

一种提高姿态测量精度的新途径 ——冗余量测法¹⁾

邢光谦

(北京控制工程研究所)

摘 要

关于单轴姿态确定的一般方法和精度分析,国外已有不少文献论及^[1],但无论哪种姿态确定方法都有不可避免的奇点存在.在这些奇点附近确定姿态精度差,没有实用价值.为了获得较好的姿测效果,人们只得精心选择发射卫星的日期和时刻,使得姿测期间避开这些奇点.为了克服这一困难,本文提出了冗余量测的概念.使用冗余量测信息模型确定姿态,改善了通常方法的奇点分布,提高了姿测精度,扩大了发射窗口.

一、两类基本姿态确定方法的精度分析

应用一次量测数据确定卫星单轴姿态的几何方法在文献[1]中已有详尽的讨论.这些方法的区别在于使用的量测量不同.量测量一般分为弧长角量测量和旋转角量测量两类.由量测量的不同组合构成各种不同的姿态确定方法.主要用两个参考基准的弧长角确定姿态及利用一个参考基准的弧长角和一个旋转角确定姿态两类方法.为了便于问题的叙述,不失一般性,仍假定这两个姿态参考基准分别为太阳方向矢量和地心方向矢量.

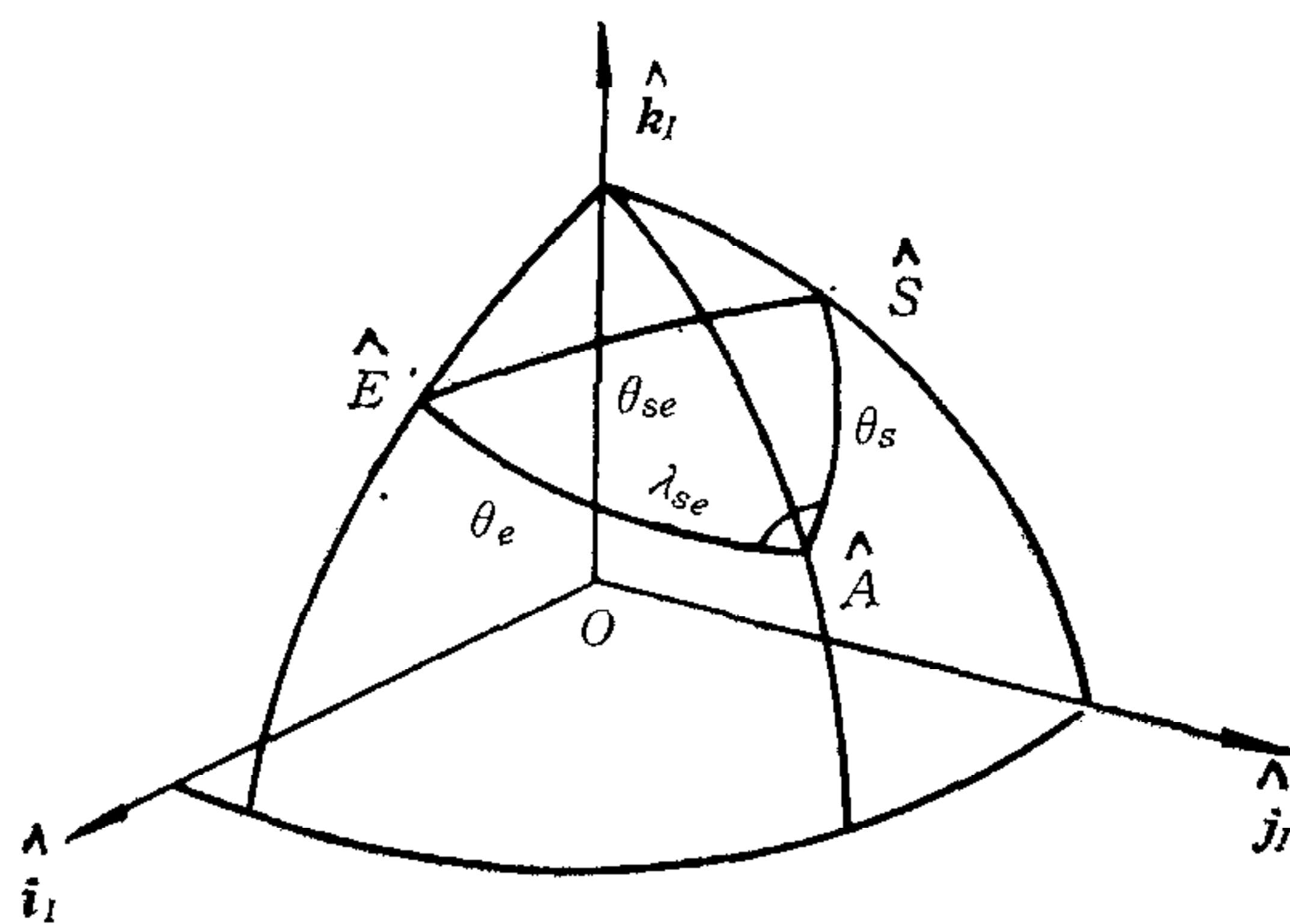


图1 卫星质心惯性系中量测几何

1) 本文曾在 1982 年 7 月国际自控联和欧空局联合召开的空间控制会议上宣读 (The IFAC/ESA Symposium On Automatic Control In Space, Noordwijkerhout, The Netherlands, 5—9 July 1982). 本文修改稿于 1983 年 1 月 24 日收到.

图1所示卫星质心惯性系 $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1, o\}$ 中, 参考基准和姿态几何关系为: \hat{A} 为卫星单轴姿态在卫星质心惯性系的单位球面上的位置, 其赤经、赤纬分别为 α, δ ; \hat{S} 为太阳方向矢量, 代表太阳在惯性系中单位球面上的位置, 其赤经、赤纬分别为 α_s, δ_s ; \hat{E} 为地心方向矢量, 代表地心在惯性系中单位球面上的位置, 其赤经、赤纬分别为 α_e, δ_e ; θ_s 为参考矢量 \hat{S} 和卫星姿态 \hat{A} 所构成的弧长角; θ_e 为参考矢量 \hat{E} 和卫星姿态 \hat{A} 所构成的弧长角; λ_{se} 为 $\hat{A}-\hat{S}$ 平面和 $\hat{A}-\hat{E}$ 平面所构成的平面夹角, 称为 \hat{A} 的旋转角. 就太阳和地心这两个参考基准而言, 两种确定单轴姿态的基本方法是: 已知 θ_s, θ_e 求 \hat{A} ; 已知 θ_s (或 θ_e) 和 λ_{se} 求 \hat{A} .

姿态确定精度不但和测量部件本身精度有关, 而且和参考基准矢量和姿态的相互位置关系(即量测几何)有关. 通过精度分析, 找出姿态确定精度和量测部件精度, 量测几何之间的数量关系.

1. 用太阳角 θ_s 和地球角 θ_e 确定姿态的精度分析

卫星质心惯性系 $\{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1, o\}$ 的坐标中心在卫星质心, 坐标架平行于地心惯性系, \hat{i}_1 指向春分点.

卫星角动量坐标系 $\{\hat{i}_A, \hat{j}_A, \hat{k}_A, o\}$ 和质心惯性系的关系由下列坐标变换确定:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_A \\ \hat{j}_A \\ \hat{k}_A \end{pmatrix} = R_y\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) R_z(\alpha) \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

或

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{pmatrix} = R_z(-\alpha) R_y\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} \hat{i}_A \\ \hat{j}_A \\ \hat{k}_A \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$R_y(\cdot)$, $R_z(\cdot)$ 分别为绕 y 轴和 z 轴的旋转坐标变换阵. α, δ 分别为姿态 \hat{A} 的赤经, 赤纬.

$$\hat{A} = \hat{k}_A = R_z(-\alpha) R_y\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\hat{i}_A = R_z(-\alpha) R_y\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha \sin \delta \\ -\cos \delta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{j}_A = R_z(-\alpha) R_y\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

因此

$$d\hat{A} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \delta d\alpha - \sin \delta \cos \alpha d\delta \\ -\sin \delta \sin \alpha d\delta + \cos \delta \cos \alpha d\alpha \\ \cos \delta d\delta \end{pmatrix} = (\hat{j}_A, -\hat{i}_A) \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

若用太阳角 θ_s 和地球角 θ_e 确定姿态, 显然, α, δ 应该满足下列方程

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^* = \cos \theta_s, \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^* = \cos \theta_e. \quad (8)$$

其中

$$\hat{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \cos \hat{\alpha} & \cos \hat{\delta} \\ \sin \hat{\alpha} & \cos \hat{\delta} \\ & \sin \hat{\delta} \end{pmatrix}.$$

$\hat{\alpha}, \hat{\delta}$ 为 (7), (8) 两式确定的 α, δ 的估计值.

(7), (8) 两式事实上相当于一个非线性估计器, 其输入是量测值 θ_s, θ_e , 而输出是姿态 α, δ 的非线性估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$. 由于量测量 θ_s, θ_e 夹杂着随机误差, 因此非线性的量测方程应为

$$\theta_s = \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\} + v_s, \quad (9)$$

$$\theta_e = \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\} + v_e. \quad (10)$$

令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \theta_s \\ \theta_e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_e \end{pmatrix}. \quad (11)$$

将 (9), (10) 式写成矩阵方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}. \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\} \\ \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_e \end{pmatrix}, \quad E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta_s}^2 & \\ & \sigma_{\theta_e}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}. \quad (14)$$

同样, (7), (8) 两式写成矩阵形式为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^*\} \\ \cos^{-1}\{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^*\} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

这样由 θ_s, θ_e , 根据 (7), (8) 两式确定的姿态误差偏差方程由 (15) 式可写成

$$d\mathbf{y} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (17)$$

其中

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} d\theta_s \\ d\theta_e \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{pmatrix}. \quad (18), (19)$$

$d\mathbf{y}, d\mathbf{x}$ 分别称为量测误差和姿态估计误差.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}}$$

可以通过以下方式求得.

首先相对 α, δ 取 (7), (8) 两式偏差方程

$$d\theta_s = -\frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot d\hat{\mathbf{A}}^*}{\sin \theta_s}, \quad (20)$$

$$d\theta_e = -\frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot d\hat{\mathbf{A}}^*}{\sin \theta_e}. \quad (21)$$

利用 (6) 式, 不难将 (20), (21) 式写成

$$d\mathbf{y} = H I_d d\mathbf{x}. \quad (22)$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}}{\sin \theta_s} & \frac{\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}}{\sin \theta_s} \\ -\frac{\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}}{\sin \theta_e} & \frac{\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}}{\sin \theta_e} \end{pmatrix}, \quad I_d = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23), (24)$$

$$d\mathbf{y} = \begin{pmatrix} d\theta_s \\ d\theta_e \end{pmatrix} = (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})), \quad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \quad (25), (26)$$

比较 (17) 和 (22) 两式, 可知

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} = H I_d. \quad (27)$$

根据 (12), (14) 和 (24) 式, 知道

$$E\{d\mathbf{y}d\mathbf{y}^T\} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = R = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta_s}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_e}^2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$E\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}^T\} = P = \begin{pmatrix} P_{\alpha} & P_{\alpha\delta} \\ P_{\delta\alpha} & P_{\delta} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

其中

$$P_{\alpha} = E\{d\alpha^2\}, \quad P_{\alpha\delta} = P_{\delta\alpha} = E\{d\alpha \cdot d\delta\}, \quad P_{\delta} = E\{d\delta^2\}.$$

因为量测误差方差阵 R 是正定的, 所以可将 (22) 式两边同乘 $(H I_d)^T R^{-1}$, 得

$$(H I_d)^T R^{-1} d\mathbf{y} = W_{01}^* d\mathbf{x}, \quad W_{01}^* = (H I_d)^T R^{-1} (H I_d). \quad (30)$$

若 $(H I_d)^T R^{-1} (H I_d)$ 非奇异(这点将由系统能观性保证), 则估计误差 $d\mathbf{x}$ 为

$$d\mathbf{x} = [(H I_d)^T R^{-1} (H I_d)]^{-1} (H I_d)^T R^{-1} d\mathbf{y}. \quad (31)$$

由 (31) 式容易算出估计误差方差阵 P 为

$$P = E\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}^T\} = [(H I_d)^T R^{-1} (H I_d)]^{-1}. \quad (32)$$

考虑到 (6) 式, 可以计算出姿态矢量的估计误差的方差为

$$\sigma^2 = E\{(d\mathbf{A}^*)^T (d\mathbf{A}^*)\} = \text{tr} E\{(I_d d\mathbf{x})(I_d d\mathbf{x})^T\} = \text{tr} (H^T R^{-1} H)^{-1}. \quad (33)$$

应用 (28), (23) 两式, 计算 (33) 式, 经推导整理得

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_{se}} \{\sigma_{\theta_s}^2 + \sigma_{\theta_e}^2\}. \quad (34)$$

其中 λ_{se} 是 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{S}}$ 平面和 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{E}}$ 平面所构成的两面角.

2. 用旋转角 λ_{se} 和太阳角 θ_s (或地球角 θ_e) 确定姿态的精度分析

用与上节完全相同的方法进行分析计算, 可得用 λ_{se}/θ_s 和 λ_{se}/θ_e 分别确定姿态时的姿态矢量估计误差方差为

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_{eN}} \left\{ \sigma_{\theta_s}^2 + \frac{\sigma_\lambda^2}{d^2} \right\}, \quad (35)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_{Ns}} \left\{ \sigma_{\theta_s}^2 + \frac{\sigma_\lambda^2}{d^2} \right\}. \quad (36)$$

其中

$$d = \frac{\sin \xi \sin \theta_{se}}{\sin \theta_s \sin \theta_e}, \quad \xi = \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \}, \quad \theta_{se} = \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \}.$$

λ_{eN} 为 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{E}}$ 平面与 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{N}}$ 平面之平面夹角; λ_{Ns} 为 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{N}}$ 平面与 $\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{S}}$ 平面之平面夹角.

(34)–(36) 三式所给出的结果和 Wertz^[1] 所得之结果相同, 但推导方法不同. 这里用的是分析方法, 而 Wertz 用的是几何方法.

二、一种提高姿测精度的新途径——冗余量测法

从以上分析, 用太阳角和地球角(简称 θ_s/θ_e 方法)、用太阳角和旋转角(θ_s/λ_{se} 方法)以及用地球角和旋转角 (θ_e/λ_{se}) 确定姿态, 其精度分别为 (34), (35), (36) 式. 显然, 无论使用那种方法确定姿态, 都不可避免地存在着奇点, 其条件如表 1 所示.

表 1 三种姿态确定方法的奇点

姿态确定方法	奇 异 性 条 件
θ_s/θ_e	$(\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$ (即 $\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{A}}$ 共面)
θ_s/λ_{se}	$\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{A}}$ 共面; $\hat{\mathbf{E}} = \pm \hat{\mathbf{S}}; \hat{\mathbf{A}} = \pm \hat{\mathbf{N}}$
θ_e/λ_{se}	$\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{A}}$ 共面; $\hat{\mathbf{E}} = \pm \hat{\mathbf{S}}; \hat{\mathbf{A}} = \pm \hat{\mathbf{N}}$

这些奇点是直接从 (34), (35) 和 (36) 式求得的. 它直接反映了精度和量测几何的关系. 因此, 在应用这些方法时, 应该从量测几何角度设法避免在量测采集数据时出现奇点. 这样往往增加了发射窗口的限制, 致使发射窗口变得很小. 即使联合使用上述方法, 但由于在奇点及其附近的一个邻域内所定的姿态误差太大而不能使用, 因此, 发射窗口还是得不到较大的改善. 为此本文将提出“冗余量测法”来确定姿态, 以期改善奇点分布, 提高姿测精度.

1. 冗余量测法及其精度

所谓冗余量测法, 是指在量测模型中使用了超过能观性所要求的冗余量测量确定姿态. 在所讨论的问题中是指用 θ_s, θ_e 和 λ_{se} 同时确定姿态的方法. 显然, 若用 θ_s, θ_e 和 λ_{se} 确定姿态, 即被确定的估计姿态 α, δ 应满足

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^* = \cos \theta_s, \quad \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^* = \cos \theta_e, \quad \frac{\hat{\mathbf{A}}^* \cdot (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}})}{\sin \theta_s \sin \theta_e} = \sin \lambda_{se}. \quad (37) \text{—}(39)$$

(37—39) 三式相当一个非线性估计器,其输入是 $\theta_s, \theta_e, \lambda_{se}$. 而输出是姿态 α, δ 的估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$. 考虑到 θ_s, θ_e 和 λ_{se} 夹杂着随机误差,因此其量测方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}. \quad (40)$$

其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \theta_s \\ \theta_e \\ \lambda_{se} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{A}} \} \\ \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}} \} \\ \sin^{-1} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{A}} \cdot (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}})}{\sin \theta_s \sin \theta_e} \right\} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_s \\ v_e \\ v_\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta_s}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta_e}^2 \\ 0 & 0 & \sigma_\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

(37)—(39) 式可写成矢量方程

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \hat{\mathbf{S}} \} \\ \cos^{-1} \{ \hat{\mathbf{A}}^* \cdot \hat{\mathbf{E}} \} \\ \sin^{-1} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{A}}^* \cdot (\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}})}{\sin \theta_s \sin \theta_e} \right\} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

由 (42) 式确定的姿态 α, δ 的估计值为 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}$. 相对 α, δ 的估计误差的偏差方程为

$$d\mathbf{y} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (43)$$

其中

$$d\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} d\theta_s \\ d\theta_e \\ d\lambda_{se} \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{pmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} = I_e H I_d,$$

$$I_e = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \frac{1}{\cos \lambda_{se} \sin \theta_s \sin \theta_e} \end{pmatrix},$$

$$I_d = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{pmatrix},$$

$$h_{11} = -\frac{\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}}{\sin \theta_s}, \quad h_{12} = \frac{\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}}{\sin \theta_s}, \quad h_{21} = -\frac{\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}}{\sin \theta_e}, \quad h_{22} = \frac{\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}}{\sin \theta_e},$$

$$h_{31} = (\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{N}}) \sin \theta_{se} + \frac{(\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}}{\sin^2 \theta_s} \cos \theta_s (\hat{\mathbf{j}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}}{\sin^2 \theta_e} \cos \theta_e (\hat{\mathbf{J}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}), \\
h_{32} = & - \left\{ (\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{N}}) \sin \theta_{se} + \frac{(\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}}{\sin^2 \theta_s} \cos \theta_s (\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}) \right. \\
& \left. + \frac{(\hat{\mathbf{S}} \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{A}}}{\sin^2 \theta_e} \cos \theta_e (\hat{\mathbf{i}}_A \cdot \hat{\mathbf{E}}) \right\}.
\end{aligned}$$

因为量测误差方差阵 R 是正定的, 所以得 (43) 式两边乘 $(I_e H I_d)^T R^{-1}$ 得

$$(I_e H I_d)^T R^{-1} (I_e H I_d) d\mathbf{x} = (I_e H I_d)^T R^{-1} d\mathbf{y}. \quad (44)$$

若 $(I_e H I_d)^T R^{-1} (I_e H I_d)$ 非奇异(这点由系统能观性保证), 则得估计误差

$$d\mathbf{x} = [(I_e H I_d)^T R^{-1} (I_e H I_d)]^{-1} (I_e H I_d)^T R^{-1} d\mathbf{y}. \quad (45)$$

由 (45) 式不难算得估计误差方差阵 P

$$P = E\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}^T\} = [(I_e H I_d)^T R^{-1} (I_e H I_d)]^{-1}. \quad (46)$$

应用 (6) 式可算出姿态矢量估计误差方差为

$$\begin{aligned}
\sigma^2 & = E\{d\hat{\mathbf{A}}^{*T} d\hat{\mathbf{A}}^*\} = \text{tr} E\{(I_d d\mathbf{x})(I_d d\mathbf{x})^T\} \\
& = \text{tr}\{I_d P I_d^T\} = \text{tr}\{[H^T (I_e^T R^{-1} I_e) H]^{-1}\}.
\end{aligned} \quad (47)$$

令

$$\begin{aligned}
I_e^T R^{-1} I_e & = \begin{pmatrix} r_1^2 & & 0 \\ & r_2^2 & \\ 0 & & r_3^2 \end{pmatrix}, \\
r_1^2 & = \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2}, \quad r_2^2 = \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2}, \quad r_3^2 = \frac{1}{\sigma_\lambda^2 \cos^2 \lambda_{se} \sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_e},
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
(W_{04}^*)^{-1} & = (H^T I_e^T R^{-1} I_e H)^{-1} \\
& = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_1^2 h_{12}^2 + r_2^2 h_{22}^2 + r_3^2 h_{32}^2 & -r_1^2 h_{11} h_{12} - r_2^2 h_{21} h_{22} - r_3^2 h_{31} h_{32} \\ -r_1^2 h_{11} h_{12} - r_2^2 h_{22} h_{21} - r_3^2 h_{32} h_{31} & r_1^2 h_{11}^2 + r_2^2 h_{21}^2 + r_3^2 h_{31}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

经过繁杂推导和整理得

$$\begin{aligned}
\Delta & = r_1^2 r_2^2 (h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12})^2 + r_1^2 r_3^2 (h_{31} h_{12} - h_{11} h_{32})^2 + r_2^2 r_3^2 (h_{21} h_{32} - h_{31} h_{22})^2 \\
& = \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2 \sigma_{\theta_e}^2} \sin^2 \lambda_{se} + \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2} \frac{\sin^2 \theta_{se} \sin^2 \xi}{\sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_e} \sin^2 \lambda_{eN} + \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2 \sigma_\lambda^2} \frac{\sin^2 \theta_{se} \sin^2 \xi}{\sin^2 \theta_s \sin^2 \theta_e} \sin^2 \lambda_{Ns}, \\
\sigma^2 = \text{tr} (W_{04}^*)^{-1} & = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{\sigma_{\theta_s}^2} + \frac{1}{\sigma_{\theta_e}^2} + \frac{d^2}{\sigma_\lambda^2} \right\} = \frac{\sigma_\lambda^2 \sigma_{\theta_e}^2 + \sigma_{\theta_s}^2 \sigma_\lambda^2 + \sigma_{\theta_s}^2 \sigma_{\theta_e}^2 d^2}{\sigma_\lambda^2 \sin^2 \lambda_{se} + d^2 \sigma_{\theta_e}^2 \sin^2 \lambda_{eN} + d^2 \sigma_{\theta_s}^2 \sin^2 \lambda_{Ns}}.
\end{aligned} \quad (48)$$

其中

$$d = \frac{\sin \theta_{se} \sin \xi}{\sin \theta_s \sin \theta_e}.$$

2. 各种姿态确定方法的比较

将上述四种姿态确定方法(即 θ_s/θ_e ; θ_s/λ_{se} ; θ_e/λ_{se} 和 $\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$) 的奇点分布列于表 2.

表 2 各种姿态确定方法的奇点分布

姿态确定方法	奇 点 分 布
θ_s/θ_e	$\hat{S}, \hat{E}, \hat{A}$ 共面(即 $\lambda_{se} = 0, \pi$)
θ_s/λ_{se}	$\hat{A}, \hat{E}, \hat{N}$ 共面(即 $\lambda_{eN} = 0, \pi$) $\hat{E} = \pm \hat{S}$ (即 $\theta_{se} = 0, \pi$) $\hat{A} = \pm \hat{N}$ (即 $\xi = 0, \pi$)
θ_e/λ_{se}	$\hat{A}, \hat{N}, \hat{S}$ 共面(即 $\lambda_{Ns} = 0, \pi$) $\hat{E} = \pm \hat{S}$ (即 $\theta_{se} = 0, \pi$) $\hat{A} = \pm \hat{N}$ (即 $\xi = 0, \pi$)
$\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$	$\hat{S} = \pm \hat{E}$ (即 $\theta_{se} = 0, \pi$)

从表 2 可看出,冗余量测法 ($\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$) 大大缩小了奇点分布. $\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$ 的奇点仅当 $\hat{S} = \pm \hat{E}$, 即太阳和地球共线条件下产生.

下面分析 θ_s/θ_e , θ_s/λ_{se} , θ_e/λ_{se} 和 $\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$ 方法精度的高低. 令各量测部件精度相等,即令

$$\sigma_{\theta_s}^2 = \sigma_{\theta_e}^2 = \sigma_{\lambda}^2 = \sigma_0^2, \quad (49)$$

那么 (34), (35), (36) 和 (48) 式分别为

$$\theta_s/\theta_e: \quad \sigma_1^2 = \frac{2}{\sin^2 \lambda_{se}} \sigma_0^2; \quad (50)$$

$$\theta_s/\lambda_{se}: \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_{eN}} \{1 + d^2\} \sigma_0^2; \quad (51)$$

$$\theta_e/\lambda_{se}: \quad \sigma_3^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda_{Ns}} \{1 + d^2\} \sigma_0^2; \quad (52)$$

$$\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}: \quad \sigma_4^2 = \frac{\{2 + d^2\} \sigma_0^2}{\sin^2 \lambda_{se} + d^2 \sin^2 \lambda_{eN} + d^2 \sin^2 \lambda_{Ns}}. \quad (53)$$

经过分析和证明¹⁾,冗余量测模型 $\theta_s/\theta_e/\lambda_{se}$ 方法精度最高. 也就是说 σ_4^2 最小,即

$$\sigma_4^2 \leq \min \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2 \}. \quad (63)$$

承蒙章仁为、刘良栋同志阅读过本文初稿,并提出不少好的建议. 杨嘉墀、屠善澄两位教授曾对作者的研究工作给予许多鼓励和支持,在此一并表示诚挚的谢意.

参 考 文 献

- [1] James R. Wertz, Spacecraft Attitude Determination and Control, D. Reidel Publishing Company, 1978.

1) 详细证明请见《控制工程》No. 1, 1982.

A NEW APPROACH TO IMPROVING THE ACCURACY OF ATTITUDE DETERMINATION —A REDUNDANT MEASUREMENT MODEL METHOD

XING GUANGQIAN

(Beijing Institute of Control Engineering)

ABSTRACT

The usual methods for attitude determination of spinning satellite have been mentioned in many papers published abroad^[1]. The common disadvantage of these methods is the existence of many singular points at which the determination of attitude accuracy differences is of no practical value. Date and time for the launch of the satellite have to be selected meticulously so as to get better attitude determination results. In order to overcome this disadvantage, the concept of redundant measurement model is presented in this paper. Because of the application of the redundant measurements models for attitude determination, singular point distributions in the usual methods have been improved, the accuracy is higher and the launch window has been expanded.

征 订 启 事

本刊将于 1985 年出版《自动化学报》增刊，国内外公开发行。其详细介绍及订单请见本刊 11 卷（1985 年）第 1 期。欲订者请速与本刊编辑部联系（通讯地址：北京中国科学院自动化研究所《自动化学报》编辑部）。

《自动化学报》编辑部