第11卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 11, No. 3
1985 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1985

一类非线性系统的地球物理参量辨识和算法[1)]

许闻天　黄光远
（山　东　大　学）

摘　要

本文讨论一类非线性分布参数系统在间断函数类中的系数辨识问题，用脉冲变分原理得出了逐点变分梯度公式，讨论了辨识的唯一性问题，并提出了辨识系数的算法，最后给出了若干例题。

一、引　言

本文研究非线性分布参数系统：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot[h(x)Q(x,t)\nabla Q(x,t)]=S(x)\frac{\partial Q}{\partial t}+g(x,t),\ x\in G,\ t\in(0,T),\\&(h(x)Q(x,t)\nabla Q,\boldsymbol{n})=c(x)(Q_b-Q),\ x\in BG,\ t\in(0,T),\\&Q(x,0)=\varphi(x).\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中 G 是 R^n 中逐片光滑的有界区域；$\boldsymbol{n}$ 是 G 的边界 BG 的单位外法向；系数 $h(x)$，$S(x)$ 仅依赖于空间变量 x，它们是 G 上有限块逐片连续逐片光滑的函数，即 $h(x)$，$S(x)\in C_p$.

系统 (1.1) 在地下水及油藏工程等实际问题中均有明显的物理背景，系数 $h(x)$，$S(x)$ 表示介质的物理参量，通常仅是 x 的函数．

参数辨识问题就是如何利用实际提供的关于状态 Q 的观测值 Q^*（通常总存在测量误差并只给定在某个子域 $G_1\subset G$ 及时间集 $T_1\subset(0,T)$ 上）来选择 h，S，使系统 (1.1) 的解 $Q(x,t)$ 达到泛函

$$J_1=\int_{T_1}dt\int_{G_1}(Q-Q^*)^2dx\tag{1.2}$$

尽可能小的值．它亦称为式 (1.1) 的逆问题．

本文把系统 (1.1) 的系数辨识问题化为一类最佳控制理论问题来解决．利用文 [1] 的脉冲变分原理得到系统 (1.1) 的一个梯度公式，讨论了参数 $h(x)$ 的唯一性问题，最后给出辨识的算法及例题．

本文于 1982 年 10 月曾在青岛全国自动化理论应用会议上报告，修改稿于 1982 年 11 月 8 日收到．
1）此项研究得到中国科学院科学基金资助．

二、引理和辨识定理

记 $h(x)=v_1(x)$，$S(x)=v_2(x)$，$v(x)=\{v_1(x), v_2(x)\}$，取允许控制集合为

$$U_{ad}=\{v(x)|_{v_i(x)\in c_p},\ v(x)\in V\subset R^2,\ x\in G\}.$$

其中 V 是 R^2 中的有界闭区域.

可以认为，对于任意的 $v(x)\in U_{ad}$，系统 (1.1) 存在唯一的解 $Q(x,t)$，它在 $v(x)$ 的每个光滑块上是古典解，在 $v(x)$ 的间断面上，Q 及 $hQ\nabla Q$ 连续，这样假定是符合物理意义的.

设 y 是 $v(x)$ 的某一连续点，任取 $p\in V$，构造

$$v_\varepsilon(x)=\{h_\varepsilon(x),\ S_\varepsilon(x)\}=\begin{cases}p=(p_1,p_2), & x\in E_\varepsilon,\\ v(x), & x\in G/E_\varepsilon.\end{cases}$$

其中 $E_\varepsilon=\{x|_{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),y_i-\frac{\varepsilon}{2}<x_i<y_i+\frac{\varepsilon}{2}}\}$. 显然，$\varepsilon$ 充分小时，

$$E_\varepsilon\subset G,\ v_\varepsilon(x)\in U_{ad},$$

且 $\|v_\varepsilon(x)-v(x)\|_M=\mathrm{mes}\{x|_{v_\varepsilon(x)\neq v(x)}\}\to 0$. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，设与 $v_\varepsilon(x)$ 对应的 (1.1) 式的状态为 $Q_\varepsilon(x,t)$. 记

$$Q(x,t)=Q_0(x,t),\ hQ_0\frac{\partial Q_0}{\partial x_i}=Q_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$\bar{Q}=(Q_1,Q_2,\cdots Q_n),\ \underset{\sim}{Q}=(\bar{Q},Q_0)=(Q_1,Q_2,\cdots Q_n,Q_0).$$

于是 (1.1) 式化为方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\bar{Q}=S(x)\frac{\partial Q_0}{\partial t}+g(x,t), && x\in G,\ t\in(0,T),\\
&\nabla Q_0=\frac{1}{hQ_0}\bar{Q}, && x\in G,\ t\in(0,T),\\
&(\bar{Q}\cdot\boldsymbol{n})+cQ_0=cQ_b, && x\in BG,\ t\in(0,T),\\
&Q_0(x,0)=\varphi(x), && x\in G.
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

又记 $h_\varepsilon(x)-h(x)=\Delta h$，$S_\varepsilon(x)-S(x)=\Delta S$，$Q_\varepsilon(x,t)-Q(x,t)=\Delta Q$，则由 (2.1) 式，$\Delta\underset{\sim}{Q}$ 满足

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\Delta\bar{Q}=S\frac{\partial\Delta Q_0}{\partial t}+\frac{\partial Q_0}{\partial t}\Delta S+\Delta S\frac{\partial\Delta Q_0}{\partial t},\\
&\nabla(\Delta Q_0)=\frac{\Delta\bar{Q}}{hQ_0}-\frac{\bar{Q}}{hQ_0^2}\Delta Q_0+\frac{\bar{Q}}{Q_0(h+\Delta h)}-\frac{\bar{Q}}{hQ_0}\\
&\qquad-\frac{\Delta\bar{Q}\Delta h}{h(h+\Delta h)Q_0}+\frac{\bar{Q}\Delta Q_0\Delta h}{h(h+\Delta h)Q_0^2}+o(\|\Delta\underset{\sim}{Q}\|),\\
&(\Delta\bar{Q}\cdot\boldsymbol{n})+c\Delta Q_0=0,\\
&\Delta Q_0(x,0)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

称 $\boldsymbol{h}(x,t;y)=(H_1,H_2,\cdots,H_n,H_0)=(\bar{H},H_0)$ 为系统 (1.1) 的基本解向量，其中 H_0 满足

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot(hQ_0\nabla H_0)+\nabla\cdot\left(\frac{\bar{Q}}{Q_0}H_0\right)-S(x)\frac{\partial H_0}{\partial t}=\frac{\partial Q_0(y,t)}{\partial t}\delta(x-y),\\
&\left(hQ_0\nabla H_0+\frac{\bar{Q}}{Q_0}H_0,\boldsymbol{n}\right)+cH_0=0,\\
&H_0(x,0;y)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}
$$

而 H_i 满足

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot(hQ_0\nabla H_i)+\nabla\cdot\left(\frac{\bar{Q}}{Q_0}H_i\right)-S(x)\frac{\partial H_i}{\partial t}=h^2(y)Q_0(y,t)\frac{\partial Q_0(y,t)}{\partial x_i}\\
&\quad\cdot\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x_i},\\
&\left(nQ_0\nabla H_i+\frac{\bar{Q}}{Q_0}H_i,\boldsymbol{n}\right)+cH_i=0,\\
&H_i(x,0;y)=0,\ i=1,2,\cdots n.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}
$$

其中 $\delta(x-y)=\delta(x_1-y_1)\cdots\delta(x_n-y_n)$.

引理. 若系统 (1.1) 满足

1) 对于任取的 $v(x)\in U_{ad}$ 及其变动 $v_\varepsilon(x)$, 与 v 及 v_ε 对应的解 Q 和 Q_ε 总满足

$$\|Q_t-Q_{\varepsilon t}\|_c<L\|v_\varepsilon-v\|_M,\ L \text{ 是某一常数.}$$

2) 对于任取的 $v(x)\in U_{ad}$, 对应的基本解系统 (2.3) 和 (2.4) 存在广义解向量 ($\bar{H}$, H_0), 则有

$$\Delta Q=Q_\varepsilon-Q=\varepsilon^n\left[(p_2-S(y))H_0+\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{h(y)}\right)\sum_{i=1}^n H_i\right]+o(\varepsilon^n,\underline{x}). \tag{2.5}$$

其中 $o(\varepsilon^n,\underline{x})$ 是在弱收敛意义下 ε^n 的高阶无穷小量.

证. 由条件 1) 不难得出对任意的 $k(\underline{x})\in K$,

$$K=\{k(\underline{x})\mid_{k(\underline{x})\text{是以 } G\times(0,T)\text{ 为紧支集的 } C^\infty \text{ 试函数}}\},$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_G\left(\frac{\partial\Delta Q_0}{\partial t}\Delta S,k(\underline{x})\right)d\underline{x}\to 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_G\left(\frac{Q_i\Delta Q_0}{h(h+\Delta h)Q_0^2}\Delta h-\frac{\Delta Q_i\Delta h}{h(h+\Delta h)Q_0},\ k(\underline{x})\right)d\underline{x}\to 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_G(o(\|\Delta Q\|),k(\underline{x}))d\underline{x}\to 0,\ \text{当 } \varepsilon\to 0,$$

于是 $\Delta\underline{Q}$ 满足

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\Delta\bar{Q}-S(x)\frac{\partial\Delta Q_0}{\partial t}=\frac{\partial Q_0}{\partial t}\Delta S+o(\varepsilon^n,x),\\
&\nabla(\Delta Q_0)+\frac{\bar{Q}}{hQ_0^2}\Delta Q_0-\frac{1}{hQ_0}\Delta\bar{Q}=\left(\frac{1}{h+\Delta h}-\frac{1}{h}\right)\frac{\bar{Q}}{Q_0}+o(\varepsilon^n,\underline{x}),\\
&(\Delta\bar{Q},n)+c\Delta Q_0=0,\\
&\Delta Q_0(x,0)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}
$$

设 $\delta\underline{Q}$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\delta\bar{Q}-S(x)\frac{\partial\delta Q_0}{\partial t}=\frac{\partial Q_0}{\partial t}\delta S,\\&\nabla\delta Q_0+\left(\frac{\bar{Q}}{hQ_0^2}\delta Q_0-\frac{\delta\bar{Q}}{hQ_0}\right)=\left(\frac{1}{h+\delta h}-\frac{1}{h}\right)\frac{\bar{Q}}{Q_0},\\&(\delta\bar{Q},n)+c\delta Q_0=0,\\&\delta Q_0(x,0)=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

因为广义函数空间中微分算子与极限可交换次序，故

$$\Delta Q=\delta Q+o(\varepsilon^n,x).$$

又由 (2.7) 式的线性性质，根据叠加原理和基本解公式可得到

$$\delta Q_0=\varepsilon^n\left[(p_2-S(y))H_0(x,t;y)+\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{h(y)}\right)\sum_{i=1}^n H_i(x,t;y)\right].$$

这样就证明了引理.

定理 1. 设系统 (1.1) 满足引理的条件，且 $v(x)$ 使泛函 (1.2) 达到最小，则在 $v(x)$的任一连续点 y，有

$$Z_h(y)=0\ \text{或}\ h(y)=\begin{cases}\bar{h}, & Z_h(y)>0,\\ \underline{h}, & Z_h(y)<0,\end{cases}$$

$$Z_s(y)=0\ \text{或}\ S(y)=\begin{cases}\bar{S}, & Z_s(y)<0,\\ \underline{S}, & Z_s(y)>0,\end{cases}$$

其中

$$0<\underline{h}\leqslant h(x)\leqslant\bar{h},\ 0<\underline{S}\leqslant S(x)\leqslant\bar{S}.\tag{2.8}$$

而

$$\left.\begin{aligned}Z_h(y)&=\int_{T_1}dt\int_{G_1}(Q-Q^*)\sum_{i=1}^n H_i dx,\\Z_s(y)&=\int_{T_1}dt\int_{G_1}(Q-Q^*)H_0(x,t;y)dx.\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

证. 因为

$$J_1=\frac{1}{2}\int_{G_1}(Q-Q^*)^2dx$$

所以

$$\delta J_1=\int_{G_1}(Q-Q^*)\delta Q dx+\frac{1}{2}\int_{G_1}(\delta Q)^2dx.$$

与引理相同，

$$\int_{G_1}(\delta Q)^2dx=o(\varepsilon^n,x).$$

再将 (2.5) 式代人，即得

$$\delta J_1=\varepsilon^n\left[(p_2-S(y))Z_s(y)+\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{h(y)}\right)Z_h(y)\right]+o(\varepsilon^n,x).$$

因为 $v(x)=(h(x),S(x))$ 使 J_1 达到最小，则取 V 中任意值 $p=(p_1,p_2)$ 应有 $\delta J_1\geqslant 0$，为此必须

$$Z_s(y)=0 \text{ 或 } \begin{cases} S(y)-p_2\geqslant 0,\ Z_s(y)<0,\\ S(y)-p_2\leqslant 0,\ Z_s(y)>0,\end{cases}$$

$$Z_h(y)=0 \text{ 或 } \begin{cases} \dfrac{1}{h(y)}-\dfrac{1}{p_1}\leqslant 0,\ Z_h(y)>0,\\ \dfrac{1}{h(y)}-\dfrac{1}{p_1}\geqslant 0,\ Z_h(y)<0.\end{cases}$$

考虑到约束 (2.8)，立即就得到本定理的结论.

三、参数 h 辨识的唯一性

对系统 (1.1) 来说，对于给定的 $Q(x,t)$，如果不能从满足一阶偏微分方程

$$(Q\nabla Q,\nabla h)+\nabla\cdot(Q\nabla Q)h=SQ'_t+g,\ x\in G,\ t\in(0,T) \tag{3.1}$$

的所有函数中确定出唯一的解 $h(x)$，则所有的解 $h(x)$ 都能使 J_1 取相同值，这时必须提供关于 $h(x)$ 的已知信息，才可能唯一确定出函数 $h(x)$. 因此要讨论需要多少关于 $h(x)$ 的信息，也就是说，在 G 的子集 G_2 上实测或预估 $h=h^*$，最小的 G_2 应有多大才足以在整个区域上唯一确定出 $h(x)$.

另外由于 h^* 的信息中也存在噪音，因此构造另一个泛函

$$J_2=\frac{1}{2}\int_{G_2}(h(x)-h^*)^2dx. \tag{3.2}$$

在所有满足方程 (3.1) 的 $h(x)$ 中求出使泛函 J_2 取最小的函数. 这样，关于参数 $h(x)$ 的辨识问题化为两次求最优的问题：第一步求 h 以得到满足(1.1)式，且使泛函 J_1 取最小的 Q；第二步由已知的 Q 求满足 (3.1) 式，且使泛函 J_2 取得最小的 $h(x)$. 和文 [5] 一样，称这个 $h(x)$ 为"真实的" $h(x)$.

现在讨论最小的 G_2 应取多大的问题. 设给定 $Q(x,t)\in C^1_p$，将 t 任意固定，F_i 是 ∇Q 的间断面，假定

$$\nabla Q\neq 0,\ x\in G, \tag{3.3}$$

$$\frac{(Q(x^-)\nabla Q(x^-),\boldsymbol{n}_i)}{(Q(x^+)\nabla Q(x^+),\boldsymbol{n}_i)}>0,\ x\in F_i, \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}_i$ 是 F_i 在 x 点的单位法向量.

(3.3) 式这个假定显然是合理的（否则 $Q\equiv$ 常数），而 (3.4) 式在物理上意味着流量（如水流、热流等）须穿过介质的间断层(否则 F_i 就是边界).

(3.1) 式的特征线方程是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{ds}=Q\nabla Q[x(s,x^0)],\ s\in(s_0,s_k),\\ &x(s,x^0)|_{s=s_0}=x^0.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中 s 是弧长参数；x^0 是边界 BG 上使 $(Q\nabla Q,\boldsymbol{n})<0$ 的任一点；s_k 亦在 BG 上；$x(s_k,x^0)$ 能使 $(Q\nabla Q,\boldsymbol{n})>0$.

(3.5) 式存在绝对连续的轨线(即 (3.1) 式的特征线)，沿此轨线 (3.1) 式化为下述常微分方程的柯西问题，即 $h(x(s,x^0))$ 满足

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dh}{ds}+\nabla\cdot(Q\nabla Q(x(s,x^0))h)=f(s),\ s\in(s_0,s_k),\\ h(s_0)=h(x\ )=h^0.\end{array}\right\}\tag{3.6}$$

其中 $f(s)=[SQ'_t+g]_{x=x(s,x^0)}$ 是 s 的已知函数．(3.6) 式的解是不连续的．设它在

$$s=s_i,\ i=1,\ 2,\cdots,k-1$$

处有间断，记 $Q(x(s,x^0))=Q(s)$． 根据 (1.1) 式的解在间断面上 $hQ\nabla Q$ 连续的假定，在间断点 s_i 应有

$$(h(s_i^-)Q(s_i^-)\nabla Q(s_i^-),\boldsymbol{n}_i)=(h(s_i^+)Q(s_i^+)\nabla Q(s_i^+),\boldsymbol{n}_i).$$

这样 (3.6) 式的解 $h(s)$ 在间断点 s_i 的连接条件为

$$h(s_i^+)=c_ih(s_i^-),\quad c_i=\frac{(Q(s_i^-)\nabla Q(s_i^-),\boldsymbol{n}_i)}{(Q(s_i^+)\nabla Q(s_i^+),\boldsymbol{n}_i)}.\tag{3.7}$$

在条件 (3.7) 下方程 (3.6) 的解可沿轨线化为曲线积分，通过计算得到

$$h(s)|_{x=x(s,x^0)}=\begin{cases}a(s)h^0+b(s_0,s_1,s)=A_1(s)h^0+B_1(s),\ (s_0,s_1),\\ c_1(a(s)h^0+b(s_0,s_1,s))+b(s_1,s_2,s)=A_2(s)h^0\\ \qquad\qquad+B_2(s),\ (s_1,s_2),\\ \cdots\cdots\\ c_{k-1}c_{k-2}\cdots c_1(a(s)h^0+b(s_0,s_1,s))+c_{k-1}c_{k-2}\cdots c_2b(s_1,s_2,s)\\ \quad+\cdots+c_{k-1}b(s_{k-2},s_{k-1},s)+b(s_{k-1},s_k,s)=A_k(s)h^0\\ \quad+B_k(s),\ (s_{k-1},s_k).\end{cases}\tag{3.8}$$

其中
$$a(s)=\exp\left(-\int_{s_0}^{s}\nabla\cdot(Q\nabla Q(s))ds\right);$$

$$b(s_i,s_{i+1},s)=\int_{s_i}^{s_{i+1}}f(r)\exp\int_s^r\nabla\cdot(Q\nabla Q)dsdr.$$

这表明只要初值 h^0 给定就可求出整个轨线上的 h 值．

定理 2.　在条件 (3.3)，(3.4) 下，$h(x)$ 存在且唯一的充要条件是 G_2 应与充满 G 的 (3.1) 式的所有特征线相交．

事实上，如果某轨线不与 G_2 相交，则沿此轨线上的 $h(x)$ 有任意多种取法(依赖于初值 h^0)．反之，如果 (3.1) 式的所有轨线与 G_2 相交，则 J_2 沿与 G_2 相交的任一轨线

$$x=x(s,x^0)$$

的泛函值 J_2 是 h^0 的二次函数(因为 h 是 h^0 的分段线性函数)，

$$J_2|_{x=x(s,x^0)}=\underline{A}(h^0)^2+\underline{B}h^0+\underline{C},$$

其中

$$\underline{A}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{s_{i-1}}^{s_i}A_i^2(s)ds;\quad \underline{B}=\sum_{i=1}^{k}\int_{s_{i-1}}^{s_i}A_i(s)(B_i(s)-h^*)ds;$$

$h^*=h^*(x(s,x^0))$．　故可求出使 J_2 取最小的 $h(x)$ 的初值 $h_m^0=\underline{B}/\underline{A}$．　由初值 h_m^0 即可按 (3.6) 式决定沿此轨线的所有 h 值．当 x^0 连续变动时，就唯一确定了全部 G 上的 $h(x)$．

由定理 2 的结论可知，在系统 (1.1) 的边界条件下，只要 $c(x)$ 所取的有限的那部分边界能与 (3.5) 式的所有特征线相交，则 $h(x)$ 是唯一的．　如果 (1.1) 式具有第一类边界条件(即 $c(x)=\infty$)，则尚须在 G 中找一个能与 (3.1) 式所有特征线相交的区域 G_2，在 G_2

上探测或预估 $h(x)$ 的值方可使 $h(x)$ 唯一确定.

四、算法和例题

首先计算使泛函 J_1 达到最小的 Q 和 h，最速下降法的步骤如下:

1) 对任意给定的 h^0，由 (1.1) 式算出 $Q^0(x, t)$;

2) 由 (2.3) 和 (2.4) 式计算 H_0 和 $\overline{H}$;

3) 由 (2.9) 式计算 $Z_h(y)$;

4) 将 $J_1(h^0 + \lambda Z_h^0)$ 视为单参数 λ 的函数，对 $\lambda > 0$ 求极小，得极值 λ_h^0;

5) 令 $h = h^0 + \lambda_h^0 Z_h^0$.

重复上述步骤，直到 $Q^{n+1} - Q^n$ 或 $J_1^{n+1} - J^n$ 足够小为止.

其次，利用上面算出的 $Q^n(x, t)$，从所有满足 (3.1) 式的 $h(x)$ 中考虑 (2.8) 式的限制，找出使 (3.2) 式取最小的 h 作为第一次真实的 h_1. 再将此 h_1 作为新的初值，按上述算法进行计算，如此反复，最后求出的 h 就是所要求的真实的 h. 计算框图如图 1 所示.

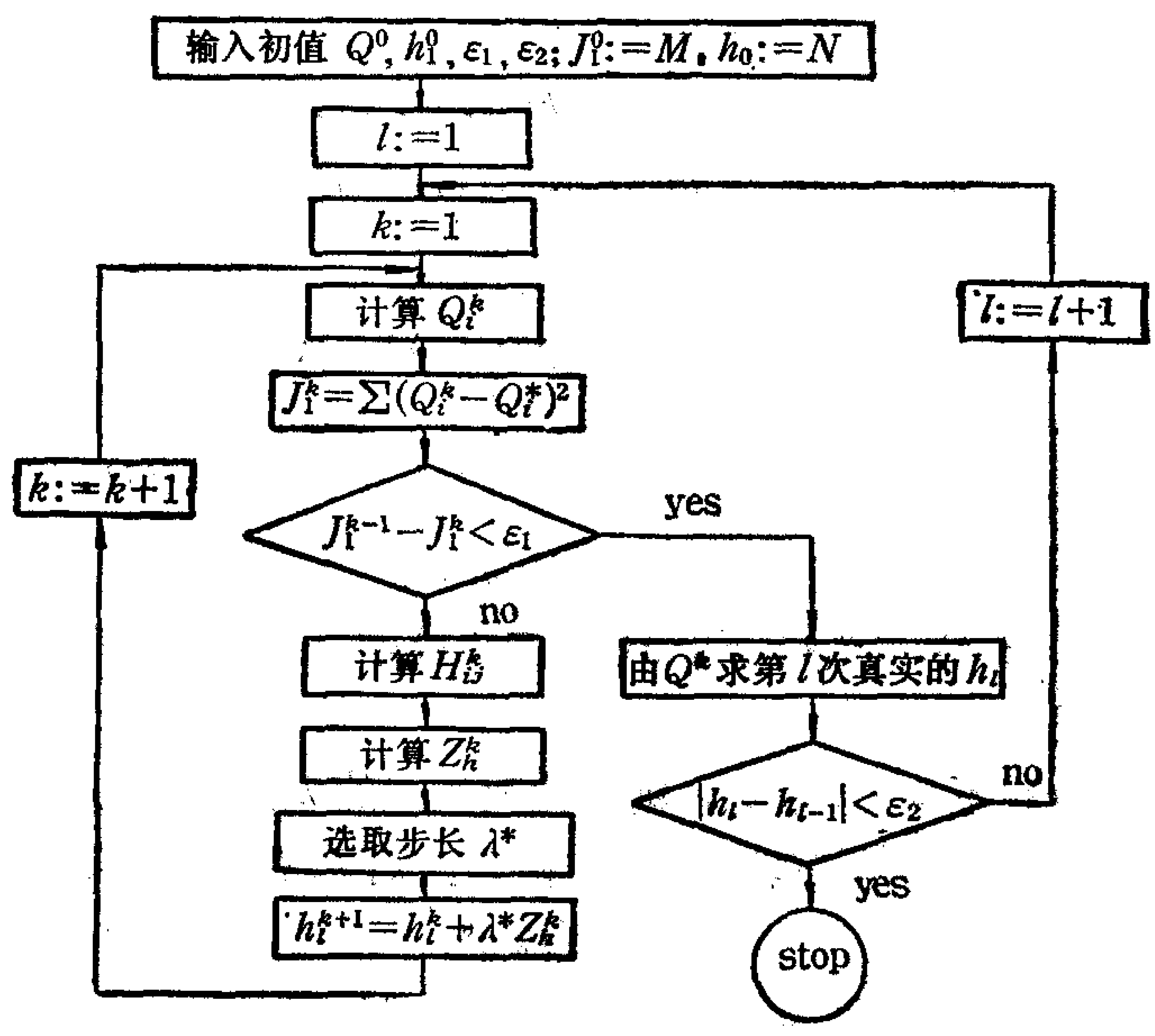

图 1

为了说明辨识的方法和效果，讨论一维稳态问题:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[h(x)Q(x)\dfrac{dQ}{dx}\right] = 1, & x \in (0, 9), \\ Q(0) = 0, \quad Q(9) = 18. \end{cases} \tag{4.1}$$

记 Q^r, h^r 分别为实际的状态和参量; Q, h 分别为辨识的状态和参量; Q^*, h^* 为带噪音的观测数据和信息. 用有限差分法，取分点为 $x = 1, 2, \cdots, 8$，并设

$$0.2 \leqslant h(x) \leqslant 1.4, \tag{4.2}$$

令 $Q_i = \sqrt{2y_i}$，则 y_i 满足代数方程组

$$h_{i+1}y_{i+1} - (h_i + h_{i+1})y_i + h_i y_{i-1} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, 8. \tag{4.3}$$

求得 (2.4) 及 (2.9) 式的解分别为

$$H_{ij} = \frac{h_j(Q_j^2 - Q_{j-1}^2)}{2Q_i}\left[h_{ij} - \left(\sum_{s=1}^{9}\frac{1}{h_s}\right)^{-1}\sum_{s=1}^{i}\frac{1}{h_s}\right], \tag{4.4}$$

其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & i \geqslant j,\ j = 1, 2, \cdots, 9, \\ 1, & i < j,\ i = 1, 2, \cdots, 8, \end{cases}$$

$$Z_j = \sum_{i=1}^{8} H_{ij}(Q_i - Q_i^*). \tag{4.5}$$

按上述算法可对 (4.1) 式中的系数 $h(x)$ 进行辨识.

例 1. 设实际的 $h^r(x) = \begin{cases} 1, & (0, 4.5), \\ \frac{1}{2}, & (4.5, 9), \end{cases}$ 则可求出实际的

$$Q^r(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 13.5x}, & (0, 4.5), \\ \sqrt{2x^2 + 27x - 81}, & (4.5, 9), \end{cases}$$

取 $h^0(x) = \frac{1}{2}$, $x \in (0, 9)$, $h_7^* = 0.5$，实际计算结果如表 1.

表 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q^*		3.8	5.6	7.0	8.4	10.3	12.4	14.3	16.2	
Q		3.802	5.598	7.001	8.402	10.300	12.400	14.300	16.200	
h	0.925	0.910	0.983	0.900	0.601	0.490	0.500	0.472	0.477	

$J_1 = 1.04\times10^{-5}$, $J_2 = 0$.

辨识得到的 h 值和实际的 h^r 值见图 2.

例 2. 设 $h^r(x) = 1 - \frac{x}{18}$, 则可算出

$$Q^r(x) = \sqrt{\frac{36}{\ln 2}\left[18\ln 18 - x\ln 2 - \ln(18 - x)\right]}.$$

若取 $h^0(x) = \frac{1}{2}$, $h_2^* = 0.89$, $h_7^* = 0.61$，实际计算结果如表 2 所示.

表 2

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q^*		4.2	6.2	7.9	9.5	11.1	12.8	14.4	16.2	
Q		4.199	6.199	7.899	9.499	11.101	12.798	14.401	16.199	
h	0.916	0.873	0.841	0.796	0.732	0.645	0.646	0.548	0.522	

$J_1 = 5.4\times10^{-6}$, $J_2 = 1.6\times10^{-3}$.

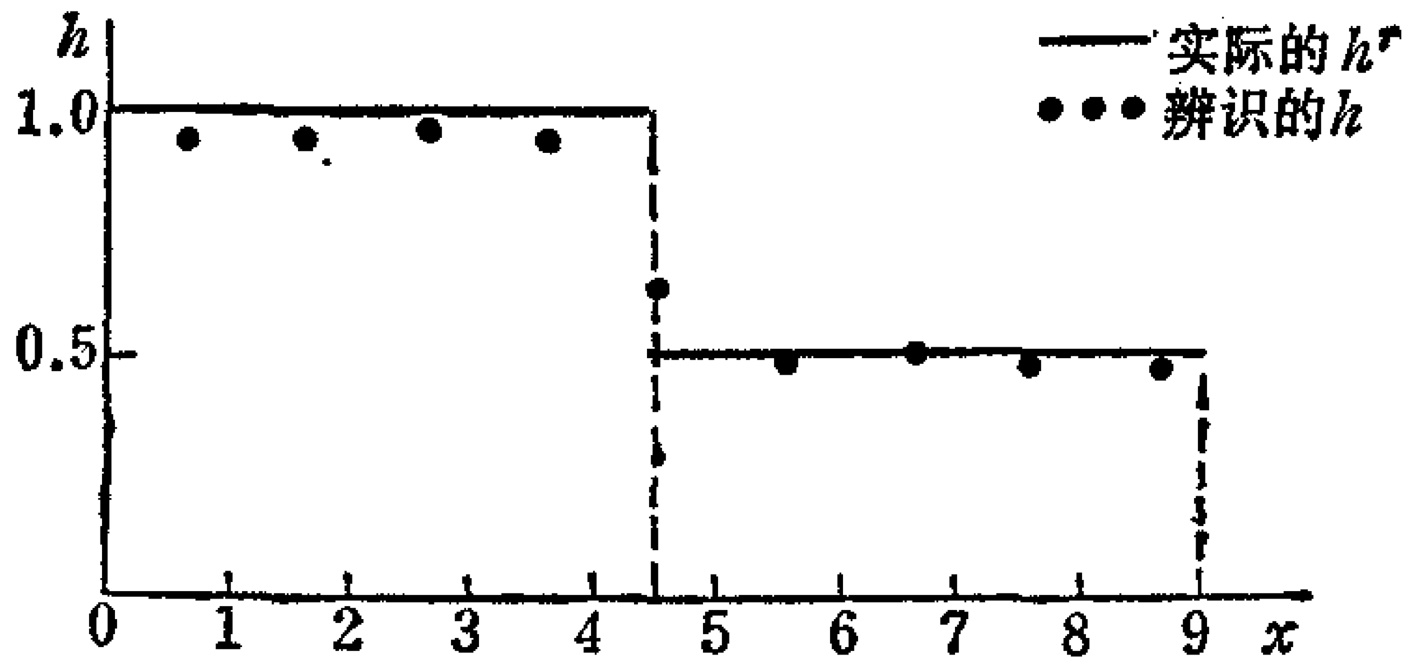

图 2

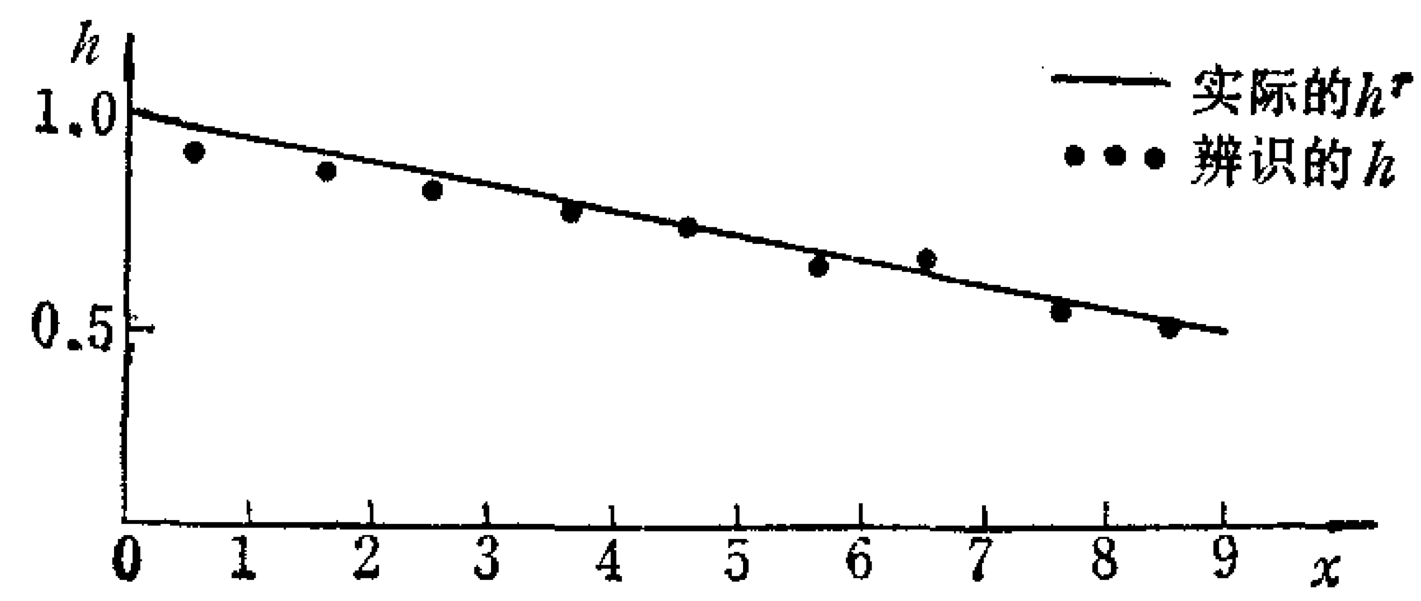

图 3

辨识得到的 h 值和实际的 h^r 值见图 3.

本文的例题主要是由山东大学数学系 78 届毕业生袁维家、秦刚完成的，特此感谢.

参 考 文 献

[1] Huang G. Y. (黄光远), Principle of Pulse Variation and Its Application to Designs of Optimal Control Systems, Proc. of the International Symp. on Math. *Theory of Networks and Systems* (Los Angeles), V. 4(1981), pp. 103—110.

[2] Lions J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer-Verlag, N. Y., 1971.

[3] Chevant G., Identifications of Functional Parameters in Partial Differential Equation, ASME, 1974.

[4] 孙纳正，地下水流的数学模型和数值方法，地质出版社，1981.

[5] 黄光远，Lu, Shin lien，分布参数系统识别中的某些理论与算法，山东大学学报，No. 1,1983.

[6] 黄光远等，地震勘探数据处理的一种算法——分布参数最优理论的应用，地球物理学报，1985，第 1 期，P. 75—83.

THE IDENTIFICATION OF GEOPHYSICAL PARAMETERS IN A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS AND ITS ALGORITHM

Xu Wentian Huang Guangyuan

(Shangdong University)

Abstract

In this paper, some identification problems of a nonlinear distributed parameter system in discontinuous function class are discussed. Using the principle of pulse variation, a gradient formula for point-wise variation, and an algorithm for identifying functional coefficients are obtanined. The uniqueness of identification is also discussed. Finally some examples are presented.