第 11 卷 第 3 期
1985 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 11, No. 3
July, 1985

带限制的随机递推算法

狄 昂 照
（中国科学院系统科学所）

摘 要

本文研究了带限制的随机递推算法，并在一定条件下证明了这种算法的几乎处处收敛性、均方收敛性以及平均收敛性。

一、引 言

在自适应控制、系统辨识以及自适应波束形成等许多领域中常常需要分析随机递推算法的渐近性质. 所谓随机递推算法是说这种算法的输入数据是基于对某些随机量的测量. 例如在系统辨识中常见的递推最小二乘法:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + K_{n+1}(y_{n+1} - x^\tau_{n+1}\Theta_n),$$
$$K_{n+1} = P_n x_{n+1}/(1 + x^\tau_{n+1}P_n x_{n+1}),$$
$$P_{n+1} = (x^\tau_{n+1}x_{n+1})^{-1} = [I - P_n x_{n+1}x^\tau_{n+1}/(1 + x^\tau_{n+1}P_n x_{n+1})]P_n.$$

这里 $\{y_n, x_n\}$ 是对某些随机量的一列测量值. 文 [1] 得到下面算法:

$$\boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{w}_n - a_n P y_n \boldsymbol{x}_n.$$

这里 $\{y_n, x_n\}$ 也是对某些随机量的测量值. 作为一般的随机递推算法,它具有如下形式:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + a_n Q_{n+1}(\Theta_n, \omega).$$

这里 ω 表明函数 $Q_n(\cdot,\cdot)$ 的随机性. 对固定的 ω, $Q_n(\cdot, \omega)$ 表示一次确定的抽样. 在很多文章中都把 $Q_{n+1}(\Theta_n, \omega)$ 写成 $Q_{n+1}(\Theta_n, \xi_{n+1}(\omega))$ 的形式. 但本文的写法，从数学的角度看更一般些.

对不同的实际问题,会碰到各种不同的随机递推算法,每个算法都需要分析它的收敛性. 这些工作并不都是很容易的，有很多工作是重复的. 因此研究一般随机递推算法的收敛性就很重要了[2,3]. 但在文[2,3]的判别法中都要求 $\{\|\Theta_n(\omega)\|\}$ 在某种意义下对 n 一致有界. 而判别 $\{\|\Theta_n(\omega)\|\}$ 的一致有界性,在许多情况下并不比判别它的收敛性更容易些. 因此，一个自然的想法是可否在运算过程中人为地限制 $\{\|\Theta_n(\omega)\|\}$ 的值? 这样，有界性是保证了,收敛性还能成立吗? L. Ljung 在文 [2] 中提出过这一思想,并在 [2,Th4] 中提出一种带限制的随机递推算法. 但是，为了判断它是否收敛，除了验证 [2, Th4] 中众多的条件外，还需要制造一个类似于 Lyapunov 函数的函数. 这是相当困难的. 本文给出另一种带限制的算法，它不需要再附加任何新的条件便能保证 $\{\Theta_n(\omega)\}$ 几乎处处收

本文于 1982 年 4 月 2 日收到.

敛于最优值.

二、问 题

考虑下面算法:

$$\Theta_{n+1}(\omega)=[\Theta_n(\omega)+a_nQ_{n+1}(\Theta_n,\omega)]_{N,\Theta_n}. \tag{1}$$

这里

$$[\Theta]_{N,Z}=\begin{cases}\Theta, & \text{如果 } V(\Theta)<N,\\ Z, & \text{如果 } V(\Theta)\geqslant N;\end{cases} \tag{2}$$

$\Theta_n(\omega)$, $Q_n(\cdot,\omega)$ 都是 $p\times q$ 阶随机矩阵. $V(\cdot)$ 是给定的由 $p\times q$ 阶矩阵空间 $E^{p\times q}$ 到实数空间的一个映象. N, Z 分别是给定的实数与 $p\times q$ 阶矩阵. 矩阵 A 的范数

$$\|A\|^2=\operatorname{tr}AA'.$$

当 $A(\omega)$是随机矩阵时,自然 $\|A\|^2$ 也是一个随机量. $a_k>0$, $k=1,2,\cdots$,并满足

$$a_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\infty. \tag{3}$$

当 $V(\Theta)=\|\Theta\|$ 时,式(1),(2)成为

$$\Theta_{n+1}(\omega)=\begin{cases}\Theta_n(\omega)+a_nQ_{n+1}(\Theta_n(\omega),\omega), & \text{当 } \|\Theta_n(\omega)\|<N,\\ \Theta_n(\omega), & \text{当 } \|\Theta_n(\omega)\|\geqslant N.\end{cases} \tag{1'}$$

作为带限制随机递推算法应用的例子,可以参看文[1,4]. 当彩用一般的随机递推算法时(即不加限制),只有当输入是平稳且相互独立时,才能保证算法的收敛性[1]. 但如果把文[1]中的算法按照式(1′)的方法给于限制,那么,只要适当地选择 N,即使 $\{x_n\}$ 是非平稳的,相关输入仍可保证算法收敛[4].

三、主 要 结 果

先给出条件组 A:

A_1: 对任给的 Θ_1, $\Theta_2\in E^{p\times q}$, $\|\Theta_1-\Theta_2\|\leqslant\rho$, 这里 ρ 是任意给定的正数,那么,必存在一个与 Θ_2, ρ, ω 有关的有限数 $k(\Theta_2,\rho,\omega)$ 使得

$$\|Q_{n+1}(\Theta_1,\omega)-Q_{n+1}(\Theta_2,\omega)\|\leqslant k(\Theta_2,\rho,\omega)\|\Theta_1-\Theta_2\|,\ \forall\ n\geqslant 0. \tag{4}$$

A_2: 存在由 $E^{p\times q}$ 到 $E^{p\times q}$ 的一个二次连续可微映象 $F(\cdot)$,对任给的 $T>0$,有

$$\left\|\sum_{k=n}^{m(n,T)}a_k[Q_{k+1}(\Theta,\omega)-F(\Theta)]\right\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \forall\Theta\in E^{p\times q}.$$

里这

$$m(n,T)=\max\left\{m:\sum_{k=n}^{m}a_k\leqslant T\right\}. \tag{5}$$

由式(3)知,对任给的 $T>0$, $n>0$, $m(n,T)$ 是一个确定的整数.

A_3: 方程

$$\frac{d\Theta}{dt}=F(\Theta) \tag{6}$$

只有零为其唯一的平衡位置，并且是一致渐近稳定的[5]。

在上面一组条件下讨论算法(1),(2)。由于方程(6)的一致渐近稳定性及 $F(\cdot)$ 的二次连续可微性，必定存在二次连续可微的 Lyapunov 函数[5]，把它作为式(2)中的 $V(\cdot)$。这样，如果令

$$M = \inf\{\|\Theta\|: V(\Theta) \geqslant N\}, \tag{7}$$

那么，显然只要 $N > 0$ 则 $M > 0$。由算法(1),(2)不难看出

$$\|\Theta_n\| < M, \quad \forall_n \geqslant 0. \tag{8}$$

再由式(4)不难看出，必然存在一个与 ω 有关的正数 $L(\omega)$，使得

$$\|Q_{n+1}(\Theta, \omega)\| \leqslant L(\omega), \quad \forall \|\Theta\| \leqslant M. \tag{9}$$

另外，由于 $V(\cdot)$ 是二因连续可微的，因而在区域(8)内 $V'(\cdot)$, $V''(\cdot)$ 都是一致有界的。因此存在两个正实数 M_1, M_2，使得

$$V'(\Theta) \leqslant M_1, \quad \forall \|\Theta\| \leqslant M; \tag{10}$$

$$V''(\Theta) \leqslant M_2, \quad \forall \|\Theta\| \leqslant M, \tag{11}$$

由于算法保证

$$\Theta_n(\omega) \cdot D_M = \{\Theta: \|\Theta\| \leqslant M\}, \quad \forall\ n \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{12}$$

因此，上述的条件组 A 只需在 D_M 内满足即可。

引理. 数列 $\{V_n\}$ 满足条件

$$\text{(i)}\ 0 \leqslant V_n < M_3, \quad |V_{n+1} - V_n| \leqslant a_n M_4, \quad \forall n \geqslant 0; \tag{13}$$

$$\text{(ii)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} V_n = \delta > 0. \tag{14}$$

这里 M_3, M_4 是给定的常数；$\{a_n\}$ 满足式(3)。那么不可能对所有先敛子列

$$V_{n'} \xrightarrow[n'\to\infty]{} \eta > 0$$

都存在 $\varepsilon(\eta) > 0$, $\Delta > 0$，使得

$$\overline{\lim_{n'\to\infty}} V_{m(n',T)+1} \leqslant \eta - T\varepsilon(\eta), \quad \forall\ T < \Delta. \tag{15}$$

这里的 $m(n', T)$ 由式(5)给出。

证明. 用反证法. 假定式(15)对任何收敛子列 $V_{n'} \xrightarrow[n'\to\infty]{} \eta > 0$ 数立。先证明

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} V_n = 0 \tag{16}$$

否则，$\underline{\lim_{n\to\infty}} V_n = \eta > 0$，那么必存在收敛子列 $\{V_{n_k}\}$，

$$\lim_{n_k\to\infty} V_{n_k} = \underline{\lim_{n\to\infty}} V_n = \eta > 0. \tag{17}$$

于是由式(15)知存在 $\varepsilon(\eta) > 0$, $\Delta > 0$，使得

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} V_{m(n_k,T)+1} \leqslant \eta - T\varepsilon(\eta), \quad \forall\ T < \Delta.$$

这与式(17)矛盾。因此 $\underline{\lim_{n\to\infty}} V_n = 0$。由于步长

$$|V_{k+1} - V_k| \leqslant a_k M_4 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

因此由式(14),(16)，知 $\{V_n\}$将无穷多次地由下向上穿越区间 $\left[\frac{1}{3}\delta, \frac{2}{3}\delta\right]$. 因此必定

可以选出一个 $\{V_n\}$ 的无穷子列 $\{V_{n_k}\}$ 满足以下条件:

$$(1)\ V_{n_k-1} < \frac{1}{3}\delta,\ V_{n_k} \geqslant \frac{1}{3}\delta,\ n_k > m_{k-1},\ k = 0,1,2,\cdots, \tag{18}$$

$$(2)\ V_{m_k} > \frac{2}{3}\delta. \tag{19}$$

这里 $m_k = \min\left\{m: m > n_k,\ V_m \bar{\in} \left[\frac{1}{3}\delta, \frac{2}{3}\delta\right]\right\}$. 这个 $\{V_{n_k}\}$ 是这样选出的: 它的前一项小于 $\delta/3$,它达到或超过了 $\delta/3$,然后继续保持不小于 $\delta/3$ 直到超过 $2\delta/3$.

由于 $|V_{n+1} - V_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,因此由式(18)知 $V_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} \frac{1}{3}\delta > 0$. 于是,由式(15)知存在 $\varepsilon\left(\frac{1}{3}\delta\right) > 0$, $\Delta > 0$,使

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} V_{m(n_k,T)+1} \leqslant \frac{1}{3}\delta - T\varepsilon\left(\frac{1}{3}\delta\right),\ \forall\ T < \Delta. \tag{20}$$

取 $T < \min(\delta/6M_4, \Delta)$. 那么,只要 N_1 足够大,总可以使

$$\left|V_{n_k} - \frac{1}{3}\delta\right| < \frac{1}{12}\delta,\ a_{n_k} < T,\ \forall n_k > N_1.$$

于是,对任意的 $n_k < l \leqslant m(n_k, T) + 1$ 都有

$$|V_l - V_{n_k}| \leqslant \sum_{j=n_k}^{l-1} |V_{j+1} - V_j| \leqslant M_4 \sum_{j=n_k}^{m(n_k,T)} a_j < \delta/6,\ \forall\ \ n_k > N_1.$$

因此

$$V_l < V_{n_k} + \delta/6 < 7\delta/12 < 2\delta/3,\ \forall\ n_k > N_1,\ n_k < l < m(n_k, T) + 1.$$

这也就是 $m(n_k, T) + 1 < m_k$,即

$$V_{m(n_k,T)+1} \in \left[\frac{1}{3}\delta, \frac{2}{3}\delta\right],\ \forall\ n_k > N_1,\ T < \min(\delta/6M_4, \Delta)$$

或

$$V_{m(n_k,T)+1} > \frac{1}{3}\delta,\ \forall\ n_k > N_1,\ T < \min(\delta/6M_4, \Delta).$$

因此

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}} V_{m(n_k,T)+1} > \frac{1}{3}\delta.$$

这与式(20)矛盾,反证法假设不成立,引理得证. 利用这个引理可以证明

定理 1. 如果满足条件组 A 的算法(1),(2)中的 $V(\cdot)$ 正好是方程(6)的 Lyapunov 函数,那么对任给的初值 $\|\Theta_0\| < M$,必定有

$$\lim_{n\to\infty} \|\Theta_n(\omega)\| = 0. \quad a.\ e.\ \omega$$

证明. 令

$$\mathscr{B}(\Theta_0, \rho) = \{\Theta: \|\Theta - \Theta_0\| < \rho\}, \tag{21}$$

设 $x_1, x_2 \in \mathscr{B}(\bar{x}, T)$,那么由中值定理知下式成立:

$$\begin{aligned} V(x_1) - V(x_2) &= \mathrm{tr} V'(\xi)(x_1 - x_2)^\tau \\ &= \mathrm{tr} V'(\bar{x})(x_1 - x_2)^\tau + \mathrm{tr}(\xi - \bar{x}) V''(\xi')(x_1 - x_2)^\tau. \end{aligned} \tag{22}$$

这里 $\xi, \xi' \in \mathscr{B}(\bar{x}, T)$. 由式(1),(2)不难发现

$$\|\Theta_m - \Theta_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} a_k \|Q_{k+1}(\Theta_k, \omega)\| \leqslant L(\omega) \sum_{k=n}^{m-1} a_k$$
$$\leqslant L(\omega)T, \ \forall\ n \leqslant m \leqslant m(n, T) + 1. \tag{23}$$

记

$$A_{n+1}(\omega) = \{\omega: V(\Theta_n + a_n Q_{n+1}(\Theta_n, \omega)) < N\}, \tag{24}$$

那么，当 $\omega \in A_{j+1}$ 时由式(1),(2)及(22),(23)有

$$V(\Theta_{j+1}) - V(\Theta_j) = \mathrm{tr} V'(\Theta_n) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega) + \mathrm{tr}(\xi_j - \Theta_n) V''(\xi'_j) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega). \tag{25}$$

这里 $n \leqslant j \leqslant m(n, T)$, ξ_j, $\xi'_j \in \mathscr{B}(\Theta_n, L(\omega)T)$. 当 $\omega \bar{\in} A_{j+1}$ 时根据式(1),(2)知 $\Theta_{j+1} = \Theta_j$, 如果记

$$\bar{\Theta}_{j+1} = \Theta_j + a_j Q_{j+1}(\Theta_j, \omega),$$

那么不难验证 $\bar{\Theta}_{j+1} \in \mathscr{B}(\Theta_n, L(\omega)T)$, $\forall n \leqslant j \leqslant m(n, T)$. 另外，因 $\omega \bar{\in} A_{j+1}$ 因此由式(24)知 $V(\bar{\Theta}_{j+1}) \geqslant N$. 再由式(22)得

$$V(\Theta_j) + \mathrm{tr} V'(\Theta_n) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega) + \mathrm{tr}(\xi_j - \Theta_n) V''(\xi'_j) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega)$$
$$= V(\bar{\Theta}_{j+1}) \geqslant N > V(\Theta_j) = V(\Theta_{j+1}). \tag{26}$$

综合式(25),(26)有

$$V(\Theta_{j+1}) - V(\Theta_j) \leqslant \mathrm{tr} V'(\Theta_n) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega) + \mathrm{tr}(\xi_j - \Theta_n) V''(\xi'_j) a_j Q^{\tau}_{j+1}(\Theta_j, \omega). \quad a.\ e. \tag{27}$$

由于 $\{\Theta_n(\omega)\}$ 是一致有界的，因而当固定了 ω 后，必然存在一个子列 $\{\Theta_{n'}\}$ 及 $\bar{\Theta}$, 使得

$$\Theta_{n'} \xrightarrow[n' \to \infty]{} \bar{\Theta}. \tag{28}$$

如果几乎所有的 ω 及所有的子列 $\bar{\Theta}$ 都是零，那么，定理成立. 现在假定对某个 ω 及选定的子列 $\{\Theta_{n'}\}$ 其极限 $\bar{\Theta}$ 不为零. 这样由式(9),(11),(27)得到

$$V(\Theta_{m(n',T)+1}) - V(\Theta_{n'}) = \sum_{k=n'}^{m(n',T)} [V(\Theta_{k+1}) - V(\Theta_k)]$$
$$\leqslant \mathrm{tr} V'(\Theta_{n'}) \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k Q^{\tau}_{k+1}(\Theta_k, \omega) + M_2 \max_{n' \leqslant j \leqslant m(n',T)} \|\xi_j - \Theta_n\| \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k \|Q_{k+1}(\Theta_k, \omega)\|$$
$$\leqslant \mathrm{tr} V'(\Theta_{n'}) \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k F^{\tau}(\bar{\Theta}) + \mathrm{tr} V'(\Theta_{n'}) \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k [Q_{k+1}(\Theta_k, \omega) - F(\bar{\Theta})]^{\tau}$$
$$+ M_2 L^2(\omega) T^2. \tag{29}$$

这里 $F(\Theta)$ 满足式(6). 下面逐项讨论式(29)右边.

第二项：由 F 的连续可微性及式(4),(23)有

$$\left\| \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k [Q_{k+1}(\Theta_k, \omega) - F(\bar{\Theta})] \right\| \leqslant \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k \|Q_{k+1}(\Theta_k, \omega) - Q_{k+1}(\bar{\Theta}, \omega)\|$$
$$+ \left\| \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k [Q_{k+1}(\bar{\Theta}, \omega) - F(\bar{\Theta})] \right\|$$
$$\leqslant K(\bar{\Theta}, M, \omega) \delta_{n'} T + \left\| \sum_{k=n'}^{m(n',T)} a_k [Q_{k+1}(\bar{\Theta}, \omega) - F(\bar{\Theta})] \right\|. \tag{30}$$

这里 $\delta_{n'}=\max\limits_{n'\leqslant k\leqslant m(n',T)}\|\Theta_k-\bar{\Theta}\|\xrightarrow[n'\to\infty]{}0$. 由条件 A_3 有

$$\left\|\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_k[Q_{k+1}(\bar{\Theta},\omega)-F(\bar{\Theta})]\right\|\xrightarrow[n'\to\infty]{}0.$$

$$\text{第一项:}\quad \mathrm{tr}V'(\Theta_{n'})\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_kF^\tau(\bar{\Theta})=\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_k\mathrm{tr}V'(\bar{\Theta})F^\tau(\bar{\Theta})$$

$$+\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_k\mathrm{tr}[V'(\Theta_{n'})-V'(\bar{\Theta})]F^\tau(\bar{\Theta}). \tag{31}$$

由于 $V(\cdot)$ 是方程 $d\Theta/dt=F(\Theta)$ 的 Lyapunov 函数，$\bar{\Theta}\neq 0$，所以

$$\mathrm{tr}\,V'(\bar{\Theta})F^\tau(\bar{\Theta})=-\varepsilon<0. \tag{32}$$

由 $V'(\cdot)$ 的连续性知 $\|V'(\Theta_{n'})-V'(\bar{\Theta})\|\xrightarrow[n'\to\infty]{}0$. 由式(32)知道存在 $N_2>0$，使得

$$\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_k\mathrm{tr}V'(\bar{\Theta})F^\tau(\bar{\Theta})<-\frac{2}{3}T\varepsilon<0,\ \forall n'>N_2. \tag{33}$$

综合式(29)，(30)，(33)知

$$V(\Theta_{m(n',T)+1})-V(\Theta_{n'})\leqslant\frac{-2}{3}T\varepsilon+\|V'(\Theta_{n'})-V'(\bar{\Theta})\|\|F(\bar{\Theta})\|T$$

$$+TK(\bar{\Theta},M,\omega)\delta_{n'}+\left\|\sum_{k=n'}^{m(n',T)}a_k[Q_{k+1}(\bar{\Theta},\omega)-F(\bar{\Theta})]\right\|$$

$$+M_2L^2(\omega)T^2,\ \forall\ n'>N_2. \tag{34}$$

首先取 Δ 足够小，使 $M_2L^2(\omega)\Delta<\frac{1}{3}\varepsilon$. 当 Δ 固定后，对所有的 $T<\Delta$，(34)式右边的第二，三，四项当 $n'\to\infty$ 时都趋向零。因此有

$$\overline{\lim_{n'\to\infty}}V(\Theta_{m(n',T)+1})\leqslant V(\bar{\Theta})-\frac{1}{3}T\varepsilon,\ \forall\ T<\Delta. \tag{35}$$

另外，由式(9)，(10)知

$$V(\Theta_{j+1})-V(\Theta_j)=\mathrm{tr}V'(\Theta_j')[\Theta_{j+1}-\Theta_j]^\tau\leqslant a_j\|V'(\Theta_j')\|\|Q_{j+1}(\Theta_j,\omega)\|$$

$$\leqslant a_jM_1L(\omega).$$

这里 $\|\Theta_j'\|<M$，而 $\lim\limits_{n'\to\infty}V(\Theta_{n'})=V(\bar{\Theta})\neq 0$，因此数列 $\{V(\Theta_n)\}$ 满足定理条件，式(35)不成立，所以 $\bar{\Theta}=0$. 这也就是说几乎对所有的 ω，$\{\Theta_n(\omega)\}$ 的任何收敛子列的极限都是零。再由它的有界性知

$$\lim_{n\to\infty}\|\Theta_n(\omega)\|=0.\quad a.e.\,\omega$$

由于本算法保证对所有的 ω，n，$\Theta_n(\omega)$ 都在某个有界区域之内，因此由控制收敛定理及定理1有

定理 2. 如果满足条件组 A 的算法(1)，(2)中的 $V(\cdot)$ 正好是方程(6)的 Lyapunov 函数，那么对任给的初值 $\|\Theta_0\|<M$，必定有

$$\lim_{n\to\infty}E\|\Theta_n(\omega)\|=0, \tag{36}$$

$$\lim_{n\to\infty}E\|\Theta_n(\omega)\|^2=0. \tag{37}$$

最后，如果对任意的 $\Theta \in D_M$ 总有

$$\operatorname{tr} \Theta F^{\tau}(\Theta) < 0, \tag{38}$$

那么显然方程 (6) 是渐近稳定的．事实上，这时相应的 Lyapunov 函数就是

$$V(\Theta) = \|\Theta\|^2.$$

于是，算法 (1)，(2) 将成为下面的简单形式：

$$\Theta_{n+1}(\omega) = [\Theta_n(\omega) + a_n Q_{n+1}(\Theta_n, \omega)]_{N,\Theta_n},$$

$$[\Theta]_{N,Z} = \begin{cases} \Theta, & \text{如果 } \|\Theta\|^2 < N, \\ Z, & \text{如果 } \|\Theta\|^2 \geq N. \end{cases} \tag{2'}$$

这样定理 1，定理 2 将成为

定理 3. 满足条件 A_1，A_2 及式 (38) 的算法 (1′)(2′) 对任给的初值 $\|\Theta_0\| < N$ 必定有

$$\lim_{n\to\infty} \|\Theta_n(\omega)\| = 0, \quad a.\ e.\ \omega$$

$$\lim_{n\to\infty} E\|\Theta_n(\omega)\| = 0; \quad \lim_{n\to\infty} E\|\Theta_n(\omega)\|^2 = 0.$$

定理 3 类似于 Gladyšev 定理[6]．但本算法加了限制，因而对噪声的要求比 Gladyšev 定理弱得多．

参 考 文 献

[1] 狄昂照，自适应波束形成算法的收敛性，应用数学学报，V. 5, No. 2, 1982.

[2] Ljung L] Analysis of Recursive Stochastic Algorithm, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22 (1977), P 551—575.

[3] Kushner H. J., Convergence of Recursive Adaptive and Identification Procedures Via Weak Convergence Theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22 (1977), P 921—930.

[4] 狄昂照，具有非平稳相关输入的自适应阵算法，系统科学与数学，**3**(1983).

[5] Hahn W., Stability of Motion, Berlin German: Springer-Verlag, 1967.

[6] Невепьсон, М. Б. и Хисьминский, Р. З., Стохасчическая Аппрокситация и рекуррентное Оценивание, Наука, 1972.

A CONSTRAINED ITERATIVE STOCHASTIC ALGORITHM

DI ANGZHAO

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

ABSTRACT

A constrained iterative stochastic algorithm is proposed. The simple conditions are obtained to guarantee the convergence in almost everywhere, in quadrative mean and in mean for this algorithm.