第11卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 2
1985 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Apr., 1985

方块脉冲函数用于非线性系统的分析以及最优控制的综合

邢继祥　王兴涛
(哈尔滨工业大学)

摘　　要

本文用方块脉冲函数方法讨论了解非线性微分方程系统的收敛性和稳定性. 在分析和综合非线性系统最优控制规律中,得到了分段恒定解答的递推算法,算法证明简单,除对基于二次型性能指标的线性时变系统有效外,也可用于求解线性最优控制系统的 Riccati 方程.

文献[1]将方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制,得到了易于计算机实现的递推公式,但证法所用性质较多,且不便于推广到非线性系统. 本文在文献[1,3]的基础上,对方块脉冲函数及其解状态方程方面的性质做了进一步的明确与补充,将方块脉冲函数用于非线性系统的分析. 本文通过正则方程边值问题的求解,导出了两点边值问题的递推算法公式. 递推公式为显式单步恒稳型,对于线性二次型性能指标问题使用很方便.

本文符号尽量与文献[1]一致.

一、方块脉冲函数的性质

$t\in[0,T)$ 上 m 个分量的方块脉冲函数族表达式为

$$\Pi_k(t)=\begin{cases}1, & (k-1)T/m\leqslant t<kT/m,\\ 0, & \text{其它}\quad k=1,2,\cdots,m.\end{cases}\tag{1}$$

性质一. 方块脉冲函数的脱关性与正交性是

$$\Pi_k(t)\Pi_j(t)=\begin{cases}\Pi_k(t), & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}\tag{2}$$

$$\int_0^T\Pi_k(t)\Pi_j(t)dt=\begin{cases}T/m, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}\tag{3}$$

性质二. $[0,T)$ 上可积函数 $C(t)$ 若有近似展开式

$$C(t)\cong\sum_{k=1}^{m}\overline{C}_k\Pi_k(t),\tag{4}$$

其中系数定义为

本文于1982年7月21日收到.

$$\bar{C}_k = m/T\int_0^T C(t)\Pi_k(t)dt,$$

则有

$$\bar{C}_k = \frac{1}{T/m}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m} C(t)dt. \tag{5}$$

即系数 $\bar{C}_k$ 是函数 $C(t)$ 在第 k 个子区间上的平均值.

性质三. 若记 $\Pi_{(m)}(t) = [\Pi_1(t),\Pi_2(t),\cdots,\Pi_m(t)]^\tau$ 为 m 段方块脉冲函数列向量，则其积分满足

$$\int_0^t \Pi_{(m)}(\tau)d\tau \cong \frac{T}{m}H\Pi_{(m)}(t), 0 \leqslant t < T. \tag{6}$$

其中 H 称为方块脉冲函数积分运算矩阵

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

且 $\Pi_{(m)}(t)$ 的反向积分满足

$$\int_T^t \Pi_{(m)}(\tau)d\tau \cong -\frac{T}{m}H^\tau\Pi_{(m)}(t). \tag{8}$$

性质四[3]. 若 $x(0) = x_0$,

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^m \bar{x}_k\Pi_k(t) = X_{(m)}^\tau\Pi_{(m)}(t),$$

$$\dot{x}(t) \cong \sum_{k=1}^m \bar{\dot{x}}_k\Pi_k(t) = \dot{X}_{(m)}^\tau\Pi_{(m)}(t),$$

则

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{T}{2m}\bar{\dot{x}}_1 + x_0, \\ \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \dfrac{T}{2m}(\bar{\dot{x}}_{k+1} + \bar{\dot{x}}_k), \\ k = 1,\cdots,m-1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_m = x(T) - \dfrac{T}{2m}\bar{\dot{x}}_m, \\ \bar{x}_k = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{T}{2m}(\bar{\dot{x}}_{k+1} + \bar{\dot{x}}_k), \\ k = m-1, m-2,\cdots,1. \end{cases} \tag{10}$$

性质五. 若 $C(t)$ 平方可积，则其方块脉冲函数展开式平均收敛于 $C(t)$，即

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\left(C(t) - \sum_{k=1}^m \bar{C}_k\Pi_k(t)\right)^2 dt = 0. \tag{11}$$

当用m项方块脉冲函数族作任意线性组合

$$S_m(t)=\sum_{k=1}^{m}a_k\Pi_k(t) \tag{12}$$

逼近平方可积函数 $C(t)$ 时，系数取 $\bar{C}_k$ 是最优平方逼近．这是方块脉冲函数族基础性质之一．

证．(后一部分参见文献[3])不难推得

$$\int_0^T\left(C(t)-\sum_{k=1}^{m}\bar{C}_k\Pi_k(t)\right)^2dt=\int_0^T C^2(t)dt-\frac{T}{m}\sum_{k=1}^{m}\bar{C}_k^2. \tag{13}$$

注意上式右边,由于 $\bar{C}_k$ 是第 k 个子区间上 $C(t)$ 的平均值,若 $C(t)$ 连续,则 $C^2(t)$ 的定积分定义可得

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\bar{C}_k^2\frac{T}{m}=\int_0^T C^2(t)dt.$$

若 $C(t)$ 可积,由定积分存在的第一充分必要条件也很容易得到上式．由此对 (13) 式取 $m\to\infty$ 时的极限,即证得 (11) 式．

注意,本文中“$\cong$”表示一种近似或称方块脉冲函数(近似)展开式．

二、用于非线性及线性状态方程的分析以及求解的递推算法

$$\dot{x}(t)=f(x,u,t),\qquad x(0)=x_0 \tag{14}$$

$x\in R^n$，$u\in R^r$，现求 $x(t)$ 的m段方块脉冲函数展开式的递推算法公式．展开式为

$$x(t)\cong\sum_{k=1}^{m}\bar{x}_k\Pi_k(t).$$

对 (14) 式积分并取 $x(t)$ 与$f(x,u,t)$ 的展开式可得

$$\sum_{k=1}^{m}(\bar{x}_k-x_0)\Pi_k(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{m}\bar{f}_k\Pi_k(\tau)d\tau, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{f}_k&=\frac{1}{T/m}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m}f\left(\sum_{k=1}^{m}\bar{x}_k\Pi_k(\tau),u(\tau),\tau\right)d\tau\\&=\frac{1}{T/m}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m}f(\bar{x}_k,u(\tau),\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{16}$$

注意此处 $\bar{f}_k$ 与文献 [3] 中 $f(\bar{x}_k,\bar{u}_k,\bar{t}_k)$ 略有改进，是为了便于收敛性研究与截断误差的估计,见本文三．应用性质三,将 (15) 式系数分开可得

$$\begin{cases}\bar{x}_1-x_0=\bar{f}_1\dfrac{T}{2\,m},\\ \bar{x}_k-x_0=\bar{f}_1\dfrac{T}{m}+\cdots+\bar{f}_{k-1}\dfrac{T}{m}+\bar{f}_k\dfrac{T}{2\,m},\\ k=2,3,\cdots,m.\end{cases} \tag{17}$$

(17) 式的第一式不动,其余第 $k+1$ 式减去第 k 式即得如下求解非线性系统的递推算法公式．

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_0 + \dfrac{T}{2m}\bar{f}_1, \\ \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \dfrac{T}{2m}(\bar{f}_{k+1} + \bar{f}_k) \\ k = 1,2,\cdots, m-1. \end{cases} \tag{18}$$

对于线性时变系统，(14) 式中取

$$f(x,u,t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

若记

$$A(t) \cong \sum_{k=1}^{m} \bar{A}_k \Pi_k(t),$$

$$(B(t)u(t)) \cong \sum_{k=1}^{m} (\overline{Bu})_k \Pi_k(t),$$

则

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - x_0 = [\bar{A}_1\bar{x}_1 + (\overline{Bu})_1]\dfrac{T}{2m}, \\ \bar{x}_{k+1} - x_k = [\bar{A}_k\bar{x}_k + (\overline{Bu})_k]\dfrac{T}{2m} + [\bar{A}_{k+1}\bar{x}_{k+1} + (\overline{Bu})_{k+1}]\dfrac{T}{2m}, \\ k = 1,2,\cdots, m-1. \end{cases} \tag{19}$$

由(19)式可归纳出用方块脉冲函数求解线性时变系统状态方程的(显式)递推公式:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \left[I_n - \dfrac{T}{2m}\bar{A}_1\right]^{-1}\left[x_0 + \dfrac{T}{2m}(\overline{Bu})_1\right], \\ \bar{x}_{k+1} = \left[I_n - \dfrac{T}{2m}\bar{A}_{k+1}\right]^{-1}\left\{\left[I_n + \dfrac{T}{2m}\bar{A}_k\right]\bar{x}_k + \dfrac{T}{2m}(\overline{Bu})_k + \dfrac{T}{2m}(\overline{Bu})_{k+1}\right\}, \\ \quad k = 1,2,\cdots, m-1. \end{cases} \tag{20}$$

上式几乎与文献[1]相同，为便于收敛性研究及截断误差的估计，这里没有再取 $(\overline{Bu})_k \approx \bar{B}_k\bar{u}_k$. 上式的证明由性质一易得.

可见，线性系统递推算法公式可变为易算的显式单步方法，比非线性系统算法公式更简便. 非线性的隐式递推公式可采用适当的迭代方法通过预估校正格式进行求解.

三、递推算法的收敛性与数值稳定性

上节得到的单步差分格式的算法，除了在各分点 $\frac{T}{m}k(k = 1,2,\cdots,m)$ 上取各段平均值外，与通常梯形方法相同. 文献 [3] 曾对线性定常系统与梯形方法进行了初步比较. 下面探讨一般的非线性系统递推算法的截断误差、收敛性、算法精度的阶数及数值稳定性[8].

记步长 $h = \frac{T}{m}$, $t_k = kh$, 设 $f(x,u(t),t)$ 对 x 及 t 二次连续可微，而 $x(t)$ 亦二次连续可微.

由 (18) 式有

$$\frac{1}{h}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = \frac{1}{2}(\bar{f}_{k+1} + \bar{f}_k). \tag{21}$$

对 (21) 式左端在 $t=t_k$ 作幂次展开有

$$\frac{1}{h^2}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t)dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t)dt\right\} = \dot{x}(t_k) + O(h^2).$$

而 (21) 式右端在 $t=t_k$ 作幂次展开有(由 (16) 式)

$$\frac{1}{2h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\bar{x}_k, u(t), t)dt + \frac{1}{2h}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\bar{x}_{k-1}, u(t), t)dt$$

$$= f\Big|_{t_k} + O(h^2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{t_k}\frac{1}{2h}\left[\frac{1}{3}\ddot{x}(t_k)h^3 + 2hO(h^3)\right]$$

$$= f(x(t_k), u(t_k), t_k) + O(h^2).$$

于是得差分方程 (21) 与原微分方程在 t_k 点的“差”：

$$E = \left\{\frac{1}{h}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) - \frac{1}{2}(\bar{f}_{k+1} + \bar{f}_k)\right\} - \{\dot{x} - f\}_{t_k} = O(h^2).$$

可见截断误差 $E=O(h^2)$. 当 $\frac{T}{m}=h\to 0$ 时，$E\to 0$，说明方法当 $m\to\infty$ 时收敛，且具有二阶精度.

此数值格式的优点是数值(或称绝对)稳定性好，恒稳或稳定域包含了全部左半平面，也称其具有 A-稳定性. 因此，对于求解病态的 (stiff) 方程特别有利. 而恒稳性保证：如果局部离散误差和舍入误差保持充分小时，无论任何步长整体误差将以稳定的方式传播[8].

恒稳性的证明可通过对模型方程

$$\dot{x} = \mu x,\ \ \mu = \alpha + i\beta,\ \ \mathrm{Re}\mu = \alpha < 0,$$

应用(21)式所得差分方程的特征根满足 $|\lambda(\mu h)| < 1$ 证得.

所得递推算法的收敛性与数值稳定性是用方块脉冲函数分析与综合最优控制的又一重要基础.

四、用于非线性、线性系统的综合及 Riccati 方程的求解

1. 用于非线性及线性系统的综合

对 (14) 式所描述的非线性系统，求取值于 U 内的最优综合控制 $u^0 = u(x(t), t)$ 的分段恒定解答，并使

$$J = \int_0^T L(x(t), u(t), t)dt + \theta(x(T), T) \tag{22}$$

达到极小.

引入 Hamilton 函数后，应用最大值原理，可得最优控制为

$$u^0 = u(x(t), \lambda(t), t). \tag{23}$$

将 (23) 式代入正则方程可得正则方程的(混合)边值问题

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \lambda(t), t), \\ \dot{\lambda}(t) = g(x(t); \lambda(t), t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ \lambda(T) = -\dfrac{\partial\theta(x(T), T)}{\partial x(T)}. \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$g(x(t),\lambda(t),t)=-\frac{\partial H(x,u^0,\lambda,t)}{\partial x}.$$

将(24)式进行 $T\to t$ 的反向积分，两端取 $x(t)$，$\lambda(t)$ 与 $f(x,\lambda,t)$，$g(x,\lambda,t)$ 的 m 段方块脉冲函数展开式，并由性质三的 (8) 式可得

$$\begin{cases}(x_{(m)}-x(T))^\tau\Pi_{(m)}(t)=-\dfrac{T}{m}f^\tau_{(m)}H^\tau\Pi_{(m)}(t),\\[2ex](\lambda_{(m)}-\lambda(T))^\tau\Pi_{(m)}(t)=-\dfrac{T}{m}\,g^\tau_{(m)}H^\tau\Pi_{(m)}(t).\end{cases}\tag{25}$$

式中

$$f^\tau_{(m)}=[\bar f_1,\bar f_2,\cdots,\bar f_m],\qquad \bar f_k=\frac{1}{T/m}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m}f(\bar x_k,\bar\lambda_k,t)dt,$$

$$g^\tau_{(m)}=[\bar g_1,\bar g_2,\cdots,\bar g_m],\qquad \bar g_k=\frac{1}{T/m}\int_{(k-1)T/m}^{kT/m}g(\bar x_k,\bar\lambda_k,t)dt.$$

再将式 (25) 的系数分开并稍加消元(象由 (17) 式到 (18) 式那样)，可得求解非线性系统正则方程混合边值问题的递推公式:

取 $k=m-1,\cdots,2,1$

$$\begin{cases}\begin{cases}\bar x_m=x(T)-\dfrac{T}{2m}\bar f_m,\\[2ex]\bar\lambda_m=\lambda(T)-\dfrac{T}{2m}\bar g_m,\end{cases} & (26)\\[6ex]\begin{cases}\bar x_k=\bar x_{k+1}-\dfrac{T}{2m}(\bar f_{k+1}+\bar f_k),\\[2ex]\lambda_k=\bar\lambda_{k+1}-\dfrac{T}{2m}(\bar g_{k+1}+\bar g_k).\end{cases} & (27)\end{cases}$$

另一证法：对(24)式取 $x(t)$，$\lambda(t)$ 的展开式，再应用(10)式，可以证得(26)，(27)式。

(26)，(27) 式是关于 $\bar x_k$，$\bar\lambda_k$ 的隐函数形式的递推公式．解得 $\bar\lambda_k=\lambda(\bar x_k,\bar t_k)$，$k=m$，$m-1,\cdots,1$，代入 (23) 式即得 $u^0(t)$ 的分段恒定综合函数解答:

$$\bar u^0_k=u(\bar x_k,\bar\lambda_k,\bar t_k)=\tilde u(\bar x_k,\bar t_k),\quad k=1,2,\cdots,m.$$

用于线性二次问题时可有大的改进．此时，(23)，(24) 式为

$$u^0(t)=R^{-1}(t)B^\tau(t)\lambda(t),\tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}\dot x(t)\\ \dot\lambda(t)\end{bmatrix}=F(t)\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix},\quad\begin{cases}x(0)=x_0\\ \lambda(T)=-Sx(T).\end{cases}\tag{29}$$

其中

$$F(t)=\begin{bmatrix}A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^\tau(t)\\ Q(t) & -A^\tau(t)\end{bmatrix}_{2n\times 2n}.\tag{30}$$

当取

$$F(t)\cong\sum_{k=1}^{m}\bar F_k\Pi_k(t),$$

其中

$$\bar{F}_k = \begin{bmatrix} \bar{A}_k & \overline{(BR^{-1}B^\tau)}_k \\ \bar{Q}_k & -\bar{A}_k^\tau \end{bmatrix} \tag{31}$$

时，由 (26)，(27)，(31) 式可得显式递推公式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{x}_m \\ \bar{\lambda}_m \end{bmatrix} = \left[I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{F}_m \right]^{-1} \begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix}, & (32) \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{\lambda}_k \end{bmatrix} = \left[I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{F}_k \right]^{-1} \left[I_{2n} - \frac{T}{2m} \bar{F}_{k+1} \right] \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix}, & (33) \\ \quad k = m-1, \cdots, 2, 1. \end{cases}$$

由此得 $\bar{\lambda}_k = \lambda(\bar{x}_k, \bar{t}_k)$，$k = 1, 2, \cdots, m$. 代入 (28) 式可得

$$u^0 \cong \sum_{k=1}^{m} \overline{(R^{-1}B^\tau)}_k \bar{\lambda}_k \Pi_k(t). \tag{34}$$

2. 用于 Riccati 方程的求解

欲解 Riccati 微分方程的未知函数 $P(t)$，而 $P(T) = S$，可借助线性方程组求解[5]. 若

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} Z(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Z(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ -S \end{bmatrix}, \tag{35}$$

则

$$P(t) = -Y(t)Z^{-1}(t). \tag{36}$$

其中 $F(t)$ 由 (30) 式表出. 对 (35) 式采用前节办法或直接利用性质四，可得 $\bar{Y}_k$，$\bar{Z}_k$ 的递推算法公式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{Z}_m \\ \bar{Y}_m \end{bmatrix} = \left[I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{F}_m \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ -S \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \bar{Z}_k \\ \bar{Y}_k \end{bmatrix} = \left[I_{2n} + \frac{T}{2m} \bar{F}_k \right]^{-1} \left[I_{2n} - \frac{T}{2m} \bar{F}_{k+1} \right] \begin{bmatrix} \bar{Z}_{k+1} \\ \bar{Y}_{k+1} \end{bmatrix}, \\ \quad k = m-1, \cdots, 2, 1. \end{cases} \tag{37}$$

其中 $\bar{F}_k$ 由 (31) 式表出. 最后可得 $P(t)$ 的展开式

$$P(t) \cong -\sum_{k=1}^{m} \bar{Y}_k \bar{Z}_k^{-1} \Pi_k(t). \tag{38}$$

五、举　　例

例 1. 文献 [1] 设有线性时变系统及二次指标

$$\dot{x}(t) = tx(t) + u(t), \quad x(0) = 1,$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]dt,$$

求最优控制函数 $u^0(t)$ 的分段恒定的综合形式.

解. 由 (28) 式 $u^0(t) = \lambda(t)$，

已知 $T = 1$，$A(t) = t$，$B(t) = Q(t) = R(t) = 1$，

由(30)式

$$F(t)=\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}.$$

今取$m=4$,则 $[\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4]=\left[\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}\right]$,从而由(31)式可得

$$\bar{F}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix},\quad \bar{F}_2=\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix},\quad \bar{F}_3=\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{5}{8} \end{bmatrix},\quad \bar{F}_4=\begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 1 \\ 1 & -\frac{7}{8} \end{bmatrix},$$

代入(32),(33)式,并求解可得

$$[\bar{\lambda}_4,\bar{\lambda}_3,\bar{\lambda}_2,\bar{\lambda}_1]=-[0.1404\bar{x}_4,\ 0.4771\bar{x}_3,\ 0.7800\bar{x}_2,\ 0.9442\bar{x}_1].$$

最后由(34)式,得最优控制综合函数为

$$u^0(x(t),t)\cong -0.9442\bar{x}_1\Pi_1(t)-0.7800\bar{x}_2\Pi_2(t)-0.4771\bar{x}_3\Pi_3(t)-0.1404\bar{x}_4\Pi_4(t).$$

可见反馈增益阵 $K(t)$ 的分段恒定解答为

$$K(t)=0.9442\Pi_1(t)+0.7800\Pi_2(t)+0.4771\Pi_3(t)+0.1404\Pi_4(t).$$

结果与文献[1]差别极小,而解法更简便.

例 2[7]. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}=x^{(2)}, \\ \dot{x}^{(2)}=u, \end{cases}$$

求 $u(t)$ 的分段恒定控制函数(开关时间在 $T/3,\ 2T/3$),使泛函

$$J=\int_0^T(u^2+1)dt$$

达到最小值;状态从(3,3)转移到(0,0).

解. 应用最大值原理可得$u^0=\frac{1}{2}\lambda^{(2)}(t)$,由(24),(26),(27)式得到的分段表达式解得

$$\bar{u}_1^0=\frac{1}{2}\bar{\lambda}_1^{(2)}=-\frac{27}{2T^2}-\frac{39}{4T},\ \bar{u}_2^0=\frac{1}{2}\bar{\lambda}_2^{(2)}=-\frac{3}{T},$$

$$\bar{u}_3^0=\frac{1}{2}\bar{\lambda}_3^{(2)}=\frac{27}{2T^2}+\frac{15}{4T}.$$

再由 $H|_T=0$ 推得 $\lambda^{(2)}(T)=2$,并可解得 $T=9.30196$,从而分段恒定的最优控制为

$$[\bar{u}_1^0,\bar{u}_2^0,\bar{u}_3^0]=-[1.20419,0.32251,-0.55916].\ \text{而}\ J_{\min}=15.09009.$$

此结果比文献[7]更好.

本文修改中得到复旦大学李训经、陈有根老师的鼓励和指导,深表谢意.

参 考 文 献

[1] 徐宁寿、郑兵,方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制,自动化学报,**8**(1982),55—67.
[2] 彭嘉雄等,信息与控制,**11**(1982),35—41.
[3] Sannuti, B. E., Analysis and Synthesis of Dynamic Systems Via Block-pulse Functions, Proc. *IEE* **124**(1977), 569—571.
[4] Shieh, L. S., Yeung, C. K and Mcinnis, B. C., *Int. J. Control* **28** (1978), 383—392.
[5] Brian, D. O. Anderson, John B. Moore, Linear Optimai Control (有中译本).
[6] Chen, W. L., Shih, Y. P., *Int. K. Control,* 1978. 27.
[7] Yeh, H. H., *Int. J. Control,* **16**(1972), 71—80.
[8] 冯康等,数值计算方法,国防工业出版社,1978 年.

ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS AND SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL VIA BLOCK-PULSE FUNCTIONS

XING JIXIANG　WANG XINGTAO
(Harbin Institute of Technology)

ABSTRACT

In this paper, the convergence and stability of the block-pulse function method in solving nonlinear systems are proved. By applying properties of the block-pulse functions to the analysis and synthesis of nonlinear systems, recursive algorithms of the piecewise constant solutions are obtained. The proof is simple. The method is quite efficient, particularly, for time-varying linear systems with a quadratic performance index. Furthermore, the Riccati equation of the optimal linear control system can also be solved by this method.

征　文　通　知

中国自动化学会控制理论委员会拟于今年九月召开“第五届全国控制理论及其应用学术交流会”. 现将有关征文事宜通知如下：

1. 征文范围：凡与系统的建模、辨识、估计与控制等问题的分析与设计方面有关的理论及应用研究成果都属征文之列. 尤其希望应用研究及开发工作中的科研成果或阶段性成果能在会上进行交流，以便促进科学技术更快地转化为生产力，使科研工作更好地为国民经济服务.

2. 截止日期：凡投会议的学术论文或技术报告请于五月卅一日前一式两份寄往：北京中关村中国科学院系统科学所徐山鹰同志收. 请同时寄一式两份四百字以内的内容摘要，说明文章主要论题、基本结果、方法及应用前景或效果.

3. 会议不退稿，请作者自留底稿.

4. 论文录用与否及会议正式通知将于七月中旬发出.

中国自动化学会控制理论委员会