第11卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 2
1985 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1985

量测系统的能观度和状态估计精度[1)]

邢 光 谦
（北京控制工程研究所）

摘　　要

本文将控制理论的能观度概念运用到姿态估计的精度分析，建立了能观度和精度之间的解析关系，指出能观度可作为比较量测模型优劣的数字特征，解决了量测模型的选择问题.

此外，本文将文献［1］中有关冗余量测系统优点的结论，从姿态确定系统推广到一般量测系统，为实际设计中运用冗余量测信息，构造最好的量测模型提供了理论依据.

文献［1］就卫星姿态确度问题，定义了“冗余量测系统”，分析和证明了使用冗余量测模型 $(\theta_s/\theta_e/\lambda_{se})$ 所得到的姿态估计精度比非冗余量测模型 $(\theta_s/\theta_e,\ \theta_s/\lambda_{se},\ \theta_e/\lambda_{se})$ 的姿态估计精度要高. 为解决上述结论对一般量测系统是否成立的问题，本文引入了量测系统的能观度概念，由此建立系统能观度和状态最优估计精度的解析关系，把对系统精度的研究转化成对系统能观度的研究. 解决冗余量测系统能观度和非冗余量测系统能观度的关系以及能观度和量测时间（或次数）的关系问题.

一、能观性、能观度和精度

所谓量测系统的能观性，是指通过量测量在有限时间内的量测确定系统状态的能力. 首先讨论一个确定性系统的能观性问题. 设定性离散系统为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \phi_{k,k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k = H_k\boldsymbol{x}_k. \end{cases} \tag{1}$$

假定已量测到一系列量测数据 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots \boldsymbol{y}_k$，能观性问题就是讨论由这些量测数据确定系统状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的条件. 事实上，从给定条件不难把量测和状态的关系，写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_k. \tag{2}$$

---

1) 本文曾在 1982 年 7 月国际自控联和欧空局联合召开的空间控制会议上宣读（The IFAC/ESA Symposium On Automatic Control in Space, Noordwijkerhout, The Netherlands, 5—9 July 1982）. 本文修改稿于 1983 年 1 月 24 日收到.

将 (2) 式两边乘以 $\begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix}$ 得

$$\begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix}^{\tau} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix}^{\tau} \begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_k. \tag{3}$$

令

$$W_0(0, k) = \begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix}^{\tau} \begin{pmatrix} H_1\phi_{1,k} \\ H_2\phi_{2,k} \\ \vdots \\ H_k\phi_{k,k} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} H_i \phi_{i,k}, \tag{4}$$

则 (3) 式可写成

$$W_0(0, k)\boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} \boldsymbol{y}_i. \tag{5}$$

从 (5) 式清楚地看出，要想从 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots \boldsymbol{y}_k$ 中确定 $\boldsymbol{x}_k$，其充分必要条件是矩阵 $W_0(0, k)$ 非奇异. 这一条件是判别时变离散系统是否能观的准则. $W_0(0, k)$ 称为能观性矩阵.

若考虑有随机噪声存在，系统 (1) 可换成随机系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \phi_{k,k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k = H_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k. \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$E\{\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_j^{\tau}\} = R_k \delta_{kj}.$$

此时，系统 (6) 的能观阵定义是

$$W_0(0, k) = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} R_i^{-1} H_i \phi_{i,k}. \tag{7}$$

类似 (5) 式，有

$$W_0(0, k)\boldsymbol{x}_k = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} R_i^{-1} \boldsymbol{y}_i. \tag{8}$$

若系统是完全能观的，则 $W_0(0, k) > 0$. 根据 (8) 式可得状态估计

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = W_0^{-1}(0, k) \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} R_i^{-1} \boldsymbol{y}_i. \tag{9}$$

而估计误差方差阵 P_k 为

$$P_k = E\{(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\tau}\} = W_0^{-1}(0, k). \tag{10}$$

其中 $W_0(0, k)$ 由 (7) 式决定.

由估计理论知道，(9)，(10) 两式是加权最小二乘估计及其估计误差方差阵. 在最小二乘估计中，不考虑状态的先验信息，若考虑这一信息，设状态的初始估计为 $\hat{\boldsymbol{x}}_0$，其估

计误差的方差阵 P_0 也是给定的，则对应于系统 (6) 的状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的最小线性方差估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = (\phi_{0,k}^{\tau} P_0^{-1} \phi_{0,k} + W_0(0, k))^{-1} \left\{ \phi_{0,k}^{\tau} P_0^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_0 + \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau} H_i^{\tau} R_i^{-1} \boldsymbol{y}_i \right\}. \tag{11}$$

估计误差方差阵 P_k 为

$$P_k = (\phi_{0,k}^{\tau} P_0^{-1} \phi_{0,k} + W_0(0, k))^{-1}. \tag{12}$$

从以上分析可以清楚地看出，无论是最小二乘估计(9)式或是最小线性方差估计(11)式，只要量测系统是完全能观的，即只要 $W_0(0, k) > 0$，其相应的估计总是存在的．从另方面看，系统的能观性只能回答系统的状态能不能从量测输出来确定．而确定的好坏，并不能反映．为了评价一系统状态估计好坏的能力，即精度问题，则有必要引入量测系统能观度的概念．

用 $\bar{\nu}$ 表示量测系统的能观度．给定一系统，它的能观度定义为

$$\bar{\nu}(k) = \frac{n}{\operatorname{tr} W_0^{-1}(0, k)}. \tag{13}$$

其中 $\operatorname{tr}(\cdot)$ 是矩阵追迹符号；n 是状态维数．

状态估计的精度一般反映在估计误差方差阵 P_k 上，特别反映在 $\operatorname{tr} P_k$ 是随机矢量 $\boldsymbol{x}_k$ 的估计误差方差上．因此用 $\operatorname{tr} P_k$ 表示估计精度，并令

$$\sigma^2 = \operatorname{tr} P_k, \tag{14}$$

对于最小二乘估计，由 (10) 式和 (13) 式可得

$$\sigma^2 = \operatorname{tr} P_k = \operatorname{tr} W_0^{-1}(0, k) = \frac{n}{\bar{\nu}(k)}. \tag{15}$$

对于线性最小方差估计，考虑到 (13) 式，则有

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \operatorname{tr} P_k &= \operatorname{tr} \{ \phi_{0,k} P_0^{-1} \phi_{0,k} + W_0(0, k) \}^{-1} \\ &\leqslant \operatorname{tr} W_0^{-1}(0, k) = \frac{n}{\bar{\nu}(k)}. \end{aligned} \tag{16}$$

(15) 和 (16) 两式即为所求的关系式，它反映了状态估计精度与量测系统的能观度之间的关系．不难看出，能观度越高，系统状态估计误差就越小．也就是说，能观度越高，精度也越高．值得指出的是，系统的能观度仅仅依赖于量测系统本身的 H 和 Φ 阵，和量测数据本身无关．

如果考虑动态系统存在的系统噪声，则动态系统方程可写成

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \phi_{k,k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \boldsymbol{w}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k. \end{cases} \tag{17}$$

其中

$$E\{\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_j^{\tau}\} = R_k \delta_{kj}, \qquad E\{\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_j^{\tau}\} = Q_k \delta_{kj}.$$

由估计理论，可以知道系统 (17) 的线性最小方差估计的误差方差阵 P_k 满足下列不等式

$$P_k \leqslant (\phi_{0,k} P_0^{-1} \phi_{0,k} + W_0(0, k))^{-1} + W_c(0, k). \tag{18}$$

其中

$$W_c(0, k) = \sum_{i=1}^{k} \phi_{k,i} \Gamma_{i,i-1} Q_{i-1} \Gamma_{i,i-1}^{\tau} \phi_{k,i}^{\tau}. \tag{19}$$

$W_c(0, k)$ 称为系统能控性矩阵.

若系统是完全能控的，即当 $W_c(0,k) > 0$ 时，从 (18) 式不难得到

$$\sigma^2 = \mathrm{tr}P_k \leqslant \mathrm{tr}\{(\phi_{0,k}^{\tau}P_0^{-1}\phi_{0,k} + W_0(0, k))^{-1} + W_c(0, k)\}$$

$$\leqslant \mathrm{tr}W_0^{-1}(0,k) + \mathrm{tr}\,W_c(0, k) = \frac{n}{\bar{\nu}(k)} + \mathrm{tr}W_c(0,k). \tag{20}$$

从 (20) 式清楚地看出，对于存在系统噪声 $\boldsymbol{w}_k$ 的动态系统 (17)，若是完全能控的，有关状态估计精度和能观度的关系与无系统噪声情况相同，即能观度越高，状态估计误差越小，亦即精度越高. 因为能观度依赖于量测矩阵 H 和状态转移矩阵 ϕ，不依赖于量测数据，故可把它作为比较量测模型好坏的一个性能准则. 显然，应该选择能观度最高的量测模型，以便获得最高精度的估值.

二、能观度和量测时间的关系

根据定义，能观度和量测时间(或量测次数)有关，就离散系统而言，应该搞清楚量测时间增加(量测次数增加)时，能观度的变化.

假定已经进行了 k 次量测，量测数据是 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots \boldsymbol{y}_k$，根据定义，系统的能观阵为

$$W_0(0, k) = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,k}^{\tau}H_i^{\tau}R_i^{-1}H_i\phi_{i,k}.$$

令使能观阵正定的最小正整数为 ν，一般取 $k \geqslant \nu$. 这时有 $W_0(0, k) > 0$.. 系统状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的能观度为

$$\bar{\nu}(k) = \frac{n}{\mathrm{tr}\,W_0^{-1}(0,k)}.$$

若再增加一次量测，其对应的能观阵用 $W_0(0, k+1)$ 表示，即

$$W_0(0, k+1) = W_0(0, k) + \phi_{k+1,k}^{\tau}H_{k+1}^{\tau}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\phi_{k+1,k}, \tag{21}$$

其对应的能观度为

$$\bar{\nu}(k+1) = \frac{n}{\mathrm{tr}W_0^{-1}(0, k+1)}.$$

令

$$\phi_{k+1,k}^{\tau}H_{k+1}^{\tau}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\phi_{k+1,k} = \Delta W_0(0, k),$$

则有

$$W_0(0, k+1) = W_0(0, k) + \Delta W_0(0, k). \tag{22}$$

假定 $\Delta W_0(0,k) > 0$，有下列不等式[4]

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\det\,(W_{0i}(0, k) + \Delta W_{0i}(0, k))}{\det\,(W_0(0, k) + \Delta W_0(0, k))}\right\}^{-1} \geqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\det W_{0i}(0, k)}{\det W_0(0, k)}\right\}^{-1}$$

$$+ \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\det \Delta W_{0i}(0, k)}{\det \Delta W_0(0, k)}\right\}^{-1}. \tag{23}$$

其中 n 是 $W_0(0, k)$ 的阶，$\det W_{0i}(0, k)$ 是 $(n-1)$ 阶 $W_0(0, k)$ 的主子式. 因

$$W_0^{-1}(0,k)=\frac{\operatorname{adj} W_0(0,k)}{\det W_0(0,k)},$$

有

$$\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\det W_{0i}(0,k)}{\det W_0(0,k)}.$$

同样可得

$$\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k+1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\det(W_{0i}(0,k)+\Delta W_{0i}(0,k))}{\det(W_0(0,k)+\Delta W_0(0,k))},$$

$$\operatorname{tr} \Delta W_0^{-1}(0,k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\det \Delta W_{0i}(0,k)}{\det \Delta W_0(0,k)}.$$

由 (23) 式可以推得

$$\{\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k+1)\}^{-1}\geqslant\{\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k)\}^{-1}+\{\operatorname{tr}\Delta W_0^{-1}(0,k)\}^{-1}, \tag{24}$$

即

$$\bar{\nu}(k+1)\geqslant\bar{\nu}(k)+\frac{n}{\operatorname{tr}\Delta W_0^{-1}(0,k)}. \tag{25}$$

当

$$\Delta W_0(0,k)=\phi_{k+1,k}^{\tau}H_{k+1}^{\tau}R_{k+1}^{-1}H_{k+1}\phi_{k+1,k}$$

非负定时,可以证明

$$\bar{\nu}(k+1)\geqslant\bar{\nu}(k). \tag{26}$$

为证明 (26) 式,首先引用下列引理[5]:

设 $A\in C^{n\times n}$, $B\in C^{n\times n}$ 的埃尔米特矩阵,将 A $A+B$ 的特征值按照大小顺序编号,即 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\cdots\geqslant\lambda_n$, 当 B 非负定时,有

$$\lambda_i(A+B)\geqslant\lambda_i(A),\qquad (i=1,2,\cdots n). \tag{27}$$

因 $W_0(0,k)$ 对称正定, $\Delta W_0(0,k)$ 对称非负定,即 $W_0(0,k)>0$, $\Delta W_0(0,k)\geqslant 0$, 故根据上述引理,有

$$\lambda_i(W_0(0,k))>0,\ \lambda_i(\Delta W_0(0,k))\geqslant 0,\ \lambda_i(W_0(0,k+1))>0. \tag{28}$$

根据 (27) 式,有

$$\lambda_i(W_0(0,k+1))=\lambda_i(W_0(0,k)+\Delta W_0(0,k))\geqslant\lambda_i(W_0(0,k)). \tag{29}$$

根据 (29) 式,有

$$\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k+1))}\leqslant\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k))},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k+1))}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k))}. \tag{30}$$

因

$$\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k+1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k+1))},\quad \operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i(W_0(0,k))},$$

故 (30) 式即为

$$0<\operatorname{tr} W_0^{-1}(0, k+1) \leqslant \operatorname{tr} W_0^{-1}(0, k). \tag{31}$$

亦即

$$\bar{\nu}(k+1) \geqslant \bar{\nu}(k), \qquad \text{证毕}. \tag{31}$$

方程 (31) 式清楚地表明，同一量测系统使用的量测数据越多(或观测时间越长)，它的能观度就越高. 即使在第 $k+1$ 次量测 $\phi_{k+1,k}^{\tau} H_{k+1}^{\tau} R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \phi_{k+1,k}$ 为非负定时，能观度也不会比第 k 时刻的能观度低.

三、冗余量测系统的能观度

设给定一冗余量测系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k=\phi_{k,k-1} \boldsymbol{x}_{k-1}, \\ \boldsymbol{y}_k^*=\begin{pmatrix} H_k \\ h_k \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_k+\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_k \\ v_k \end{pmatrix}=H_k^* \boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k^*. \end{cases} \tag{32}$$

其中 H_k 为原量测系统的量测几何阵；h_k 为冗余量测几何阵；$\boldsymbol{v}_k$ 为原量测系统量测噪声；v_k 为冗余量测的量测噪声.

其统计特性为

$$E\{\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_j^{\tau}\}=R_k \delta_{kj}, \qquad E\{v_k v_j^{\tau}\}=r_k \delta_{kj},$$

$$E\{\boldsymbol{v}_k^* \boldsymbol{v}_j^{*\tau}\}=\begin{pmatrix} R_k & 0 \\ 0 & r_k \end{pmatrix}.$$

冗余量测系统的能观阵为

$$\begin{aligned} W_0^*(0, k) &=\sum_{i=1}^k \phi_{i,i-1}^{\tau}\begin{pmatrix} H_i \\ h_i \end{pmatrix}^{\tau}\begin{pmatrix} R_i & 0 \\ 0 & r_i \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} H_i \\ h_i \end{pmatrix} \phi_{i,i-1} \\ &=W_0(0, k)+\sum_{i=1}^k \phi_{i,i-1}^{\tau} h_i^{\tau} r_i^{-1} h_i \phi_{i,i-1}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$W_0(0, k)=\sum_{i=1}^k \phi_{i,i-1}^{\tau} H_i^{\tau} R_i^{-1} H_i \phi_{i,i-1}. \tag{34}$$

$W_0(0, k)$ 为原系统能观阵. 因 $\sum_{i=1}^k \phi_{i,i-1}^{\tau} h_i^{\tau} r_i^{-1} h_i \phi_{i,i-1}$ 是为对称非负定，故只要将 (21) 式中 $\phi_{k+1,k}^{\tau} H_{k+1}^{\tau} R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \phi_{k+1,k}$ 的位置用 $\sum_{i=1}^k \phi_{i,i-1}^{\tau} h_i^{\tau} r_i^{-1} h_i \phi_{i,i-1}$ 代替，就完全可以用前节相同方法证明

$$\bar{\nu}^*(k) \geqslant \bar{\nu}(k). \tag{35}$$

其中

$$\bar{\nu}^*(k)=\frac{n}{\operatorname{tr} W_0^{*-1}(0, k)}, \quad \text{冗余量测系统能观度；}$$

$$\bar{\nu}(k)=\frac{n}{\operatorname{tr} W_0^{-1}(0,k)},\qquad \text{原量测系统能观度.}$$

(35) 式清楚地表明，冗余量测系统的能观度比原系统能观度高，其状态估计精度也比原系统的状态估计精度高.

四、结 论

(1) 为了解决量测模型的选择问题，本文将系统控制理论中能观度的概念运用到姿态确定的精度分析中. 对于一般量测系统，建立了能观度和系统状态估计精度的解析关系. 由于能观度仅和系统参数有关，而和量测数据无关，故可比较方便地作为量测系统状态估计精度的数字特征. 根据它可从多个量测模型中进行最优选择.

(2) 找出了系统的能观度和量测时间(量测次数)的关系，即随着量测次数增加，其能观度逐渐增加.

(3) 文中证明了在一般量测系统中冗余量测模型比原量测系统能观度高.

(4) 同一系统能观度越高，对应的系统状态估计精度也越高.

参 考 文 献

[1] 邢光谦，一种提高姿态测量精度的新途径——冗余量测法，自动化学报 **11**，(1985)，第二期.
[2] James R. Wertz, Spacecraft Attitude Determination and Control, D. Reidel Publishing Company, 1978.
[3] Jazwinski, A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York and London, 1970.
[4] 须田信英等著，曹长修译，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979.

DEGREE OF OBSERVABILITY AND ACCURACY OF STATE ESTIMATE FOR GENERAL MEASUREMENT SYSTEM

XING GUANGQIAN
(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

In this paper the concept of degree of observability in modern control theory is applied to the ananlysis of attitude determination accuracy. The analytical relationship between accuracy and degree of observability of a measurement system has been found and it is shown that the degree of observability can be used as mathematical features for selecting the best measurement model.

In addition, the results about redundant measurement model have been extended to general measurement system and provide theoretical basis for constructing the best measurement model in practical design.