第11卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol.11, No.2
1985年4月 ACTA AUTOMATICA SINICA Apr., 1985

Fuzzy控制系统的分析

高崇德
(国家物资总局自动化所)

摘　　要

本文对由方程 $X_{t+1}=X_t\circ U_t\circ R$, $Y_{t+1}=X_{t+1}\circ D$ 描述的 Fuzzy 系统作了进一步的探讨，给出了稳定性、可控性及可观测性的条件和判据；提出了超调量、调节时间等概念，这些可为 Fuzzy 系统的控制提供某些理论依据.

一、引　　言

Fuzzy 系统的研究工作起先由 Zadeh 和 Chang[1,2] 开始，Negoita 和Ralescu[3,4] 又进了一步．但他们的工作都未应用到实际中去．后来的工作[7,8]似乎在应用上也没有什么突破．Tong[5,6] 将一些应用成果[9,10]归结起来，最后抽象成统一的模型 $X_{t+1}=X_t\circ U_t\circ R$. 这就是 Fuzzy 条件语句 IF X_t AND U_t THEN X_{t+1} 的数学表达式．Pedrycz[11] 又前进了一步，但仍不够深入．本文试图在文献[5, 6, 11]的基础上作更深入的探讨，初步得到一些判据方法，并提出了某些概念.

二、Fuzzy 矩阵的图解分析

设 $X=\{x_1x_2\cdots x_n\}$, $U=\{u_1u_2\cdots u_m\}$, $Y=\{y_1y_2\cdots y_p\}$ 分别是 Fuzzy 系统状态、控制和输出的论域，定义在其上面的 Fuzzy 集分别为 $X_t\in\mathscr{F}(X)$, $U_t\in\mathscr{F}(U)$, $Y_t\in\mathscr{F}(Y)$. t 为采样时间．并设 Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times U\times X)$, $D\in\mathscr{F}(X\times Y)$,那么 Fuzzy 系统可描述为

$$\begin{cases}X_{t+1}=X_t\circ U_t\circ R,\\ Y_{t+1}=X_{t+1}\circ D.\end{cases}$$

$$\mu_{X_{t+1}}(x')=\bigvee_{x\in X}\left\{\mu_{X_t}(x)\wedge\left[\bigvee_{u\in U}(\mu_{U_t}(u)\wedge\mu_R(x,u,x'))\right]\right\},$$

$$\mu_{Y_{t+1}}(y)=\bigvee_{x\in X}[\mu_{X_{t+1}}(x)\wedge\mu_D(x;y)],$$

$\vee=\max$, $\wedge=\min$. μ_{X_t}, μ_{U_t}, $\mu_{Y_{t+1}}$, μ_R 和 μ_D 分别是 X_t, U_t, Y_{t+1}, R和D的隶属函数.

本文于1982年8月25日收到.

Fuzzy 系统的分析，实质上是 Fuzzy 矩阵的分析．根据分解定理得

$$R_{m\times n}=\bigvee_{\alpha\in[r_{ij}]}\alpha\cdot R_{\alpha}.$$

其中

$$R_{\alpha}=[r_{ij\alpha}],\quad r_{ij\alpha}=\begin{cases}1, & 若\ \alpha\leqslant r_{ij},\\ 0, & 若\ \alpha>r_{ij}.\end{cases}$$

为方便起见，把 $R_{n\times n}$ 的元素由小到大顺序记为 $r_1, r_2\cdots r_q$，$q\leqslant n^2$，则可将 $R_{n\times n}$ 表为：$R_{n\times n}=\sum_{k=1}^{q} r_k\cdot R_k$，这里 $\sum_{k=1}^{q}$ 表示 $\bigvee_{k=1}^{q}$，R_k 即为 R_{r_k}.

命题 2.1. Fuzzy 矩阵 $R_{n\times n}$ 的 m 次幂为

$$R^m=\sum_{k=1}^{q} r_k\cdot R_k^m.$$

命题 2.2. Fuzzy 矩阵 $R_{n\times n}$ 的幂级数 $R^*=\sum_{m=1}^{\infty} R^m$ 收敛，且

$$R^*=\sum_{m=1}^{n} R^m=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} r_k\cdot (R_k)^m.$$

命题 2.3. 若 $R_q\supseteq I$，则 $R\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^m\subseteq\cdots$，$I$ 为单位矩阵.

布尔矩阵 $R_I=[r_{ij}]_{m\times n}$，可以用图论方法来描述：从状态 i 到状态 j 可以连成有向线段，当且仅当 $r_{ij}=1$，如果 $r_{i_1i_2}=r_{i_2i_3}=\cdots=r_{i_ki_{k+1}}=1$，则称 $(i_1, i_2,\cdots,i_{k+1})$ 为一 k 步通路.

命题 2.4. 布尔矩阵 R_I 的幂 R_I^k 的元素 $r_{ij}^{(k)}=1$ 的充要条件，是从状态 i 出发沿通路走 k 步能够到达状态 j.

命题 2.5. R_I 的幂级数 R^* 的元素 $r_{ij}^*=1$ 的充要条件是从状态 i 出发沿通路走有限步能够到达状态 j.

由此可给出计算 Fuzzy 矩阵 R 的幂及幂级数的图解方法：

1）作出 R_q 的图 G_{R_q}，若从状态 i 沿通路走 m 步到达状态 j，则记 $r_{ij}^{(m)}=r_q$；若从状态 i 到状态 j 有通路，则记 $r_{ij}^*=r_q$，所有可以定值的元素都登记完以后，进行下一步 2).

2）在 G_{R_q} 的基础上添加某些连线得 $G_{R_{q-1}}(R_q\subset R_{q-1})$，若 $r_{ij}^{(m)}$ 尚未登记，又若从状态 i 沿 $G_{R_{q-1}}$ 的通路走 m 步能到达 j，则记 $r_{ij}^{(m)}=r_{q-1}$；若 r_{ij}^* 尚未登记，又若从状态 i 沿 $G_{R_{q-1}}$ 的通路能到达状态 j，则记 $r_{ij}^*=r_{q-1}$.

重复 1)，2)，直到 $R^{(m)}$ 和 R^* 中的元素全部确定为止.

三、Fuzzy 系统的稳定性

设 $U_t=\text{Const}$，则

$$X_{t+1} = X_t \circ U_t \circ R = X_t \circ \bar{R}, \tag{1}$$
$$\bar{R} = U_t \circ R \in \mathscr{F}(X \times X).$$

状态 X_t 的峰标 (Peak Pattern) X_{tpp} 是指

$$\mu_{X_{tpp}}(x_i) = \begin{cases} 1, \text{若 } \mu_{X_t}(x_i) = \max\{\mu_{X_t}\}, \\ 0, \text{否则.} \end{cases}$$

X_1 与 X_2 两状态中，如若 $X_{1pp} \supseteq X_{2pp}$，则称 X_1 似于 X_2；如果还有 $\max\{\mu_{X_1}\} = \max\{\mu_{X_2}\}$，则称 X_1 强似于 X_2。

定义 3.1. 设初始状态为 X_0，如果存在 t'，$\forall t > t'$，$X_t = X_0 \circ \bar{R}^t$ 似于 X_0，则称 X_0 稳定，又称相对稳定；若 X_t 强似于 X_0，则称 X_0 绝对稳定。

本文只限于讨论非奇异状态 X_0 的稳定性，且把峰位为 s 的 X_0 记为 X_0^s。

定理 3.1.[11] 初始状态为 X_0^s，若 $\exists t' \in N$，$\forall t > t'$，有 $\mu_{X_0^s}(x_s) \leqslant \bar{r}_{ss}^{(t)}$，则 X_0^s 稳定，$\bar{R}^t = [\bar{r}_{ij}^{(t)}]_{n\times n}$ $N = \{1, 2 \cdots\}$。

定理 3.1′ 若存在 $t' \in N$，对 $\forall t > t'$，图 $G_{\bar{R}_t}$ 中状态 s 都可以沿走 t 步的通路返回到它本身，则 X_0^s 稳定。其中 $\bar{r}_l \geqslant \mu_{X_0^s}(x_s) > \bar{r}_{l-1}$，$r_l$，$r_{l-1} \in [\bar{r}_{ij}]_{n\times n}$。

定义 3.2. 在图 $G_{\bar{R}_l}$ 中，若 $\exists t_{ij}^l \in N$ 及 $T_{ij}^l \geqslant 1$，$\forall t \geqslant 1$，从状态 i_l 走 $k_{ij}^l = t_{ij}^l + tT_{ij}^l$ 步可以到达状态 j_l，则称 T_{ij}^l 为 i_l 到 j_l 的周期，$k_{ij}^l = \{t_{ij}^l + tT_{ij}^l | \forall t\}$ 为其步数集；而集 $\{j_l | j_l \in [1, n]\}$ 称为 $G_{\bar{R}_l}$ 的势状态集，相应的称 $\{P_i^l\} = \{[\bar{r}_l \wedge \mu_{X_0^s}(x_{il})]\}$ 为 $G_{\bar{R}_l}$ 的势集，$\{k_{ij}^l | i, j \in [1, n]\}$ 称为势步集。

命题 3.1. 在图 $G_{\bar{R}_l}$ 中，i_l 到 j_l 的周期为 T_{ij}^l 的充要条件是在 i_l 到 j_l 的通路中存在步数为 T_{ij}^l 的回路(回环)。

定义 3.3. 若 $\exists f$、$g \in [1, n]$，$v \in [1, q]$，$N_0 \in N$，当 $k_{fg}^v \geqslant N_0$ 时，有 $\{k_{fg}^v \geqslant N_0\} \subseteq \left\{\sum_{j\neq g}^{l\neq v} \{k_{ij}^l | P_i^l \geqslant P_f^v\}\right\}$，则称 $\{k_{fg}^v\}$ 为劣势步集，$\{k_{ij}^l\}$ 为优势步集，它所对应的势与势状态集称为优势及优势状态集。

定义 3.4. 若 $\exists$ 最小优势 $P_f^v \in \{P_i^l | i \in [1,n], l \in [1,q]\}$ 使得 $\left\{\sum_{j\neq g}^{l\neq v} \{k_{ij}^l | P_i^l \geqslant P_f^v\} | j \in [1, n], l \in [1, q]\right\} = \{\cdots, n_0, n_0+1, n_0+2\cdots\}$，则称 $\left\{\sum_{j\neq g}^{l\neq v} \{k_{ij}^l | P_i^l \geqslant P_f^v\}\right\}$ 为 $G_{\bar{R}}$ 的优势步集，与其对应的优势状态集的并 $J = \left\{\prod_{l\neq v}^{l\in[1,q]} \{j_l\}\right\}$ 称为 $G_{\bar{R}}$ 的优势状态集，并称 P_f^v 为 $G_{\bar{R}}$ 的临界优势。

命题 3.2. 对于给定的 $\bar{R}$，$G_{\bar{R}}$ 的优势步集总是存在的。

命题 3.3. 若 $\exists f, g \in [1, n]$，$v \in [1, q]$，使得 $G_{\bar{R}_v}$ 的 f_v 到 g_v 的周期 $T_{fg}^v = 1$，而 $\left\{\sum_{j\neq g}^{l\neq v} \{k_{ij}^l | P_i^l \geqslant P_f^v\}\right\}$ 非 $G_{\bar{R}}$ 的优势步集，则 $G_{\bar{R}}$ 的优势步集为 $\left\{\sum_{j=g}^{l=v} \{k_{ij}^l | P_i^l \geqslant P_f^v, l \in [1, q], j \in [1, n]\}\right\}$。

定理 3.2. Fuzzy 系统 (1) 中状态 X_0^s 稳定的充要条件是 $s \in J$，其中 J 为 $G_{\bar{R}}$ 的优

势状态集.

证略.

定理 3.3. 若 $s\in J$，且 $G_{\bar{R}}$ 的所有优势皆为 $P_i^l=\mu_{X_0^s}(x_s)$，则 X_0^s 是绝对稳定的，否则是相对稳定的.

定义 3.5. 设

$$x_h=\max\{x_j\,|\,\mu_{X_t}(x_j)=\max\{\mu_{X_m}(x_i)\,|\,m<n_0\}\},$$
$$x_b=\min\{x_j\,|\,\mu_{X_t}(x_j)=\max\{\mu_{X_m}(x_i)\,|\,m<n_0\}\},$$

$i,j=1,2\cdots n$, $t\in\{1,2\cdots n_0-1\}$，那么 Fuzzy 系统趋于稳态 X_0^s 过程中有下列瞬态性能指标：

最大超调量 $\delta_m=\max\{|x_h-x_s|,|x_s-x_b|\}$,

最大超调比 $r_m=\dfrac{\delta_m}{x_s}\times 100\%$,

峰值时间 $t_m=t\cdot\tau$. t 为 $G_{\bar{R}_l}$ 中 i_l 到 h_l 或 b_l 的步数，τ 为采样周期.

调节时间 $t_s=n_0\cdot\tau$.

四、Fuzzy 系统的可控性

定义 4.1[6]. 若存在 f 个允许控制 $U_t^*=\{U^1,U^2\cdots U^f\}$，使得系统 $X_{t+1}=X_t\circ U_t^*\circ R$ 初始状态 X_0^i 似于终态 X_f^j，则称 X_0^i 到 X_f^j 可控；若 X_f^j 强似于 X_0^i，则 X_0^i 到 X_f^j 绝对可控；若任一初态 X_0^i 到任一终态 X_f^j 是可控的，则称 Fuzzy 系统完全可控.

设 $U^v=(0\cdots\underset{vth}{1}\cdots D_0)$，则有 $\bar{R}_v=U^v\circ R$. 又选择 $\bar{r}_{vl}$，使得 $\bar{r}_{vl}\geqslant\max\{\mu_{X_0}(x_i)\,|\,\forall i\}>\bar{r}_{vl-1}$, $\bar{r}_{vl}$, $\bar{r}_{vl-1}\in[\bar{r}_{vij}]$，可得 $R_v=[r_{vij}]_{n\times n}$. 其中

$$r_{vij}=\begin{cases}1, & 若\ \bar{r}_{vij}\geqslant\bar{r}_{vl},\\ 0, & 若\ \bar{r}_{vij}<\bar{r}_{vl}.\end{cases}$$

并称 R_v 为 $\bar{R}_v$ 的能达阵.

定义 4.2. 称 $R^*=\sum\limits_{t=1}^{n}\left(\sum\limits_{v=1}^{m}R_v\right)^t$ 为系统的能达矩阵.

定理 4.1. 状态 X_0^i 到 X_f^j 可控的充要条件是 $r_{ij}^*=1$，$R^*=[r_{ij}^*]_{n\times n}$.

定理 4.2. Fuzzy 系统完全可控的充要条件是 $r_{ij}^*\equiv 1$，$i,j=1,2,\cdots n$.

定理 4.1′. 状态 X_0^i 到 X_f^j 可控的充要条件是 G_{R^*} 中状态 i 到 j 有通路.

定理 4.2′. Fuzzy 系统完全可控的充要条件是 G_{R^*} 中任何状态 i 到任何 j 均有通路.

五、Fuzzy 系统的可观测性

Fuzzy 系统 $Y_{t+1}=X_{t+1}\circ D$ 的可观测性定义为

定义 5.1. 若状态 X_{t+1}^i 的观测值 Y_{t+1}^i 非奇异，则称状态 X_{t+1}^i 可观测；若所有 X_{t+1}^i $(i=1,2\cdots n)$ 可观测，则称 Fuzzy 系统完全可观测.

定理 5.1. 状态 X^i 可观测的充要条件是存在唯一 $j\in[1,n]$，使得 $\mu_{Y^i}(y_j)=[\mu_{X^i}(x_k)\wedge d_{k_j}]=\max\{\mu_{X^i}(x_h)\wedge d_{hl}|\forall h\in[1,n],\ l\in[1,p]\}$，$D=[d_{hl}]_{n\times p}$.

定理 5.2. 若存在唯一 $j\in[1,p]$，使得 $d_{ij}^*=\max\{d_{hl}|h=1,2\cdots n,\ l=1,2\cdots p\}$，则状态 X^i 可观测，且观测值为 Y^j.

一般情况下，判断 X^i 是否可观测，只需检查较大 μ_{X^i} 值与其对应的 d_{ij} 值即可.

若 $D=I$（单位阵），则 $Y_{t+1}=X_{t+1}$，系统完全可观，且观测值即为状态值.

作者对北京师范大学汪培庄教授给予的不断鼓励和耐心指导深表谢意.

参 考 文 献

[1] Zadeh L. A, Toward a Theory of Fuzzy Systems, New York, 1971.

[2] Chang S. S. L and Zadeh L. A, On Fuzzy Mapping and Control, *IEEE Trans., Systems, Man Cybernet*, SMC **2**(1972), 30—34.

[3] Negoita C. V. and Ralescu D. A, Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Birkhauser-Verlag, Basel (1975).

[4] Negoita C. V and Ralescu D. A, Kybernetes, 3, (1974).

[5] Tong R. M, Analysis of Fuzzy Control Algorithms Using the Relation Matrix, *Int. J. Man-Machine Study*, **8**(1976).

[6] Tong R. M, Analysis and Control of Fuzzy Systems Using Discreate Relations, *Int. J. Control*, **27** (1978), No. 3.

[7] Brane. M and Rutherford D. A, *Automatica*, **15**(1979).

[8] Michel de Clas, Theory of Fuzzy Systems, *Int. J. Fuzzy Sets and Systems*, **10**(1983), No. 1.

[9] King P. J and Mamdani E. H, The Application of Fuzzy Control Systems to Industrial Processes, *Automatica*, **13**(1977).

[10] 李宝绶，刘志俊，用模糊集理论设计一类控制器，自动化学报，1980 年第一期.

[11] Witold, Pedrycz, An Approach to the Analysis of Fuzzy Systems, *Int. J. Control*, **34**(1981), No. 3.

AN ANALYSIS OF FUZZY CONTROL SYSTEMS

GAO CHONGDE

(Institute of Automation National Bureau for Materials)

ABSTRACT

Fuzzy systems described by equations $X_{t+1}=X_t\circ U_t\circ R$, $Y_{t+1}=X_{t+1}\circ D$ have been further studied in this paper. Conditions and criteria for stability, controllability and observability have been given. Concepts of overshoot, regulating time, etc. are presented, which can be used to provide some theoretical basis for the control of fuzzy systems.