现的变换 1), 6) 的"逆变换" 4), 7) 依次作用于矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ I_r \end{bmatrix} \tag{5}$$

上,就能得到 $U^{-1}(s)$.

例. 求两个多项式阵

$$M_1(s) = \begin{bmatrix} s^3+4s+2 & 2s^2+3s+5 \\ s^2+s-1 & s^2+s-1 \end{bmatrix}, \quad M_2(s) = \begin{bmatrix} s^2+1 & 2s+1 \\ s^2+2s & s^2+2s+1 \end{bmatrix}$$

的最大右公因子 $G(s)$ 及它们的右互质部分.

矩阵 $M(s) = \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix}$, $d=3$, 从而有

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{M} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

为了简单起见,把变换 6) 简记为

$$[(\text{从})\ i\ \text{行加(减)}\ \beta\ \text{倍}\ j\ \text{行}\ (k)].$$

其中 (k) 表示左移的块数.

对 $D, \bar{M}$ 分别做: $\bar{M}$ 的 2,3,4 行分别左移 1 块, 并从 d_2, d_3, d_4 各减 1; [从 1 行减 3 行 (1)]; [从 2 行减 4 行 (0)]; 1,2 行分别左移 2, 1 块, 并从 d_1, d_2 分别减 2,1; [对 4 行加 2 行 (1)]; [对 1 行加 2 倍 2 行 (0)]; [从 3 行减 1 行 (1)]; 3, 4 行分别左移 1 块, 并从 d_3, d_4 各减1; [从 4 行减 1 行 (0)]; [对 2 行加 1 行 (0)]; [对 3 行加 2 行(0)]; 3,4 行分别左移 2 块,并从 d_3, d_4 各减 2, 得

$$D \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

由此 $M_1(s)$, $M_2(s)$ 的最大右公因子为

$$G(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & -s-1 \end{bmatrix}.$$

为了求 $U^{-1}(s)$, 把上面出现的方括号内的变换依次译成: 对 3 列加 1 列 (1); 对 4 列加 2 列 (0); 从 2 列减 4 列 (1); 从 2 列减 2 倍 1 列 (0); 对 1 列加 3 列 (1); 对 1 列加 4 列 (0); 从 1 列减 2 列 (0); 从 2 列减 3 列 (0). 这里括号内的数为"上移"的块数. 把

这些变换依次作用于矩阵 (5) 上，就可以得到

$$U^{-1}(s)=\left[\begin{array}{cc:cc} s^2+3 & -s-2 & s & 0 \\ s & -s+1 & 0 & 1 \\ \hline s & -1 & 1 & 0 \\ s+1 & -s & 0 & 1 \end{array}\right],$$

从而 $M_1(s)$，$M_2(s)$ 的右互质部分为

$$\begin{bmatrix} s^2+3 & -s-2 \\ s & -s+1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} s & -1 \\ s+1 & -s \end{bmatrix}.$$

参　考　文　献

[1] Rosenbrock H. H., State-Space and Multivariable Theory, John Wiley (1970).

[2] Wolovich W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974).

[3] 须田信英等，自动控制中的矩阵理论(曹长修译)，科学出版社 (1979).

[4] Kung S. Y., Kailath T. and M. Morf., A generalized resultant matrix for polynomial matrices, in Proc. IEEE conf. on Decision and Control, p. 892, (1976).

[5] Bitmead R. R., Kung S. Y. and Anderson B. D. O., Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices, *IEEE Trans.*, vol. AC-**23**, No. 6, p. 1043, (1978).

[6] 韩京清，线性控制系统结构与反馈系统计算，1979 年全国控制理论及其应用会议(厦门)论文集，科学出版社，(1982).

[7] 许可康，多项式矩阵互质的结式定理，应用数学学报.

[8] 韩京清，多变量控制系统理论，控制系统暑期讨论班材料，(1980).

A NEW METHOD FOR FINDING THE GREATEST COMMON DIVISOR OF TWO POLYNOMIAL MATRICES

Han Kyengcheng

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Chen Xiaodong

(Shanghai Jiaotong University)

Abstract

In this paper a new method for finding the greatest common divisor and the coprime parts of two polynomial matrices is presented. This method is based on the realization of elementary operations on the polynomial matrix by its coefficient matrices.