第11卷 第2期
1985年4月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 11, No. 2
Apr., 1985

关于人口系统的稳定性

是嘉鸿
(复旦大学)

摘要

对于人口系统的连续模型，本文通过其解的递推表达式，用比较简洁的办法，证明了系统的稳定性与临界生育率之间的关系；并给出了人口系统的更为精细的模型，求得了相应的临界生育率.

文献[1—3]给出了(1)，(2)，(3)式人口系统的连续模型，证明了存在妇女临界生育率这一重要结论，并且给出了用妇女生育模式和死亡比速率表示的妇女临界生育率的解析表达式. 本文用简洁的方法证明了这一结论；提出了分胎生育模式的人口连续模型(1)，(2)，(12)；证明了相应的稳定性结论.

在一定的简化假设下，人口系统的连续模型通常由下面的一阶线性偏微分方程的初边值问题表达[2,4,5]：

$$\begin{cases} u_t + u_x = -\mu(x)u, & (1)\\ u(x,0) = \varphi_0(x), & (2)\\ u(0,t) = \beta\int_{r_1}^{r_2} h(x)k(x)u(x,t)dx. & (3)\end{cases}$$

其中自变量、未知函数及参变量的意义参见文献[2，3].

设人口最大寿命为 r_M. 则所讨论的区域为

$$0 \leqslant x \leqslant r_M, \quad t \geqslant 0.$$

作未知函数的变换

$$v(x,t) = u(x,t)e^{\int_0^x \mu(\xi)d\xi}.$$

关于函数 $v(x,t)$ 得到下面的定解问题

$$\begin{cases} v_t + v_x = 0, & (4)\\ v(x,0) = \varphi_0(x)e^{\int_0^x \mu(\xi)d\xi}, & (5)\\ v(0,t) = \beta\int_{r_1}^{r_2} h(x)k(x)v(x,t)e^{-\int_0^x \mu(\xi)d\xi}dx. & (6)\end{cases}$$

式(4)，(5)，(6)的解可用下面的递推关系式表达：

当 $x - t \geqslant 0$ 时，

$$v(x,t) = \varphi_0(x-t)e^{\int_0^{x-t}\mu(\xi)d\xi}, \tag{7}$$

本文于1983年3月24日收到.

$$u(x,t)=\varphi_0(x-t)e^{-\int_{x-t}^{x}\mu(\xi)d\xi}. \tag{8}$$

当 $x-t<0$ 时，u 和 v 分别满足

$$v(x,t)=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(\eta)k(\eta)e^{-\int_0^\eta\mu(\xi)d\xi}v(\eta,t-x)d\eta, \tag{9}$$

$$u(x,t)=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(\eta)k(\eta)u(\eta,t-x)d\eta e^{-\int_0^x\mu(\xi)d\xi}. \tag{10}$$

定理 1. 记

$$\beta_{cr}=\left(\int_{r_1}^{r_2}e^{-\int_0^r\mu(\xi)d\xi}h(r)k(r)dr\right)^{-1},$$

则人口系统 (1), (2), (3) 对任意初始条件 φ_0 稳定的充要条件是 $\beta\leqslant\beta_{cr}$.

证明. 设 $\beta\leqslant\beta_{cr}$. 证明存在常数 c, 使对于 $x\in[0,r_M],t\geqslant 0$, 成立

$$v(x,t)\leqslant C. \tag{11}$$

记

$$C_0=\max_{0\leqslant x\leqslant r_2}\varphi_0(x)e^{\int_0^x\mu(\xi)d\xi},$$

则当 $x\geqslant t$ 而 $x-t\leqslant r_2$ 时, $v(x,t)\leqslant C_0$.

显然可见，当 $-r_1\leqslant x-t<0$ 时

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(\eta)k(\eta)e^{-\int_0^\eta\mu(\xi)d\xi}v(\eta,t-x)d\eta\\&\leqslant C_0\beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)e^{-\int_0^r\mu(\xi)d\xi}dr\leqslant C_0.\end{aligned}$$

现设当 $x-t\geqslant -kr_1$ 时，上述不等式成立. 那么在 $x-t\geqslant-(k+1)r_1$ 时, $(x+\eta-t)|_{\eta\in(r_1,r_2)}\geqslant -kr_1$. 故

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\beta\int_{r_1}^{r_2}h(\eta)k(\eta)e^{-\int_0^\eta\mu(\xi)d\xi}v(\eta,t-x)d\eta\\&\leqslant C_0\beta\int_{r_1}^{r_2}h(r)k(r)e^{-\int_0^r\mu(\xi)d\xi}dr\leqslant C_0.\end{aligned}$$

另一方面，设 $\beta>\beta_{cr}$. 取 $\varphi_0(x)=$ 常数 a_0. 用与上面类似的数学归纳法容易证明对固定的 x_0, 当 $n\to\infty$ 时

$$v(x_0,x_0+r_2^n)\geqslant a_0\left(\frac{\beta}{\beta_{cr}}\right)^n\to\infty.$$

定理证毕.

对于人口系统，也可以用下面更为精细的模型描述.

$$\begin{cases}u_t+u_x=-\mu(x)u,\\u(x,0)=\varphi_0(x),\\u(0,t)=\int_{r_1}^{r_2}(h_1(r)+h_2(r))k(r)u(r,t)dr\\\qquad\qquad+(\beta-2)\int_{r_1}^{r_2}h_3(r)k(r)u(r,t)dr.\end{cases} \tag{12}$$

其中 $h_i(r)$ 为妇女第 i 胎的生育模式，满足 $\int_{r_1}^{r_2}h_i(r)dr=1$. (12)式中 $\beta\in[2,3]$. 该模型与 (1), (2), (3) 的区别在于考虑了各胎生育模式的不同.

因为所讨论的问题是人口状态的稳定性而不是一般的人口计算,所以(12)式中 h_1, h_2 的系数可取为 1, 而 $\beta \geqslant 2$. 又设死亡比速率 μ 不很大,以使定理 2 中的 $\beta_{cr} < 3$, 此时在(12)式中可限定 $\beta \leqslant 3$. 一般情况只需(12)式的第一个积分中项数作些变化. 结论与证明过程完全类似.

定理 2. 令

$$\beta_{cr} = \frac{1 - \int_{r_1}^{r_2}(h_1(r) + h_2(r))k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr}{\int_{r_1}^{r_2} h_3(r)k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr} + 2,$$

则(1),(2),(12)式对任意初值 $\varphi_0(x)$ 为稳定的充要条件是 $\beta \leqslant \beta_{cr}$.

证明. 现解的递推表达式为:

当 $x - t \geqslant 0$ 时,

$$v(x, t) = \varphi_0(x - t)e^{\int_0^{x-t}\mu(\xi)d\xi}. \tag{13}$$

当 $x - t < 0$ 时,

$$\begin{aligned} v(x,t) = &\int_{r_1}^{r_2}(h_1(r) + h_2(r))k(r)v(r, t - x)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr \\ &+ (\beta - 2)\int_{r_1}^{r_2} h_3(r)k(r)v(r, t - x)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr. \end{aligned} \tag{14}$$

利用 $\beta \leqslant \beta_{cr}$ 时的

$$\int_{r_1}^{r_2}(h_1(r) + h_2(r) + (\beta - 2)h_3(r))k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi} \leqslant 1$$

以及上面的表达式(13),(14),用类似证明定理 1 的方法可以证得本定理的结论. 证毕.

附注 1. 如 $h_1 = h_2 = h_3 = h$, 则

$$\beta_{cr} = \frac{1 - 2\int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr}{\int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr} + 2 = \frac{1}{\int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr}.$$

即不考虑各胎次生育模式的区别时,定理 2 即定理 1.

附注 2. 设 $k(r) = 0.5$,

$$g_i = \int_{r_1}^{r_2} h_i(r)k(r)e^{-\int_0^r \mu(\xi)d\xi}\, dr, \quad i = 1, 2, 3.$$

则一般地应有 $0.5 > g_1 > g_2 > g_3$. 此时

$$\frac{1 - g_1 - g_2}{g_3} + 2 > \frac{1}{g_1}.$$

这表明生育模式的后移会使临界生育率变大.

附注 3. 从临界生育率的表达式可见, r_2 以后的死亡比速率对人口的稳定性没有影响. 事实上, r_2 以后的 $\mu(x)$ 仅影响具体的人口年龄结构而不影响稳定性.

参 考 文 献

[1] 宋健、于景元,关于人口系统稳定性和妇女临界生育率的注记,科学通报(1980年),第25期.

[2] 宋健、于景元，人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率，自动化学报，7 卷(1981 年)，第 1 期.
[3] Song Jian, Yu Jingyuan and Li Guangyuan, Theory on Prospect of Population Evolution Processes, *Scientia Sinica,* XXIV (1981), 2.
[4] Langhaar, H. L., General Population Theory in the Age-time Continuum, *J. of the Franklin Inst.*, *293*(1972), 3, 199—214.
[5] Olsder, G. J. and Strijbos, R. C. W., Population Planning, Proceedings of 7th IFIP Conference, Sept. (1975), 8—14.

ON THE STABILITY OF POPULATION SYSTEM

Shi Jiahong
(*Fudan University*)

Abstract

In this paper, using the expression of the solution, the relationship between the critical fertility rate and the stability of the continuum of population system is proved by means of a simpler method. At the same time, a more precise model of the population system is given and the corresponding critical fertility rate is obtained.