

最优二次型渐近设计法及其应用

姜玉宪 王维尼

(北京航空学院)

摘 要

本文探讨了用闭环系统预期特征值及特征向量确定加权阵, 及依靠最优调节器的渐近特性确定 Riccati 代数方程迭代解起始阵的方法. 据此提出了线性系统最优二次型渐近设计法, 编写了设计程序, 实验结果表明方法是可行的.

一、问题的提出

考虑线性非时变系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(t) = H\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$, $\mathbf{r}(t) \in R^m$. 代价函数为

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{r}(t)^T W \mathbf{r}(t) + \rho \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t)] dt, \quad (3)$$

其中 $W = W^T > 0$, $R = R^T > 0$; $\rho > 0$ 为标量. 若 (A, B) 可稳, $(A, Q^{1/2})$ 可观, 这里 $Q = H^T W H$, 则使 J 取最小值的控制

$$\mathbf{u}(t) = -K(\rho)\mathbf{x}(t)$$

唯一存在. 其中 $K(\rho) = R^{-1}B^T P / \rho$, P 是 Riccati 代数方程

$$0 = PA + A^T P + Q - PGP \quad (4)$$

的解, 这里 $G = BR^{-1}B^T / \rho$. 称 (1)–(3) 式为最优渐近调节器.

这样一个线性最优二次型问题, 工程实践上存在两个困难, 即加权阵 Q , R 的选择和方程式 (4) 的求解. 文献 [1] 提出了一种加权阵的选择方法, 按这种方法, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 使闭环系统的 $(n - m)$ 个特征值及特征向量趋于预期值, 称有穷模态. 另外 m 个趋于无穷, 称无穷模态. 文献 [2] 又作了推广, 使有穷模态的个数小于 $(n - m)$. 原方法使用上的一大困难是如何依据特征值和特征向量的部分分量来计算全部分量并构造 Q , 本文提出了一种解决办法.

式 (4) 的解法有多种, 其中, 迭代法^[3]如果解的起始值选择, 能保证起始闭环系统阵的特征值全部在根平面的左半部, 且接近方程的解, 那么就计算精度、计算机时、内存容量要求都优于其他方法. 本文提出的利用调节器渐近特性, 确定迭代解起始阵的方法, 可使迭代法的优点得到发挥.

二、特征向量的计算和Q阵的构造

1. 基本公式

令 $S^0 = \text{diag}[S_1^0 S_2^0 \cdots S_p^0]$, $S^\infty = \text{diag}[\tilde{s}_1^\infty \tilde{s}_2^\infty \cdots \tilde{s}_{n-p}^\infty]$ 表示闭环系统预期特征值的有穷模态和无穷模态; $X^0 = [\mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_2^0 \cdots \mathbf{x}_p^0]$, $X^\infty = [\mathbf{x}_1^\infty \mathbf{x}_2^\infty \cdots \mathbf{x}_{n-p}^\infty]$ 为其特征向量. 若 X^0 的列向量张成 H 的核空间, 即

$$HX^0 = 0, \quad (5)$$

且 $\text{rank}(HB) = m$, $p = n - m$, $\rho \rightarrow 0$ 时有以下结论^[1]:

$$1) \quad S_i(\rho) \rightarrow s_i^0, \quad i = 1, 2, \cdots, (n - m) \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_i(\rho) \rightarrow \mathbf{x}_i^0 = (s_i^0 I - A)^{-1} B \mathbf{u}_i^0, \quad i = 1, 2, \cdots, (n - m). \quad (7)$$

$$2) \quad s_j(\rho) \rightarrow \tilde{s}_j^\infty = s_j^\infty / \sqrt{\rho}, \quad j = 1, 2, \cdots, m, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_j(\rho) \rightarrow \mathbf{x}_j^\infty = (s_j^\infty / \sqrt{\rho} I - A)^{-1} B \mathbf{u}_j^\infty, \quad j = 1, 2, \cdots, m. \quad (9)$$

$$3) \quad R = (U^\infty)^{-T} (S^\infty)^{-2} (U^\infty)^{-1}, \quad (10)$$

$$W = (HB)^{-T} (U^\infty)^{-T} (U^\infty)^{-1} (HB)^{-1}. \quad (11)$$

其中 $|s_j^\infty| < \infty$, $\mathbf{u}_i^0 \in C^m(R^m)$ 和 $\mathbf{u}_j^\infty \in C^m(R^m)$ 称为控制特征向量. $U^\infty = [\mathbf{u}_1^\infty \mathbf{u}_2^\infty \cdots \mathbf{u}_m^\infty]$.

2. 特征向量的计算

给定 S^0, S^∞ 及 X^0, X^∞ , 使其满足式 (7) 和 (9). 假若特征向量的全部分量均给定, (7) 和 (9) 式的未知数为 $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$. 变换 (7) 和 (9) 式得

$$B \mathbf{u}_i = (S_i I - A) \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (12)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in C^n(R^n)$, $\mathbf{u}_i \in C^m(R^m)$, (12) 式为 $n \times m$ 超定方程组, 只有 $\|B \mathbf{u}_i - (S_i I - A) \mathbf{x}_i\|_2$ 最小意义下的解. 为减小解的近似程度, 根据工程问题的实际需要, 只给定其重要分量, 其余待定. 令 $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \end{bmatrix}$, \mathbf{x}_{i1} 为给定子空间, 维数为 l , \mathbf{x}_{i2} 为待定子空间. (12) 式

经行列置换得

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \end{bmatrix},$$

其中 \mathbf{u}_i 为变换后的控制特征向量. 整理上式得

$$\begin{bmatrix} C_{12} & -B_{11} \\ C_{22} & -B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{i1}.$$

记上式为

$$M \mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad (13)$$

其中 $M = \begin{bmatrix} C_{12} & -B_{11} \\ C_{22} & -B_{22} \end{bmatrix}$ 为 $n \times (n - l + m)$ 阵, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i2} \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = - \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{i1}$. 若 $l < m$, (13) 式有无数解; 若 $l = m$, (13) 式有定解; 若 $l > m$, 其解为它的法方程组 $M^T M \mathbf{y} = M^T \mathbf{z}$ 的解. 用直交分解法(或消元法)得 $\mathbf{y} = E^T (E E^T)^{-1} (D^T D)^{-1} D^T \mathbf{z}$, 其中 $\text{rank } D =$

$\text{rank } E = n - (l - m)$, $M = DE$. 对于复特征值, 为了避免复数运算, 可将(12)式增广为

$$\begin{bmatrix} s_{iR}I_n - A & s_{iI}I_n \\ -s_{iI}I_n & s_{iR}I_n - A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{iR} \\ \mathbf{x}_{iI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\mathbf{u}_{iR} \\ B\mathbf{u}_{iI} \end{bmatrix},$$

其中 s_{iR} , s_{iI} , \mathbf{x}_{iR} , \mathbf{x}_{iI} , \mathbf{u}_{iR} , \mathbf{u}_{iI} 分别为 s_i , \mathbf{x}_i 及 \mathbf{u}_i 的实部和虚部. 解以上方程得复数解.

3. Q 阵的构造

首先构造满足(5)式的 H , 令 $H = [H_{11}I_m]$, 由(5)式得 $[H_{11}I_m] \begin{bmatrix} X_I^0 \\ X_{II}^0 \end{bmatrix} = 0$, 或

$$H_{11}X_I^0 = -X_{II}^0. \quad (14)$$

解(14)式得 H_{11} , 进而计算 H 和 $Q = H^TWH$.

三、Riccati 代数方程迭代解的渐近起始系统阵

定义 1. 预期最优反馈增益阵. 对于(1)–(4)式, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 显然 $\forall \rho > 0$, (4)式的解 $P(\rho)$ 都是唯一正定的. 若对应 $K(\rho) = R^{-1}B^TP(\rho)/\rho$, 可以证明(由表 1 也可看出) $\{\|K(\rho_i)\|\}$ 是递增单调有界序列. 设其上界为 K^* , 称 K^* 为预期最优反馈增益阵. 但 ρ_i 小到一定程度时, $\|K(\rho_i)\|$ 已大到难以实现, 考虑二次型问题对控制加权正定的要求, 事实上 K^* 是无法实现的.

定义 2. 渐近系统起始阵. 虽 K^* 无法实现, 然而 $\forall \rho \in [\rho_0, \rho_1, \dots, 0)$, 集合 $[K_0, K_1, \dots, K^*)$ 使得

$$\text{real} \{ \lambda_i | [\lambda_i I - (A - BK(\rho))] = 0 \} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

成立是无疑的. 因而闭环系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BK^*)\mathbf{x}(t)$ 稳定. 所以 K^* 作为(4)式迭代解系统起始反馈增益阵, 可以使迭代收敛. 称 $(A - BK^*)$ 为渐近系统起始阵.

若渐近设计过程是 $K(\rho) \rightarrow K^*$, 那么对于每个 $\rho = \rho_i$, 则是 $K^* \rightarrow K(\rho_i)$ 的过程. 以下证明 K^* 的存在.

引理. $\{s_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ 分别是闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x}(t)$$

的特征值和特征向量的充分必要条件是:

$$(1) (s_i I - A)^{-1} B\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(2) \mathbf{u}_i = -K\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $s_i \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $\mathbf{x}_i \in C^n(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^m)$. 此引理证明见文献[4].

定理. 若 $\{s_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ 分别为闭环系统的特征值和特征向量(即满足引理的两个条件), 则

$$K^* = -U(X)^{-1} \quad (15)$$

为唯一实数阵的条件是

$$(1) \{\mathbf{x}_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ 线性无关};$$

$$(2) \text{当 } s_i = (s_j)^* \text{ 时, 有 } \mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_j)^*, \quad i \neq j.$$

其中 $U \triangleq [\mathbf{u}_1^0 \mathbf{u}_2^0 \cdots \mathbf{u}_{n-m}^0 \mathbf{u}_1^\infty \mathbf{u}_2^\infty \cdots \mathbf{u}_m^\infty]$, $X \triangleq [X^0 : X^\infty]$.

证. 首先确定 $\rho \rightarrow 0$ 时, K^* 和 $\{s_i\}$ 及 $\{x_i\}$ 的关系. 由 (7)–(9) 式知, $\rho \rightarrow 0$ 渐近调节器的特征值和特征向量有界, 分别为 $S = \text{diag} [S^0 : S^\infty]$ 和 $X = [X^0 : X^\infty]$, 反馈增益阵 $K(\rho)$ 的界为 K^* , 对于极限系统

$$\dot{x}(t) = (A - BK^*)x(t), \quad x(0) = x_0,$$

它的特征值和特征向量应满足等式 $(A - BK^*)x_i = s_i x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 若 s_i 不为 A 的谱点, 可写成

$$x_i = (s_i I - A)^{-1} BK^* x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

又由引理知, 该极限系统其 $\{s_i\}$ 和 $\{x_i\}$ 应满足

$$x_i = (s_i I - A)^{-1} B u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

式 (16) 和 (17) 等价, 故有 $u_i = -K^* x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 或

$$U = -K^* X. \quad (18)$$

以下证明 K^* 是唯一实数阵. 由定理条件 (1), 且当 $s_i \in R^1, u_i \in R^m, x_i \in R^n$ 时, 显然 $K^* = -U(X)^{-1}$ 为唯一实数阵. 若 $s_i \in C^1$, 据条件 (2) 有 $(s_j)^* = s_i, i \neq j$; 且有 $(u_j)^* = u_i$. (18) 式可写为

$$[u_1 \cdots u_{iR} + j u_{iI} \quad u_{iR} - j u_{iI} \cdots u_n] = -K^* [x_1 \cdots x_{iR} + j x_{iI} \quad x_{iR} - j x_{iI} \cdots x_n].$$

其中 $u_{iR}, u_{iI}, x_{iR}, x_{iI}$ 分别是各复数量的实部和虚部. 等式两边同乘非奇阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ \hline & 1/2 & -j/2 & & \\ 0 & 1/2 & j/2 & & 0 \\ \hline & & & & 1 \\ 0 & & 0 & & \end{bmatrix},$$

得 $[u_1 \cdots u_{iR} u_{iI} \cdots u_n] = -K^* [x_1 \cdots x_{iR} x_{iI} \cdots x_n]$.

若 $x_{iR} \neq x_{iI}$, 则 U 和 X 的各列是线性独立的实数向量, 故 K^* 是唯一实数阵.

因 K^* 是 $\rho \rightarrow 0$ 时 $K(\rho)$ 的上界, 所以总可选定一个 ρ_i , 使得 $K(\rho_i)$ 接近 K^* . 故 $(A - BK^*)$ 作为 (4) 式迭代解的起始阵, 可缩短迭代过程.

四、设计步骤和程序

1. 设计步骤

1) 根据对系统动态特性的要求和实现的可能性, 给定闭环系统的预期特征值 $\{s_i\}_{i=1}^n$; 由模态间解耦或耦合的要求, 给定特征向量 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 的部分分量, 并且满足 $l \geq m$ 及以上定理条件;

2) 根据给定的 $\{s_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中的部分分量, 计算出满足等式 (7) 和 (9) 的特征向量的未知分量和 $\{u_i\}_{i=1}^n$, 得 X 和 U ;

3) 计算 $K^* = -U(X)^{-1}, A_0 = A - BK^*$;

4) 据 (10) 式, (11) 式, (14) 式和 $H = [H_{11} I_m]$ 及 $Q = H^T W H$ 计算 Q, R ;

5) 给定 ρ_i , 解 (4) 式, 得 $K(\rho_i)$;

6)检查闭环系统性能,若符合要求,过程停止,否则 $\rho_{i+1} = \rho_i - \Delta\rho$ 转第五步.

2. 设计程序.

程序用 FORTRAN IV 写成. 主要功能: ① 检查系统的可控性和可观性; ② 计算系统的特征值; ③ 计算起始条件下的系统响应; ④ 计算 Q, R ; ⑤ 牛顿法迭代求解 Riccati 方程,并确定迭代解的起始值.通过主程序对各功能进行组合,可完成最优调节器、滤波器的设计.

主要子程序和算法有: 主要子程序为 Q, R 计算子程序; A_0 计算子程序; 矩阵求逆子程序;特征值算法子程序 ($Q-R$ 法);牛顿法迭代求解 Riccati 方程子程序;系统响应子程序(矩阵指数级数展开法)等.

使用. 按格式输入 $\{s_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n$ 的部分分量及 A, B, C (输出阵), x_0 . 输出信息有最优反馈增益阵 K 、闭环系统的特征值和系统响应.

五、渐近设计法在伺服系统设计中的应用

图 1 为实验用直流伺服系统物理模型, 图 2 为其数学模型. 若将其视为线性系统, 设计参数符合性能要求, 但摩擦力矩较大(静摩擦力矩为 80—100 克厘米, 动摩擦力矩为 50—70 克厘米, 最大输出力矩仅 350 克厘米), 低速性能不好(最小平稳速度为 5—8 度/秒), 如图 3 所示.

用本文方法对系统重新设计, 数学模型为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

其中

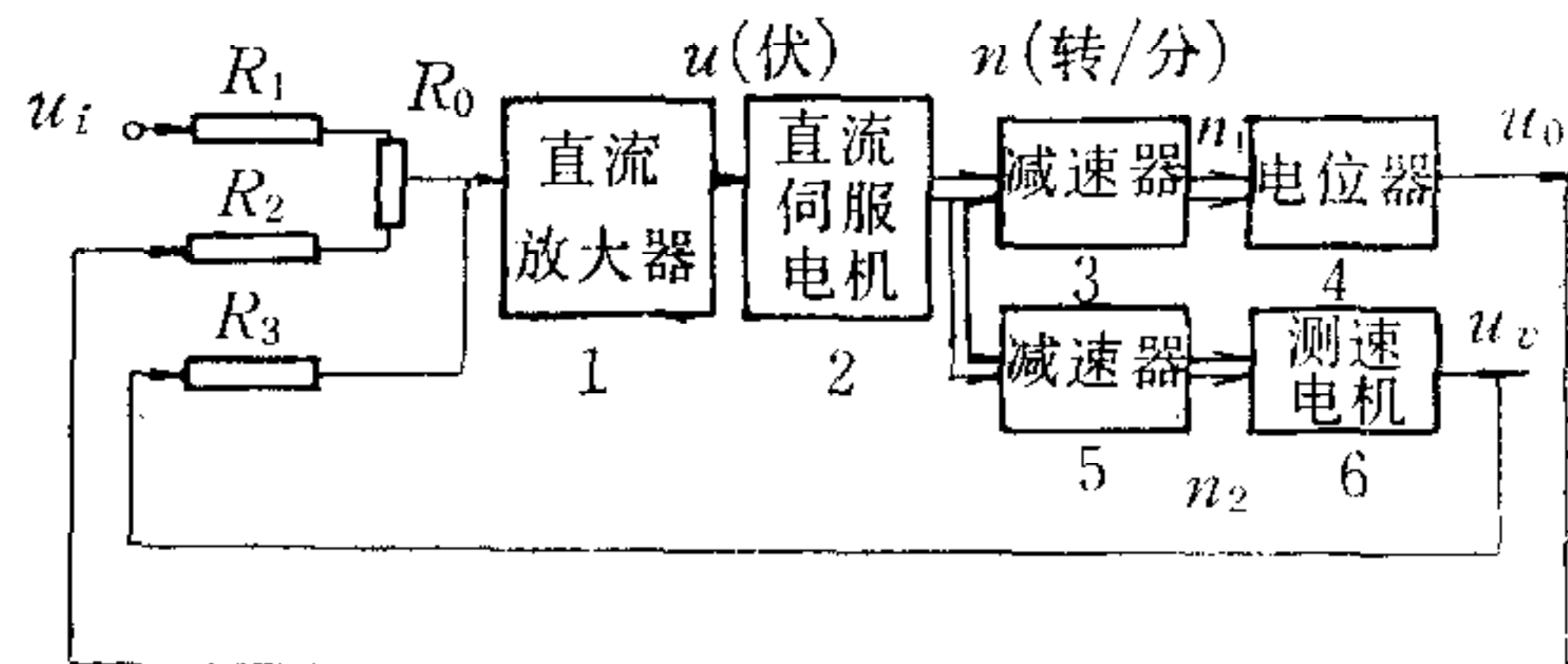


图 1 原系统物理模型图
符号 \Rightarrow 表示齿轮传动.

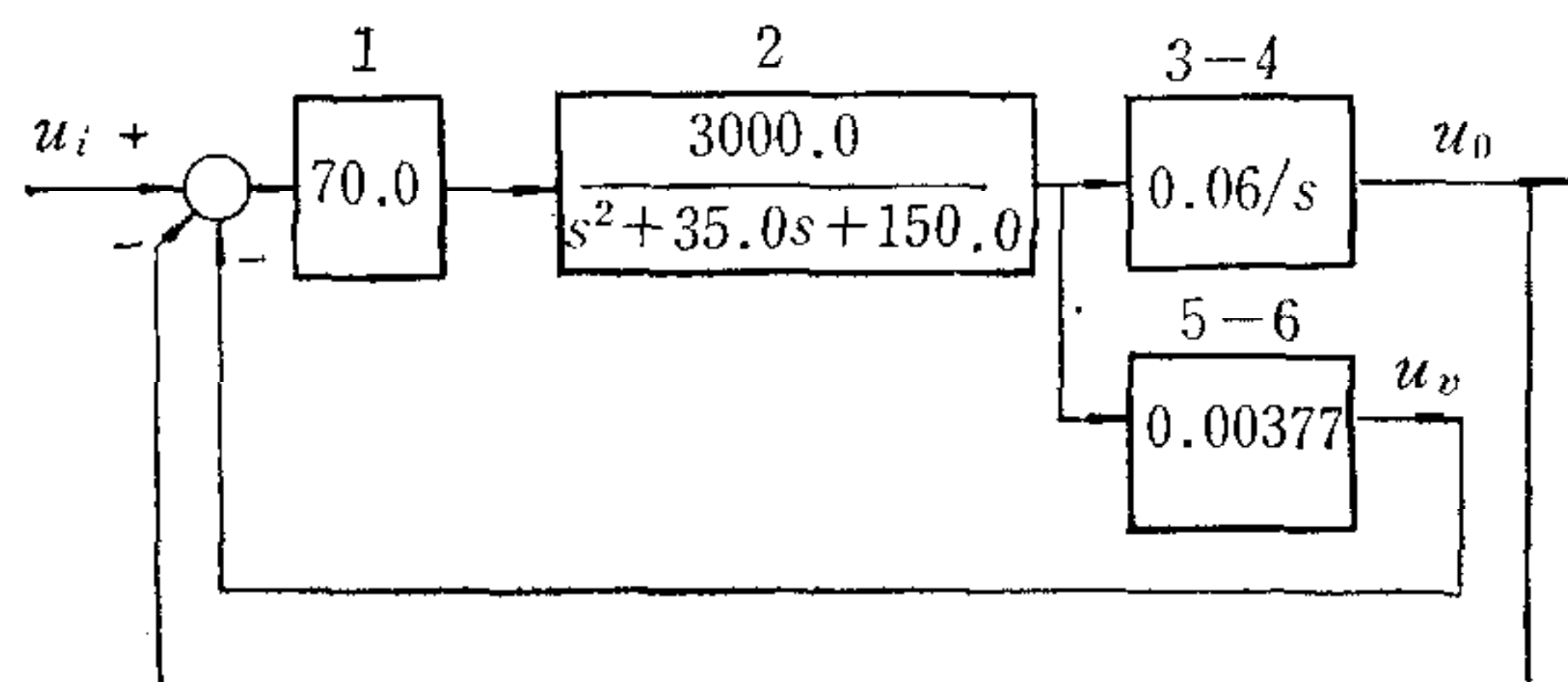


图 2 原系统传递函数形式模型及参数

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ -12600.0 & -793.0 & -35.0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 12600.0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ \dot{u}_0(t) \\ \ddot{u}_0(t) \end{bmatrix}.$$

给定预期特征值 S , 依据文献 [5](12) 式, 增大系统自然频率, 改善系统稳定性, $S = \text{diag} [-70 + j10 \quad -70 - j10 \quad -100/\sqrt{\rho}]$. 给定预期特征向量部分分量, 使

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & \nu & \nu \\ \nu & 1.0 & \nu \\ \nu & \nu & 1.0 \end{bmatrix},$$

其中 ν 为待定分量. 计算得

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1280 & 0.0 \\ -71.29 & 1.0 & 0.0 \\ 4980.0 & -782.9 & 0.9954 \end{bmatrix}.$$

Q, R 及不同 ρ 值的闭环系统参数为

$$Q = \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^7 & 7.0 \times 10^5 & 5.0 \times 10^3 \\ 7.0 \times 10^5 & 1.9 \times 10^4 & 1.4 \times 10^2 \\ 5.0 \times 10^3 & 1.4 \times 10^2 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$R = 1.6 \times 10^6.$$

表 1 不同 ρ 值闭环系统的参数

ρ	1			0.01			0.0001		
K	3.07	0.168	0.003	35.6	1.16	0.0108	35.7	10.1	0.073
闭环特征值	-34.0	$-20.0 \pm j23.0$		-57.9	$-76.7 \pm j52.0$		-1000.9	$-69.7 \pm j12.0$	

图 4 表示实现原理图, 参数为表 1 第三组. \ddot{u}_0 采用常规方法测量, 如图 4 所示. 图 5

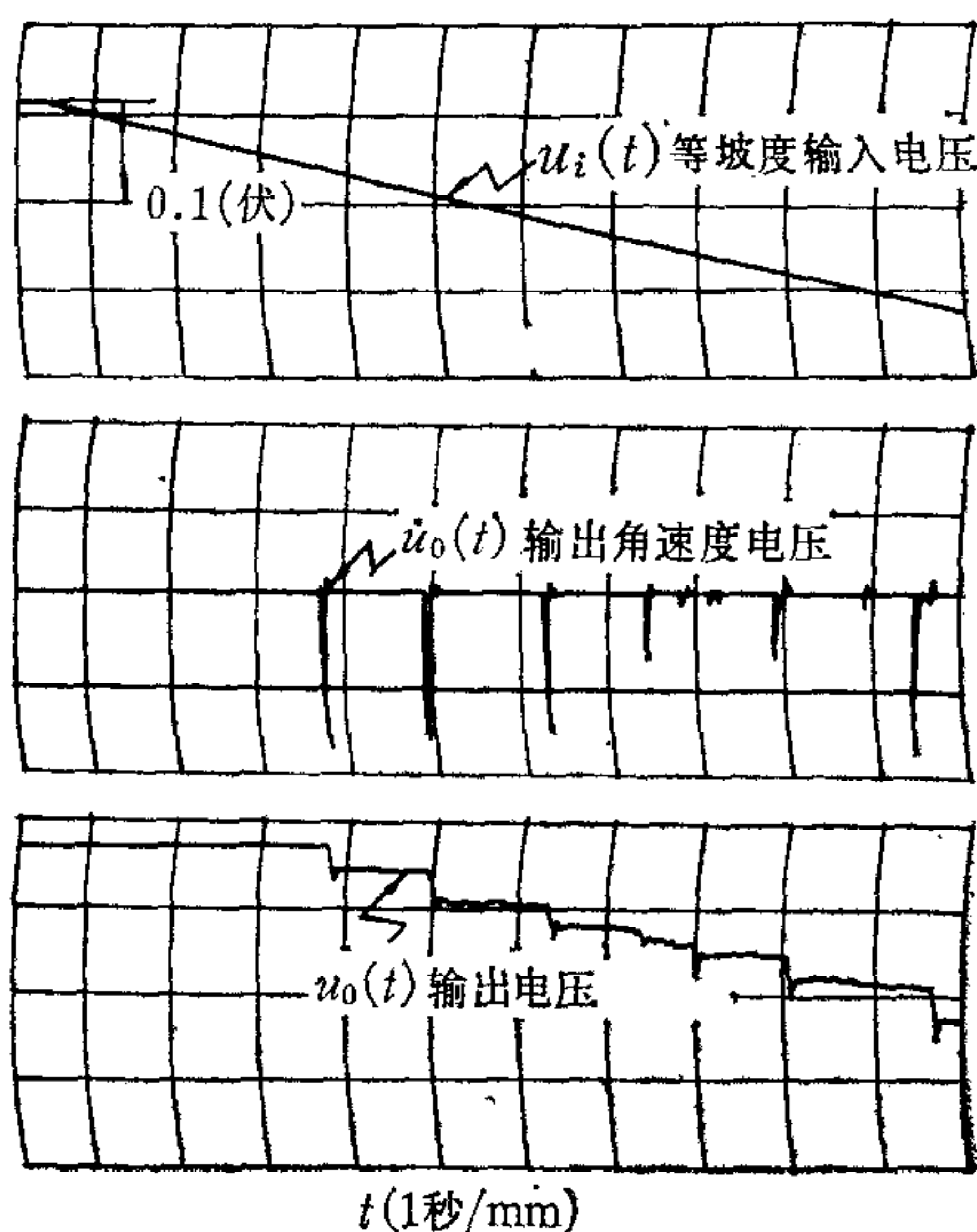


图 3 原系统的低速性能

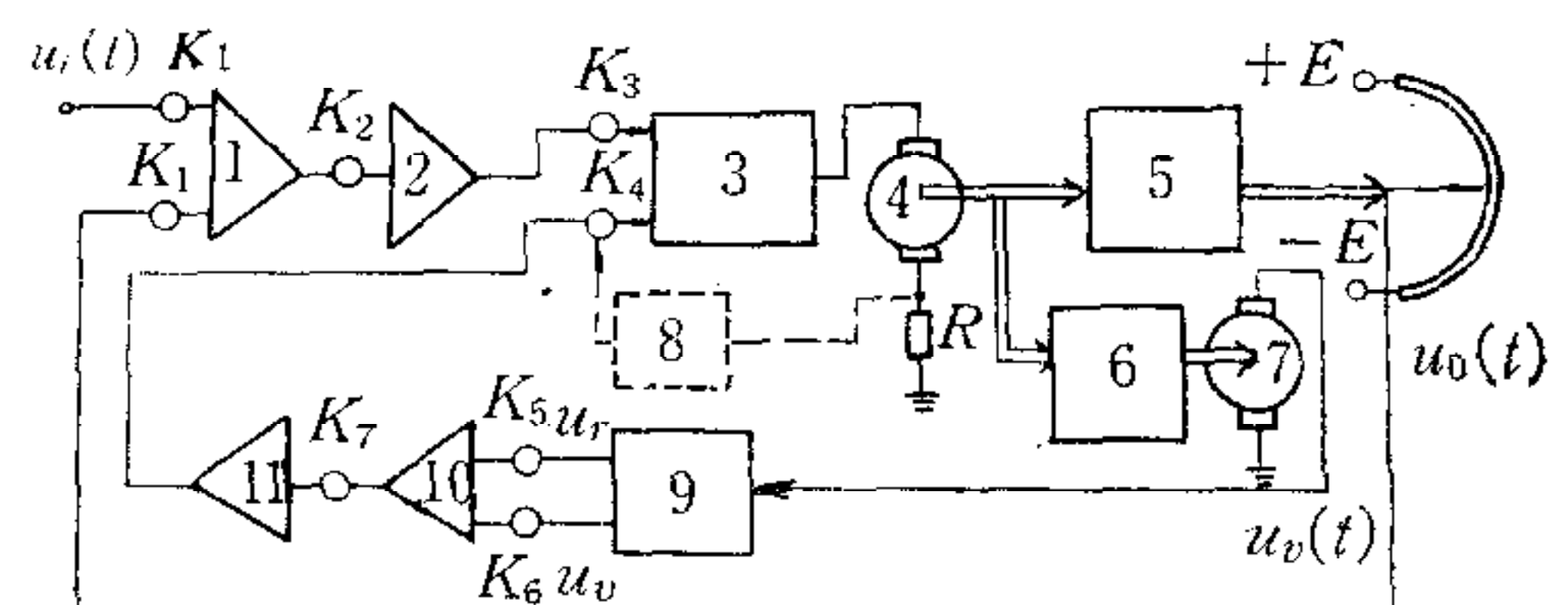


图 4 最优渐近伺服系统实现原理图

- 注: (1) 图中 1, 2, 10, 11 为运算放大器, $\{K_i\}_{i=1}^7$ 为放大倍数.
- (2) 图中 3 为原系统直流放大器. 4, 7 分别为电机和测速电机. 5, 6 为减速器. 8, 9 分别为衰减及比例微分网络.

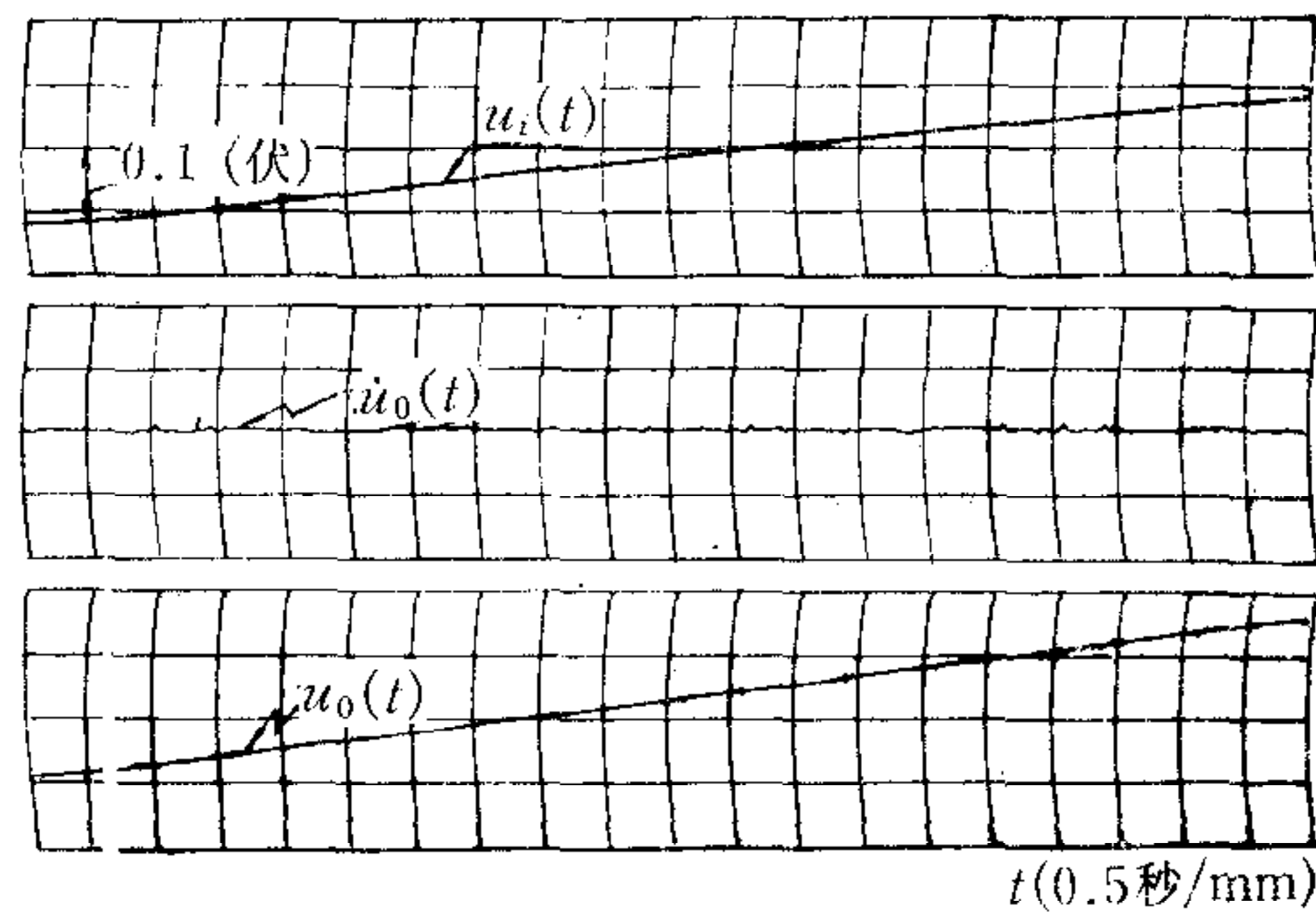


图5 最优渐近伺服系统低速性能

是与图3同样条件下的系统响应, 低速性能得到改善, 最小平稳速度测量结果为0.0418度/秒。

讨 论

这种方法可自行确定加权阵, 不但实现闭环系统特征值的配置, 而且能按需要改变特征向量的方向。有较完整的设计程序, 所以使用方便。通过应用和实验, 证明方法是可行的。使用时需注意物理模型和数学模型的一致, 及预期特征值的可实现性, 否则会因 K 值大, 引起系统振荡。此方法虽使 Riccati 方程求解有所改进, 但其收敛性仍有局限性。

参 考 文 献

- [1] Harvey C. A. and Stein G., Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, *IEEE, Trans.*, AC-23 (1978), 378—387.
- [2] Stein G., Generalized Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, *IEEE, Trans.*, AC-24(1979), 559—566.
- [3] Kleinman D. L., On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations, *IEEE, Trans.*, AC-13 (1968), 114—115.
- [4] Moore B. C., On the Flexibility Offered by State Feed back in Multivariable Systems Beyond Closed loop Eigenvalue Assignment, *IEEE, Trans.*, AC-21(1976), 689—691.
- [5] 姜玉宪, 伺服系统的低速跳动问题, *自动化学报*, 第八卷(1982), 136—144.

OPTIMAL QUADRATIC ASYMPTOTIC DESIGN APPROACH AND ITS APPLICATIONS]

JIANG YUXIAN WANG WEINI
(Beijing Institute of Aeronautics)

ABSTRACT

In this paper, the determination of weighting matrices by expected eigenvalues and expected eigenvectors in closed-loop systems, and the determination of initial matrix of iterative solutions to the Riccati algebraic equation by the asymptotic optimal regulator behaviour are studied. Based on this, an optimal quadratic asymptotic design approach for linear regulators is presented. A program has been developed. Test results show that this method is feasible.