第11卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 2
1985 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1985

人口控制的一种算法

张 济 朋
(甘肃省计委电子计算站)

摘　　要

本文基于分布参数系统的边界值控制，讨论了人口控制的数学提法，提出了交替方向法的控制算法，导出了控制过程的稳定性条件．最后给出一个计算例子．

一、人口控制问题的数学提法

文献[1]给出了人口模型，在此基础上，作者给出如下人口控制问题的数学提法．

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}=-\mu(t,r)p+I-E, \qquad p(t_0,r)=p_0(r),$$

$$p(t,0)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2}h(t,r)k(t,r)p(t,r)dr. \tag{1.1}$$

控制目标为

$$p(T,r)=\tilde{p}_T(r). \tag{1.2}$$

式中 $p(t,r)$ 为人口按年龄分布密度；$\mu(t,r)$ 为死亡率；I 和 E 为迁入迁出居民按年龄分布密度；$\beta(t)$ 为妇女平均生育率；$k(t,r)$为同龄妇女与同龄总人数之比；$h(t,r)$为育龄妇女生育模式，满足 $\int_{r_1}^{r_2}h(t,r)=1$；$p_0(r)$ 为初始 t_0 年的人口按年龄分布密度；$\tilde{p}_T(r)$ 为未来T年所要求的人口按年龄分布密度，即控制目标．这样人口控制的数学提法是：求解控制变量 $\beta(t)$，使得满足方程(1.1)的 $p(t,r)$ 由 t_0 的 $p_0(r)$ 变化到未来T年的预定目标 $\tilde{p}_T(r)$．其实质是分布参数系统的边界值控制问题．

由偏微分方程理论可知，其特征线为

$$\frac{dr}{dt}=1, \text{ 即 } r=t+c, \ c \text{ 为常数}.$$

由特征理论的影响区域可知，当满足不等式

$$t\geqslant r \tag{1.3}$$

时，$p(t,r)$ 完全依赖于式(1.1)的最后一个方程，即含有 $\beta(t)$ 的边界条件，因之 $p(t,r)$ 为可控的，反之则完全依赖于(1.1)的第二个方程，即初始条件，因之为不可控的．因此称(1.3)式为可控条件．

本文于1982年7月22日收到．

二、控 制 算 法

由方程式(1.1)，在不失一般性情况下，设人口的机械增长为零，并采用特征线法可以得到

$$p_{j+1}^{t+1}=(1-\mu_j^t)p_j^t\,,\quad p_{j+1}^0=p_0(j+1),$$

$$p_0^t=\beta^t\sum_{r_1}^{r_2}h_r^tk_r^tp_r^t. \tag{2.1}$$

控制目标为

$$p_j^T=\tilde{p}_j^T,\ \tilde{p}_j^T\ \text{已知且不为零}. \tag{2.2}$$

当可控条件 $t\geqslant j$ 满足时，由(2.1)和(2.2)式有

$$\beta^{T-j}=\frac{\tilde{p}_j^T}{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\mu_{j-i}^{T-i})\sum\limits_{r=r_1}^{r_2}h_r^{T-j}k_r^{T-j}p_r^{T-j}}, \tag{2.3}$$

其中 $h(r)$ 按文献[1]取 χ^2 分布

$$h(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}(r-r_1)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{r-r_1}{2}}, & r>r_1\\ 0, & r\leqslant r_1.\end{cases}$$

最低生育年龄 $r_1=18$，生育峰值年龄 $r_{\max}=26$，则 $n=10$.

当 $T=J$ 时，由于满足可控条件 $T\geqslant j$, $j=1,2,\cdots J$，故可控. 采用交替方向法，其计算步骤为：第一步，取 $j=J$，由(2.3)式 $\tilde{p}_J^T$ 和 p_i^0 算出 β^0；第二步，取 $t=0$，由(2.1)式和 β^0 预报出 p_{j+1}^1；第三步，取 $j=J-1$，由(2.3)式 $\tilde{p}_{J-1}^T$ 和 p_j^1 算出 β^1；第四步，取 $t=1$，由(2.1)式和 β^1 预报出 p_{j+1}^2. 以此类推 j 从 J 到 1，t 从 0 到 $T-1$ 交替地算出 β^{T-j} 和 p_j^{t+1}. 当 $T<J$ 时，只有 $j=1、2、\cdots T$ 为可控的，因 $T\geqslant j$，可采用前述交替方向法. 对于 $j=T+1\cdots J$，为不可控，不能达到控制目标. 当 $T>J$ 时，为可控的，可采用前述方法.

由差分方程稳定性理论[4],[5]不难得到稳定条件

$$\beta\leqslant\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{J}(1-\mu_{J-i}^{T-i})\sum\limits_{r=r_1}^{r_2}h_r^{T-J}k_r^{T-J}}=\beta_D. \tag{2.4}$$

表 2.1

年代 \ 临界生育率	β_{cr}	β_1	β_D
1975	2.1600	2.2245	2.2849
1978	2.1943	2.2639	2.2525

当满足 (2.4) 式时人口过程为稳定的. 用文献 [2] 的数据计算出临界生育率 β_D, 表 2.1 列出了与文献 [2] 中 β_{cr} 和 β_1 的比较值.

三、计 算 例 子

利用某省 1964 年的人口普查资料在 IBM 4331 机上进行了计算,如图 (a) 所示, 人口按年龄分布极不合理. 若设想未来某年,例如 2059 年, 把人口控制到如图 (a) 所示的一条均匀曲线,即静止型的人口金字塔. 用交替方向法进行计算, 其结果如图 (a) 所示,达到预定的控制目标. 图 (b) 为人口控制变量 $\beta(t)$ 和总人口的变化曲线. 1964 年该省为 1263 万人, 若从那时就按图 (b) 的妇女平均生育率 $\beta(t)$ 控制生育, 到 2011 年才达到高峰 1600 万人,到 2059 年稳定到 1500 万人. 而实际上 1982 年该省已是 1956 万人了. 通过例子可看出,文中给出的控制算法可供国家制定生育计划用.

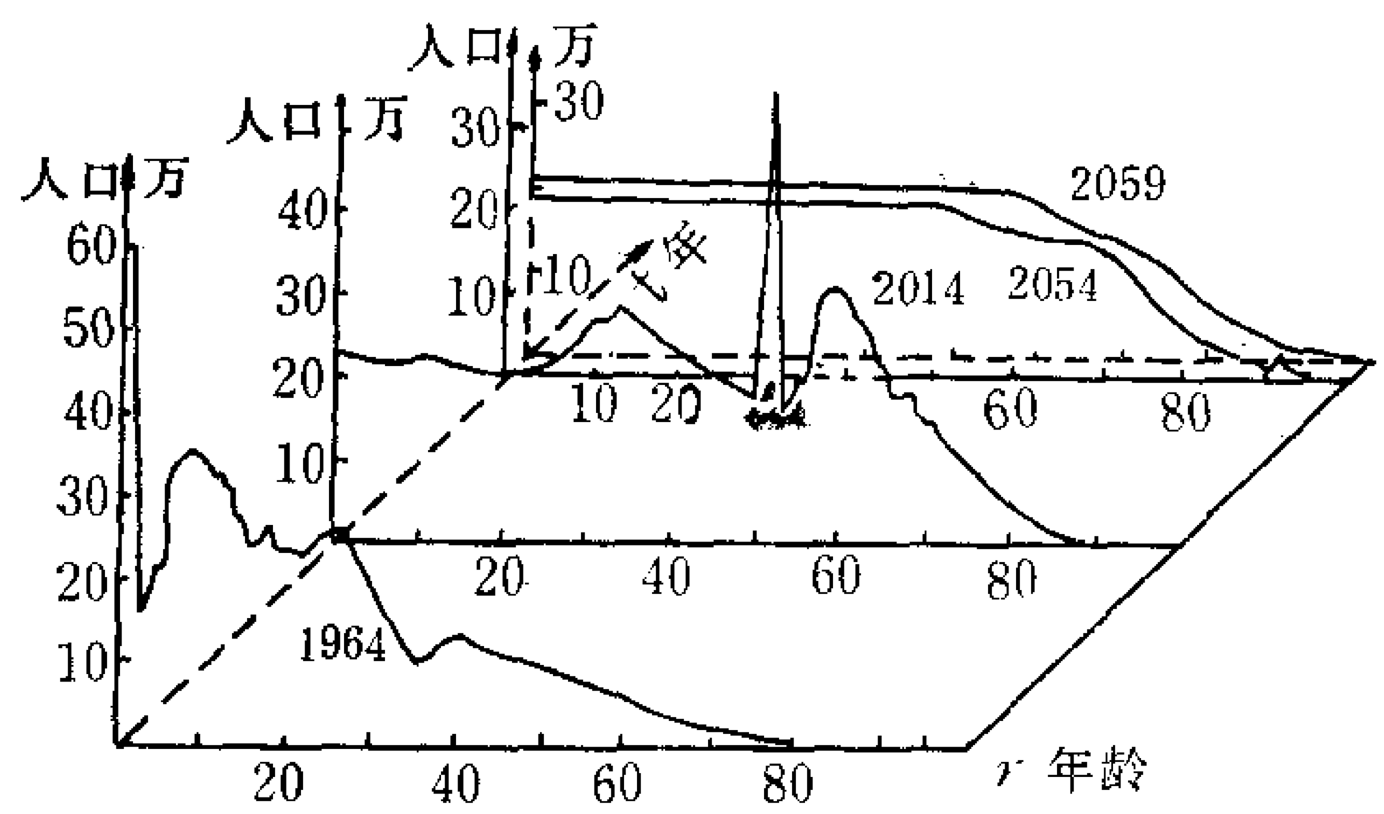

图 (a)

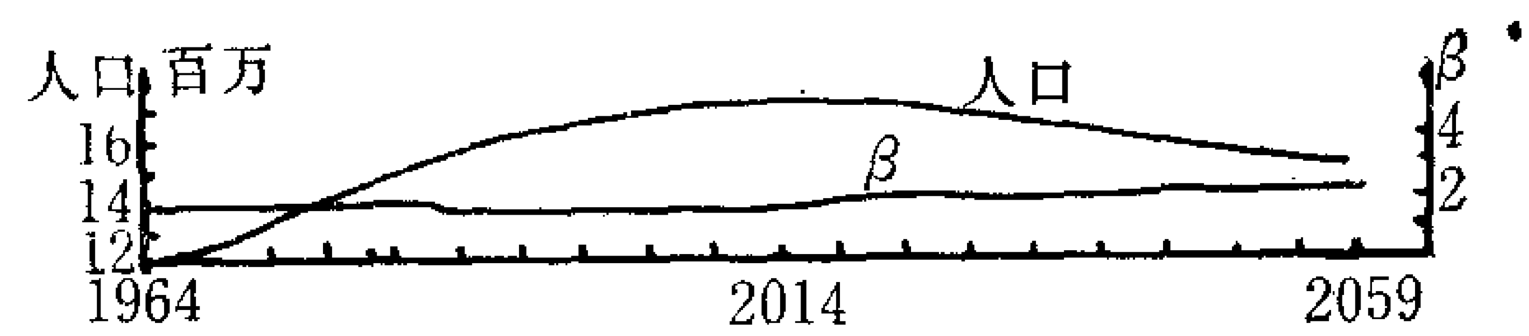

图 (b)

参 考 文 献

[1] 宋健、于景元、李广元,人口发展过程预测,中国科学 9(1980).

[2] 宋健、于景元,人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率,自动化学报, 7(1981),第一期.

[3] Haupt A. and Kane T. T., POPULATION HANBOOK, International Edition Population Reference Bureau, Inc. Washington, D. C.

[4] 冯康等编,数值计算方法,国防工业出版社,1978.

[5] Richtmyer R. D., Difference Methods for Initial-value Problems, Interscience Publishers, Inc. New York, (1957).

A COMPUTING METHOD FOR POPULATION CONTROL

ZHANG JIPENG

(The Computing Station of Gansu Provincial Planning Commission)

ABSTRACT

In this paper, the mathematical treatment is given for the problem of population control, it is a distributed system with boundary value control. The alternating direction method is deduced for population control. According to the stability of difference equation, the stability condition is obtained for control process. Lastly, a computed example is given.