第11卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 2
1985 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1985

线性最优控制系统的频域综合方法

（多输入-多输出系统）

王朝珠　王恩平
（中国科学院系统科学研究所）

摘　　要

本文用频域方法讨论了二次性能指标下的多输入-多输出线性系统最优控制的综合问题。利用多项式矩阵的谱分解方法，把求解最优综合函数的问题归结为求解两个多项式矩阵的 Diophantine 方程，从而给出了该问题解的频域形式。

一、引　　言

作者在文献[1]中，用频域方法讨论了二次性能指标下的单输入-单输出线性系统的最优控制问题，得到了最优综合函数的频域形式。本文将其结果推广到多输入-多输出系统。

设所讨论的线性系统为

$$A(s)\boldsymbol{z}(s)=B(s)\boldsymbol{u}(s)+T(s)\boldsymbol{e}_0, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{z}(s)$ 是系统的 l 维分状态；$\boldsymbol{u}(s)$ 是 r 维控制输入；$\boldsymbol{e}_0$ 是 l 维脉冲干扰输入；$A(s)$，$B(s)$，$T(s)$ 分别是 $l\times l$，$l\times r$，$l\times l$ 阶多项式矩阵；s 是拉普拉斯算符。

假设 $A(s)$ 与 $B(s)$ 左互质，$A(s)$ 为行正则，其行次为 $\partial_{hi}(A(s))=\sigma_i$，$i=1,2,\cdots,l$，$n=\sum_{i=1}^{l}\sigma_i$。$T(s)$ 是一个任意选定的稳定的行正则多项式矩阵，且 $\partial_{hi}(T(s))=\sigma_i-1$。$A^{-1}(s)B(s)$ 是严格真有理分式阵。

考虑如下性能指标：

$$J(\boldsymbol{u})=\int_0^\infty[\boldsymbol{z}^T(t)\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)]dt, \tag{1.2}$$

其中 R 是 $r\times r$ 阶正定对称常阵。由 Parseval 等式，性能指标(1.2)可化为如下形式：

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\boldsymbol{z}^T(-s)\boldsymbol{z}(s)+\boldsymbol{u}^T(-s)R\boldsymbol{u}(s)]ds. \tag{1.3}$$

为使 $J(\boldsymbol{u})<\infty$，容许控制应满足：

1）$\boldsymbol{u}(s)$ 是真有理分式矢量；2）$\boldsymbol{u}(s)$ 以及由它决定的 $\boldsymbol{z}(s)$ 都在复平面的右半闭平面内解析。

本文于1983年4月27日收到。

把满足这两条性质的控制函数 $\boldsymbol{u}(s)$ 的全体记为 Ω，称为容许控制集合．显然它是非空的.现在的问题是,从 Ω 中寻找一个控制函数,使得在式(1.1)的约束下,使 $J(\boldsymbol{u})$ 达到极小.

二、预 备 知 识

令

$$A^{-1}(s)B(s)=B_1(s)A_1^{-1}(s), \tag{2.1}$$

$$A^{-1}(s)T(s)=T_2(s)A_2^{-1}(s), \tag{2.2}$$

$$T^{-1}(s)B(s)=B_4(s)T_4^{-1}(s), \tag{2.3}$$

其中 $A_1(s)$ 与 $B_1(s)$ 右互质; $A_1(s)$, $A_2(s)$, $T_4(s)$ 都是列正则的, 且分别与 $A(s)$, $T(s)$ 有相同的行列式次数.

引理 1. 已知系统 (1.1), 性能指标 (1.3) 和互质分解表达式 (2.1), 那么, 一定存在 $r\times r$ 阶稳定的多项式阵 $\Delta(s)$, 使得

$$\Delta^T(-s)\Delta(s)=B_1^T(-s)B_1(s)+A_1^T(-s)RA_1(s). \tag{2.4}$$

其中 $\Delta(s)$ 列正则,且 $\partial_{lj}(\Delta(s))=\partial_{lj}(A_1(s))$, $j=1,2,\cdots,r$.

证明见文献 [2].

引理 2. 　已知多项式阵 $\Delta(s)$,$A_1(s)$,$A_2(s)$,$B_1(s)$, $B_4(s)$, $T_2(s)$, $T_4(s)$ 和 R, 满足式 (1.3), (2.1)—(2.3), 那么下列 Diophantine 方程有解:

$$\Delta^T(-s)M(s)+N^T(-s)A_2(s)=B_1^T(-s)T_2(s), \tag{2.5}$$

$$\Delta^T(-s)\Gamma(s)-N^T(-s)B_4(s)=A_1^T(-s)T_4(s), \tag{2.6}$$

并且满足

$$\partial_{hi}(N^T(-s))<\partial_{hi}(\Delta^T(-s)),\ i=1,2,\cdots,r \tag{2.7}$$

的解是唯一的．其中 $M(s)$, $N^T(-s)$, $\Gamma(s)$ 是适当维数的多项式阵.

该引理可用文献 [3] 中给出的方法类似地证明.

引理 3. 在引理 2 的假设下,设 $M(s)$, $\Gamma(s)$ 和 $N^T(-s)$ 是满足条件 (2.7) 的方程 (2.5)和(2.6)的一组解,那么必有 $\Gamma(s)$ 是列正则的,且 $\partial_{lj}(M(s))\leqslant\partial_{lj}(T_2(s))$, $j=1,2,\cdots,l$, $\partial_{lj}(\Gamma(s))=\partial_{lj}(T_4(s))$, $j=1,2,\cdots,r$.

证明. 设 $M(s)$, $\Gamma(s)$ 和 $N^T(-s)$ 是式 (2.5),(2.6) 的解,且满足式 (2.7), 那么由 (2.5) 式知

$$M(s)T_2^{-1}(s)=\Delta^{-T}(-s)B_1^T(-s)-\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)A_2(s)T_2^{-1}(s). \tag{2.8}$$

因 $B_1(s)A_1^{-1}(s)$ 为严格真有理分式阵, 且 $\partial_{lj}(\Delta(s))=\partial_{lj}(A_1(s))$, $j=1,2,\cdots,r$, 所以有 $\partial_{hi}(\Delta^T(-s))>\partial_{hi}(B_1^T(-s))$, $i=1,2,\cdots,r$. 又因为 $\Delta^T(-s)$ 行正则, 则 $\Delta^{-T}(-s)B_1^T(-s)$ 是严格真有理分式阵. 由计算不难看出 $\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)A_2(s)T_2^{-1}(s)$ 是真的,而 $A_2(s)T_2^{-1}(s)$ 为严格真的,因此,由式 (2.8) 知 $M(s)T_2^{-1}(s)$ 是严格真有理分式阵.

将 (2.6)式两边按行、列次展开,然后比较两边最高次数项系数阵,可以发现 $\Gamma(s)$ 是列正则的,且 $\partial_{lj}(\Gamma(s))=\partial_{lj}(T_4(s))$, $j=1,2,\cdots,l$, 从而引理得证.

三、控制函数的最优综合

本文的主要结果是:

定理. 已知系统 (1.1) 和性能指标 (1.3), 则 $\boldsymbol{u}^*(s)\in\Omega$ 为最优综合函数的充要条件是

$$\boldsymbol{u}^*(s)=-T_4(s)\Gamma^{-1}(s)M(s)T_2^{-1}(s)\boldsymbol{z}^*(s), \tag{3.1}$$

其中 $M(s)$, $\Gamma(s)$ 是方程 (2.5), (2.6) 的解,且满足式 (2.7). $\boldsymbol{z}^*(s)$是由 $\boldsymbol{u}^*(s)$ 决定的最优“轨线”.

证明. 利用式 (2.1)—(2.3) 可将系统 (1.1) 改写成:

$$\boldsymbol{z}(s)=B_1(s)A_1^{-1}(s)\boldsymbol{u}(s)+T_2(s)A_2^{-1}(s)\boldsymbol{e}_0. \tag{3.2}$$

将 (3.2) 式代入 (1.3) 式,并注意到 (2.4) 式得

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=&\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\boldsymbol{u}^T(-s)A_1^{-T}(-s)\Delta^T(-s)+\boldsymbol{e}_0^TH^T(-s)]\\&\times[\Delta(s)A_1^{-1}(s)\boldsymbol{u}(s)+H(s)\boldsymbol{e}_0]ds\\&+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\boldsymbol{e}_0^T[A_2^{-T}(-s)T_2^T(-s)T_2(s)A_2^{-1}(s)-H^T(-s)H(s)]\boldsymbol{e}_0ds,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $H(s)=\Delta^{-T}(-s)B_1^T(-s)T_2(s)A_2^{-1}(s)$. 显然, $H(s)$ 是严格真有理分式阵. 但是由 (2.5) 式可得

$$H(s)=M(s)A_2^{-1}(s)+\Delta^{-T}(-s)N^T(-s).$$

将上式代入式 (3.3) 中得

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=&\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\boldsymbol{u}^T(-s)A_1^{-T}(-s)\Delta^T(-s)+\boldsymbol{e}_0^TN(s)\Delta^{-1}(s)\\&+\boldsymbol{e}_0^TA_2^{-T}(-s)M^T(-s)]\\&\cdot[\Delta(s)A_1^{-1}(s)\boldsymbol{u}(s)+M(s)A_2^{-1}(s)\boldsymbol{e}_0\\&+\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)\boldsymbol{e}_0]ds\\&+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\boldsymbol{e}_0^T[A_2^{-T}(-s)T_2^T(-s)T_2(s)A_2^{-1}(s)\\&-H^T(-s)H(s)]\boldsymbol{e}_0ds.\end{aligned} \tag{3.4}$$

令

$$V(s)=M(s)A_2^{-1}(s)\boldsymbol{e}_0+\Delta(s)A_1^{-1}(s)\boldsymbol{u}(s),$$

$$L_1=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}V^T(-s)\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)\boldsymbol{e}_0ds,$$

$$L_2=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\boldsymbol{e}_0^T\Delta^{-1}(s)N(s)V(s)ds,$$

$$\begin{aligned}L=&\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\boldsymbol{e}_0^T[A_2^{-T}(-s)T_2^T(-s)T_2(s)A_2^{-1}(s)-H^T(-s)H(s)\\&+N(s)\Delta^{-1}(s)\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)]\boldsymbol{e}_0ds,\end{aligned}$$

于是有

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}V^T(-s)V(s)ds+L_1+L_2+L. \tag{3.5}$$

将 $e_0=T^{-1}(-s)A(-s)z(-s)-T^{-1}(-s)B(-s)u(-s)$ 以及(2.1)—(2.3)式代入 $V^T(-s)$ 中，得

$$V^T(-s)=\boldsymbol{u}^T(-s)A_1^T(-s)[\Delta^T(-s)-B_1^T(-s)T_2^{-T}(-s)M^T(-s)]$$
$$+\boldsymbol{z}^T(-s)T_2^{-T}(-s)M^T(-s). \tag{3.6}$$

由 (2.4)—(2.6) 式得

$$\Delta^T(-s)-B_1^T(-s)T_2^{-T}(-s)M^T(-s)=A_1^T(-s)T_4^{-T}(-s)\Gamma^T(-s).$$

把上式代入 (3.6) 式得

$$V^T(-s)=\boldsymbol{u}^T(-s)T_4^{-T}(-s)\Gamma^T(-s)+\boldsymbol{z}^T(-s)T_2^{-T}(-s)M^T(-s). \tag{3.7}$$

于是有

$$L_1=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}V^T(-s)\Delta^T(-s)N^T(-s)e_0ds$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\boldsymbol{u}^T(-s)T_4^{-T}(-s)\Gamma^T(-s)$$
$$+\boldsymbol{z}^T(-s)T_2^{-T}(-s)M^T(-s)]\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)\boldsymbol{e}_0ds.$$

由于 $T_4^{-1}(-s)\Gamma^T(-s)$，$T_2^{-1}(-s)M^T(-s)$ 都是真有理分式阵，而且 $\Delta^{-T}(-s)N^T(-s)$ 是严格真有理分式阵，并且由假设它们都在左半闭平面内解析，因此如果 $\boldsymbol{u}(s)$ 是容许控制，那么 $\boldsymbol{u}^T(-s)$ 和 $\boldsymbol{z}^T(-s)$ 都是真有理分式阵，且在左半闭平面内解析．于是由哥西定理知 $L_1=0$，而因 $L_1=L_2$，故 $L_2=0$．此时由 (3.5) 式得知

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}V^T(-s)V(s)ds+L.$$

由于 L 与 $\boldsymbol{u}$ 的选择无关，因此为使 $J(\boldsymbol{u})$ 达到极小的充要条件是 $V(s)=0$．这时再由 (3.7) 式得

$$\boldsymbol{u}^*(s)=-T_4(s)\Gamma^{-1}(s)M(s)T_2^{-1}(s)\boldsymbol{z}^*(s), \tag{3.8}$$

显然，在式 (3.8) 中 $T_4(s)\Gamma^{-1}(s)M(s)T_2^{-1}(s)$ 是真有理分式阵，因而是物理能实现的．

将式 (3.8) 代入系统 (1.1) 得闭环系统为

$$\boldsymbol{z}^*(s)=T_2(s)\bar{\Gamma}(s)[A_2(s)\bar{\Gamma}(s)+B_4(s)\bar{M}(s)]^{-1}\boldsymbol{e}_0. \tag{3.9}$$

其中 $\Gamma^{-1}(s)M(s)=\bar{M}(s)\bar{\Gamma}^{-1}(s)$，且 $\det\Gamma(s)=\alpha\det\bar{\Gamma}(s)$，$\alpha\neq 0$．

经计算表明

$$\det[A_2(s)\bar{\Gamma}(s)+B_4(s)\bar{M}(s)]=\beta\det\Delta(s)\det T(s),\beta\neq 0.$$

这表明闭环系统是稳定的．由 (3.9) 式给出的 $\boldsymbol{z}^*(s)$ 是真有理分式阵也是不难验证的．由此可见，由式 (3.8) 决定的控制 $\boldsymbol{u}(s)\in\Omega$，且使性能指标达到极小，因此它是最优综合函数，于是定理得证．

关于最小性能指标有

$$J_{\min}(\boldsymbol{u}^*)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\boldsymbol{e}_0^TA_2^{-T}(-s)T_2^T(s)[I-B_1(s)\Delta^{-1}(s)\Delta^{-T}(-s)B_1^T(s)]$$
$$\times T_2(s)A_2^{-1}(s)\boldsymbol{e}_0ds.$$

依题设易知 $J_{\min}(\boldsymbol{u}^*)<\infty$．

定理给出了二次性能指标下的最优控制的解，其中 $T(s)$ 是可以事先选择的，它相当于状态空间中的极小阶观测器的特征矩阵。因此，本文给出的最优综合函数实际上是带有观测器补偿的最优动态补偿器。关于 $T(s)$ 的选取原则只须注意二条，一是稳定性，二是 $\partial_{hi}(T(s)) = \sigma_i - 1$。

参 考 文 献

[1] 王恩平、王朝珠，线性最优控制系统的频域综合方法(单输入-单输出系统)，自动化学报，9(1983)，152—156.

[2] Yaula, D. C., On the Factorization of Rational Matrices, *IRE. Trans. Information Theory*, IT-7 (1961), No. 3, 172—189.

[3] Kučera, V., Discrete Linear Control, The Polynomlal Equation Approach, Praha. Academia, 1979.

A SYNTHESIS METHOD OF LINEAR OPTIMAL CONTROL SYSTEMS IN FREQUENCY DOMAIN (MULTI-INPUT MULTI-OUTPUT SYSTEMS)

WANG CHAOZHU WANG ENPING

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the synthesis problem of multivariable linear optimal control systems with quadratic performance index is discussed using frequency domain method. By means of the spectral factorization of polynomial matrix, optimal synthesis function in frequency domain is still obtained by solving two Diophantine equations, and hence frequency domain form for solving the problem is presented.