

两部件串联可修模型分析

史定华

(上海铁道学院)

摘 要

本文研究典型的两部件串联可修模型。在一个部件的失效分布为 Erlang 分布, 另一个失效分布和两个维修分布均为连续型的假定下, 利用补充变量方法求得了系统的全部可靠性指标。这种模型能用来分析某些自动化系统的可靠性。

一、问题的提出

随着科学技术日新月异的发展, 各种类型的自动化系统不断涌现。它们的优异性能改变着各个领域的面貌。然而, 一旦发生失效而又未加防范, 也会带来严重的政治经济后果。所以在设计一个自动化系统时, 不仅希望有好的性能指标, 而且应该特别注重可靠性指标。

一般自动化系统往往都很复杂, 要分析计算它的可靠性指标并非易事。为此人们提出了种种简化模型, 其中两部件串联可修模型就是典型的一个。两部件串联可修模型是可靠性数学研究方面比较成熟的模型。在各部件的失效分布均为指数分布, 维修分布均为连续型分布的假定下, 可利用 Markov 更新过程求得系统的全部可靠性指标¹⁾。文献[1]在一个部件的失效分布为指数分布, 其余三个均为连续型分布的假定下, 利用补充变量方法求出了系统的全部可靠性指标。如果假定各部件的失效和维修分布均为连续型分布, 则问题将变得非常困难。文献[2]利用更新过程理论得出了系统的平均稳态可用度和稳态失效频度。

本文推广文献[1]的结果, 在一个部件的失效分布为 Erlang 分布, 其余三个均为连续型分布的假定下, 利用补充变量方法和文献[3]得到的公式求出了系统的全部可靠性指标, 基本上能满足实际工作的需要。

二、模型的数学描述

1. 模型的假定

1) 部件 1 的失效分布为 Erlang 分布, 其密度函数记为

本文于 1982 年 8 月 16 日收到。

1) 曹晋华, 程侃, 系统可靠性的数学理论, 中国科学院应用数学所资料, 1980.

$$f_1(t) = \frac{\lambda_1^k \cdot t^{-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_1 t}, \lambda_1 > 0, k \text{ 为固定正整数.}$$

这意味着部件 1 在失效前必须经历 k 个不同阶段, 而走完每个阶段的时间服从参数为 λ_1 的指数分布. 部件 1 的维修分布为连续型分布, 记为

$$G_1(t) = \int_0^t g_1(x) dx = 1 - e^{-\int_0^t \mu_1(y) dy}.$$

2) 部件 2 的失效和维修均为连续型分布, 分别记为

$$F_2(t) = \int_0^t f_2(x) dx = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_2(x) dx},$$

$$G_2(t) = \int_0^t g_2(x) dx = 1 - e^{-\int_0^t \mu_2(y) dy}.$$

3) 部件 1, 2 的寿命 ξ_1, ξ_2 , 维修时间 η_1, η_2 都是相互独立的随机变量.

4) 任一部件失效, 系统就失效, 未失效的部件中断运行不再失效也不检修. 修理工马上对失效部件进行维修, 修复后象新的一样, 修理完毕系统立即恢复运行(这时未失效的部件仅有剩余寿命).

5) 在 $t = 0$ 时, 部件 1, 2 都是新的.

2. 模型的描述

首先定义系统的状态.

状态 0: 两部件未失效, 系统在运行;

状态 1: 部件 1 已失效, 系统中断运行;

状态 2: 部件 2 已失效, 系统中断运行.

用 $S(t)$ 表示系统在时刻 t 时所处的状态, 显然 $S(t)$ 是一个取值于状态空间 $J = \{0, 1, 2\}$ 的随机过程. 由假定可知, 它不是 Markov 过程. 为此, 引进补充变量: 当 $S(t) = 0, 2$ 时, 令 $I(t)$ 表示部件 1 在时刻 t 所处的阶段; 当 $S(t) = 0, 1$ 时, 令 $X(t)$ 表示部件 2 在时刻 t 的年龄; 当 $S(t) = i = 1, 2$ 时, 令 $Y_i(t)$ 表示部件 $i (i = 1, 2)$ 在时刻 t 已经花掉的修理时间. 它们的取值为

$$I(t) = 1, 2, \dots, k, 0 \leq X(t), Y_i(t) < \infty.$$

于是 $\{S(t), I(t), X(t), Y_i(t)\}$ 构成一个特殊的高维 Markov 过程. 其全部状态和状态概率定义如下:

$$P_{0i}(t; x) dx = P_r\{S(t) = 0, I(t) = i, x \leq X(t) < x + dx\}, 1 \leq i \leq k;$$

$$P_1(t; x, y) dx dy = P_r\{S(t) = 1, x \leq X(t) < x + dx, y \leq Y_1(t) < y + dy\};$$

$$P_{2i}(t; y) dy = P_r\{S(t) = 2, I(t) = i, y \leq Y_2(t) < y + dy\}, 1 \leq i \leq k.$$

这时系统状态之间的转移情况见图 1.

根据状态转移图进行概率分析后可得到下述状态概率之间的偏微分方程组:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 + \lambda_2(x) \right] P_{0i}(t; x) = \int_0^\infty \mu_1(y) P_1(t; x, y) dy, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 + \lambda_2(x) \right] P_{0i}(t; x) = \lambda_1 P_{0i-1}(t; x), 2 \leq i \leq k, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} + \mu_1(y) \right] P_1(t; x, y) = 0, \quad (3)$$

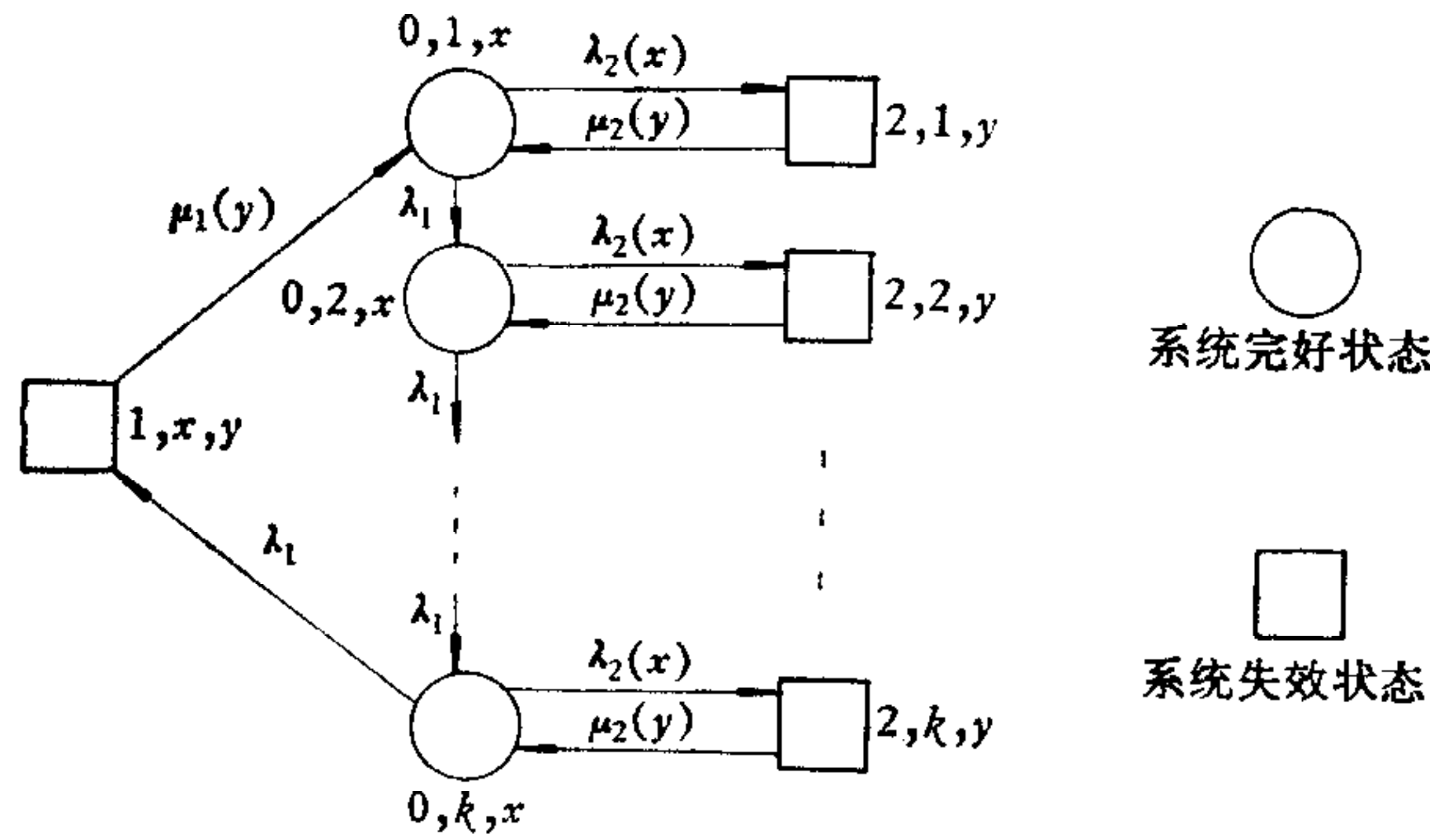


图 1 系统的状态转移图

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} + \mu_2(y) \right] P_{2i}(t; y) = 0, \quad 1 \leq i \leq k. \tag{4}$$

边界条件为

$$P_{01}(t; 0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_{21}(t; y) dy + \delta(t); \tag{5}$$

$$P_{0i}(t; 0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_{2i}(t; y) dy, \quad 2 \leq i \leq k; \tag{6}$$

$$P_1(t; x, 0) = \lambda_1 P_{0k}(t; x); \tag{7}$$

$$P_{2i}(t; 0) = \int_0^\infty \lambda_2(x) P_{0i}(t; x) dx, \quad 1 \leq i \leq k. \tag{8}$$

初始条件为

$$P_{01}(0; x) = \delta(x); \quad P_{0i}(0; x) = 0, \quad 2 \leq i \leq k;$$

$$P_1(0; x, y) = 0; \quad P_{2i}(0; y) = 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

例如,为了得到方程(1),考虑在时间区间 $[t, t+h)$ 内状态的转移情况,这时有

$$P_{01}(t+h; x+h) = P_{01}(t; x)(1 - \lambda_1 h) \cdot \frac{\bar{F}_2(x+h)}{\bar{F}_2(x)} + \int_0^\infty P_1(t; x, y) \frac{G_2(y+h) - G_2(y)}{\bar{G}_2(y)} dy + o(h).$$

其中 $\bar{H}(x) = 1 - H(x)$. 右边第一项表示没有发生转移; 第二项表示在时间区间 $[t, t+h)$ 中由状态 $(1, x, y)$ 转来; 第三项表示由其它状态转来. 移项后两边除以 h , 并令 $h \rightarrow 0$, 可得到第一个方程. 同样,为了得到第一个边界条件,考虑在时间区间 $[t, t+h)$ 内系统处于状态 $(0, 1, 0)$ 的概率,有

$$P_{01}(t+h; 0)h = \int_0^\infty P_{21}(t; y) \frac{G(y+h) - G(y)}{\bar{G}(y)} dy + \delta(t)h + o(h).$$

右边第一项表示在时间区间 $[t, t+h)$ 内由状态 $(2, 1, y)$ 转来; 第二项反映模型的假定 5, 以便和初始条件一致; 第三项表示由其它状态转来. 除以 h 并令 $h \rightarrow 0$, 可得到第一个边界条件. 其它方程和边界条件均可类似地导出.

三、状态方程组的求解

令

$$H^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot H(t) dt.$$

其中*号表示函数 $H(s)$ 的 Laplace 变换。首先对方程 (3) 和边界条件 (7) 取 L 变换, 得

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} P_1^*(s; x, y) + [s + \mu_1(y)] P_1^*(s; x, y) = 0, \\ P_1^*(s; x, 0) = \lambda_1 P_{0k}^*(s; x). \end{cases} \quad (9)$$

解方程 (9) 得

$$P_1^*(s; x, y) = \lambda_1 P_{0k}^*(s; x) e^{-sy} \bar{G}_1(y). \quad (10)$$

用类似的方法解方程 (4) 和边界条件 (8) 得

$$P_{2i}^*(s; y) = \left[\int_0^{\infty} \lambda_2(x) P_{0i}^*(s; x) dx \right] e^{-sy} \bar{G}_2(y). \quad (11)$$

由 (10) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \mu_1(y) P_1^*(s; x, y) dy &= \int_0^{\infty} \mu_1(y) \cdot \lambda_1 P_{0k}^*(s; x) \cdot e^{-sy} \bar{G}_1(y) dy \\ &= \lambda_1 P_{0k}^*(s; x) \int_0^{\infty} e^{-sy} g_1(y) dy = \lambda_1 g_1^*(s) P_{0k}^*(s; x). \end{aligned}$$

所以, 对方程 (1) 和方程 (2) 取 L 变换得

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} P_{01}^*(s; x) + [s + \lambda_1 + \lambda_2(x)] P_{01}^*(s; x) = \lambda_1 g_1^*(s) P_{0k}^*(s; x), \\ \frac{d}{dx} P_{02}^*(s; x) + [s + \lambda_1 + \lambda_2(x)] P_{02}^*(s; x) = \lambda_1 P_{01}^*(s; x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{d}{dx} P_{0k}^*(s; x) + [s + \lambda_1 + \lambda_2(x)] P_{0k}^*(s; x) = \lambda_1 P_{0k-1}^*(s; x). \end{cases} \quad (12)$$

这是一个 k 元变系数线性常微分方程组。

若令

$$P_{0i}^*(s; x) = Q_{0i}^*(s; x) \bar{F}_2(x), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (13)$$

则由于

$$\frac{d}{dx} P_{0i}^*(s; x) = \frac{d}{dx} Q_{0i}^*(s; x) \bar{F}_2(x) - f_2(x) Q_{0i}^*(s; x),$$

方程组 (12) 可转化为

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} Q_{01}^*(s; x) \\ Q_{02}^*(s; x) \\ \vdots \\ Q_{0k}^*(s; x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(s + \lambda_1) & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 g_1^*(s) \\ \lambda_1 & -(s + \lambda_1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & -(s + \lambda_1) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} Q_{01}^*(s; x) \\ Q_{02}^*(s; x) \\ \vdots \\ Q_{0k}^*(s; x) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

它是一个常系数线性微分方程组。式(14)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -(s + \lambda_1) - \nu & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 g_1^*(s) \\ \lambda_1 & -(s + \lambda_1) - \nu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & -(s + \lambda_1) - \nu \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$[-(s + \lambda_1) - \nu]^k + (-1)^{k+1} \lambda_1^k g_1^*(s) = 0.$$

它的 k 个特征根是

$$\nu_i = -(s + \lambda_1) + \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

其中

$$\omega_i = e^{\frac{2i\pi}{k} \cdot j} = \cos \frac{2i\pi}{k} + j \sin \frac{2i\pi}{k}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

解线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} -(s + \lambda_1) - \nu_i & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 g_1^*(s) \\ \lambda_1 & -(s + \lambda_1) - \nu_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & -(s + \lambda_1) - \nu_i \end{bmatrix} U_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得到与特征根 ν_i 对应的特征向量

$$U_i = [1, a_i, \dots, a_i^{k-1}].$$

其中

$$a_i = [\omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

若记

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} \end{bmatrix},$$

则可求得

$$T^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & a_1^{-1} & \cdots & a_1^{-(k-1)} \\ 1 & a_2^{-1} & \cdots & a_2^{-(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_k^{-1} & \cdots & a_k^{-(k-1)} \end{bmatrix}.$$

不难验证

$$T^{-1} \begin{bmatrix} -(s + \lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 g_1^*(s) \\ \lambda_1 & -(s + \lambda_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & -(s + \lambda_1) \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \nu_1 & & & & 0 \\ & \nu_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \nu_k \end{bmatrix}.$$

于是方程组 (14) 的通解为

$$\begin{bmatrix} Q_{01}^*(s; x) \\ Q_{02}^*(s; x) \\ \vdots \\ Q_{0k}^*(s; x) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} e^{\nu_1 x} & & & & 0 \\ & e^{\nu_2 x} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & e^{\nu_k x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

其中 C_i 是待定常数. 再对边界条件 (5) 和 (6) 取 L 变换, 并利用 (13), (15) 两式可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_{01}^*(s; 0) \\ Q_{02}^*(s; 0) \\ \vdots \\ Q_{0k}^*(s; 0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{01}^*(s; 0) \\ P_{02}^*(s; 0) \\ \vdots \\ P_{0k}^*(s; 0) \end{bmatrix} \\ &= T \begin{bmatrix} \int_0^\infty \mu_2(y) \left[\int_0^\infty \lambda_2(x) e^{\nu_1 x} \bar{F}_2(x) dx \right] e^{-sy} \bar{G}_2(y) dy & & & & 0 \\ & \int_0^\infty \mu_2(y) \left[\int_0^\infty \lambda_2(x) e^{\nu_2 x} \bar{F}_2(x) dx \right] e^{-sy} \bar{G}_2(y) dy & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \int_0^\infty \mu_2(y) \left[\int_0^\infty \lambda_2(x) e^{\nu_k x} \bar{F}_2(x) dx \right] e^{-sy} \bar{G}_2(y) dy & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_1 \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & & & & 0 \\ & f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_2 \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_k \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= T \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

最后一个等式两边同乘以 T^{-1} , 并移项整理得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_1 \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & & & & 0 \\ & 1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_2 \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_k \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解此矩阵方程, 得

$$C_i = \frac{1/k}{1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \cdot g_2^*(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (16)$$

由此, 可根据 (15) 式算出 $Q_{0i}^*(s; x)$, 再根据 (13) 式算出 $P_{0i}^*(s; x)$, 最后根据 (10), (11) 式可算出 $P_1^*(s; x, y)$ 和 $P_{2i}^*(s; y)$. 这样系统处于各状态的概率的 Laplace 变换式均已求出.

四、可靠性指标的计算

1. 系统的可靠度

按照模型的假定, 系统的可靠度为

$$\begin{aligned} R(t) &= \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) = \left[1 - \int_0^t \frac{\lambda_1^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_1 x} dx \right] \cdot \bar{F}_2(t) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda_1 t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda_1 t} \bar{F}_2(t). \end{aligned} \quad (17)$$

积分后可得系统首次失效前的平均时间

$$\begin{aligned} \text{MTTF} &= \int_0^\infty R(t) dt = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(i-1)!} \int_0^\infty (\lambda_1 t)^{i-1} e^{-\lambda_1 t} \bar{F}_2(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(-\lambda_1)^{i-1}}{(i-1)!} \int_0^\infty (-t)^{i-1} e^{-\lambda_1 t} \bar{F}_2(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(-\lambda_1)^{i-1}}{(i-1)!} \left\{ \frac{d^{i-1}}{d\lambda_1^{i-1}} \left[\frac{1 - f_2^*(\lambda_1)}{\lambda_1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

2. 系统的瞬时可用度

根据系统瞬时可用度的定义,

$$A(t) = P_r\{S(t) = 0\} = \sum_{i=1}^k \int_0^\infty P_{0i}(t; x) dx.$$

取 L 变换得

$$\begin{aligned} A^*(s) &= \sum_{i=1}^k \int_0^\infty P_{0i}^*(s; x) dx = \begin{bmatrix} \int_0^\infty P_{01}^*(s; x) dx \\ \int_0^\infty P_{02}^*(s; x) dx \\ \vdots \\ \int_0^\infty P_{0k}^*(s; x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{\nu_1 x} \bar{F}_2(x) dx \\ \int_0^\infty e^{\nu_2 x} \bar{F}_2(x) dx \\ \ddots \\ \int_0^\infty e^{\nu_k x} \bar{F}_2(x) dx \end{bmatrix} T' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^k C_i \frac{1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}]}{s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}} \cdot \frac{1 - [g_1^*(s)]^{-1}}{1 - a_i} \quad (19)$$

用 Laplace 变换的终值定理可由 (19) 式导出系统的稳态可用度

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot A^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot C_1 \cdot \frac{1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \sqrt[k]{g_1^*(s)}]}{s + \lambda_1 - \lambda_1 \sqrt[k]{g_1^*(s)}} \cdot \frac{1 - [g_1^*(s)]^{-1}}{1 - [\sqrt[k]{g_1^*(s)}]^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{[-f_2^*(0)]' \left\{ 1 - \frac{\lambda_1}{k} [g_1^*(0)]' \right\} g_2^*(0) - f_2^*(0) [g_2^*(0)]'} \\ &\quad \cdot \frac{[-f_2^*(0)]' \left\{ 1 - \frac{\lambda_1}{k} [g_1^*(0)]' \right\} \cdot \frac{1}{[g_1^*(0)]^2} \cdot [g_1^*(0)]'}{1 - \frac{\lambda_1}{k} [g_1^*(0)]' \cdot \frac{1}{k} [g_1^*(0)]^{-(k+1)/k} \cdot [g_1^*(0)]'} \\ &= \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{k \mu_1} \right) + \frac{1}{\mu_2}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{k \mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (20) \end{aligned}$$

其中 $\lambda_2^{-1} = E[\xi_2] = -[f_2^*(0)]'$; $\mu_i^{-1} = E[\eta_i] = -[g_i^*(0)]'$ ($E[\cdot]$ 表示随机变量的数学期望)。

3. 系统的瞬时失效频度

系统在 $(0, t]$ 中的平均失效次数为

$$M_f(t) = \int_0^t W_f(x) dx \quad (21)$$

其中 $W_f(t)$ 是系统的瞬时失效频度^[3]。按文献 [3] 的公式

$$W_f(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^\infty P_{0i}(t; x) \lambda_2(x) dx + \int_0^\infty P_{0k}(t; x) \cdot \lambda_1 dx$$

取 L 变换得

$$\begin{aligned} W_f^*(s) &= \sum_{i=1}^k \int_0^\infty P_{0i}^*(s; x) \lambda_2(x) dx + \int_0^\infty P_{0k}^*(s; x) \cdot \lambda_1 dx \\ &= \sum_{i=1}^k C_i f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}] \frac{1 - [g_1^*(s)]^{-1}}{1 - a_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k C_i \lambda_1 \cdot a_i^{k-1} \cdot \frac{1 - f_2^*[s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}]}{s + \lambda_1 - \lambda_1 \omega_i \sqrt[k]{g_1^*(s)}} \quad (22) \end{aligned}$$

同样, 用 Laplace 变换的终值定理可由 (22) 式导出系统的稳态失效频度 (或称平稳状态下单位时间的平均失效次数)

$$\begin{aligned} f &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_f(t)}{t} = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot W_f^*(s) \\ &= \frac{\frac{\lambda_1}{k} + \lambda_2}{1 + \frac{\lambda_1}{k \mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} = \frac{\lambda_1 + k \lambda_2}{k + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (23) \end{aligned}$$

五、结 束 语

将此模型应用到具体的自动化系统上，可定量地评价自动化系统是否能达到既定的目标。若达不到目标，也能有的放矢地采取改善的措施。同时为了预防突发失效造成的巨大损失，还可以在合理的技术经济指标下人为地选择最佳停机检修时间，使自动化系统的优异性能得到充分的发挥。

参 考 文 献

- [1] 史定华, 两部件串联系统的可靠性分析, 福建师大学报自然科学版, 2(1982), 13—21.
- [2] Barlow R. E. and Proschan F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1975.
- [3] 史定华, 计算可修系统在 $(0, t]$ 中平均故障次数的新方法, 应用数学学报, 1 (1985).

ANALYSIS OF A TWO-UNIT SERIES REPAIRABLE MODEL

Shi Dinghua

(Shanghai Inst. of Railway Techn.)

ABSTRACT

In this paper, a typical two-unit series repairable model is discussed. In the model, failure distribution of one unit is assumed to be Erlang and the other three distributions to be continuous. By using the supplementary variable method, explicit expressions are derived for the Laplace transform of all reliability specifications of the system. This model can be used to analyse the reliability of some automatic systems.