

# 一种确定快速最优及能控性问题伴随方程 边界条件的方法——集合覆盖法<sup>1)</sup>

张 嗣 瀛

(东北工学院)

## 摘 要

快速最优控制及能控性问题均可用不同的极值原理进行研究<sup>[1,2,3]</sup>,均有伴随方程。当目标集为原点、端点或光滑曲面的交点时,伴随方程的边界条件常不易确定,而这些地方却往往是求解上述两种问题的关键。本文提出一种确定边界条件的一般方法,并称“集合覆盖法”。它是文[1,2,4]中方法的发展。

确定出上述特殊点处的边界条件,对两种问题都很有用。例如可用来从理论上说明“开关”规律,解综合问题以及确定能控区边界等。文中给出了一些应用的例子。

这种方法还可扩展用于微分对策问题。

## 一、前 言

能控性问题是定性微分对策的特例,可用“定性极大值原理”进行研究<sup>[1,2,3]</sup>。

快速最优控制问题虽然进行了较长时间的研究,但有些问题尚待解决。例如当目标集为原点,还未见到确定该处伴随方程边界条件的方法。若能确定,将很有用。因为此处的边界条件对应于奇异曲面(开关曲面),从后面所举的例题可以看到,原点处边界条件的不唯一性,正可以从理论上解释开关规律。此外,还可用来解综合问题。

在能控性问题中,能控区边界往往也经过一些特殊点,也需确定该处的边界条件。

对于一般目标集,本文提出一种可用于上述两种问题的确定边界条件的方法。这种方法所依据的概念,是根据轨线分布和目标集的构成的关系(见下面)选用一定形式和数目的集合,将最后一段最优轨线和允许轨线不能达到其内部的那个区域覆盖,而这些集合的交就是目标集,故可称为“集合覆盖法”。集合选定了,边界条件也随之确定。

本文用这种方法试解了多个例题,以验证方法的有效性。其中包括确定能控区边界等。

对于微分对策问题的应用,将另文论述。

本文于1983年2月28日收到。

1) 此项研究系中国科学院科学基金资助项目。

## 二、快速最优控制问题

### 1. 问题

设控制系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} \in U. \quad (2.2)$$

其中  $\mathbf{x}, \mathbf{u}$  分别为  $n$  和  $r$  维向量,  $U$  可为有界闭集. 今考虑快速最优控制问题, 若目标集为具有光滑边界的下列二集之交(可扩展为  $p$  个集, 有关论证将完全相同)

$$\psi_1(\mathbf{x}) \leq 0, \psi_2(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (2.3)$$

记与最优控制  $\bar{\mathbf{u}}$  相对应的轨线为  $\bar{\mathbf{x}}$ , 允许轨线为  $\mathbf{x}$ , 控制终了时间为  $t_1$ , 可证如下定理.

**定理** 若

$$\bar{\mathbf{x}}(t_1) \in (\psi_1(\mathbf{x}) = 0) \cap (\psi_2(\mathbf{x}) = 0), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{x}(t_1) \notin (\psi_1(\mathbf{x}) < 0) \cup (\psi_2(\mathbf{x}) < 0). \quad (2.5)$$

(其示意图如图 2.1), 则  $\bar{\mathbf{u}}$  必须满足极大值条件, 即对于一切  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  使  $H$  有极大值

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\boldsymbol{\lambda}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) = H(\boldsymbol{\lambda}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t)$$

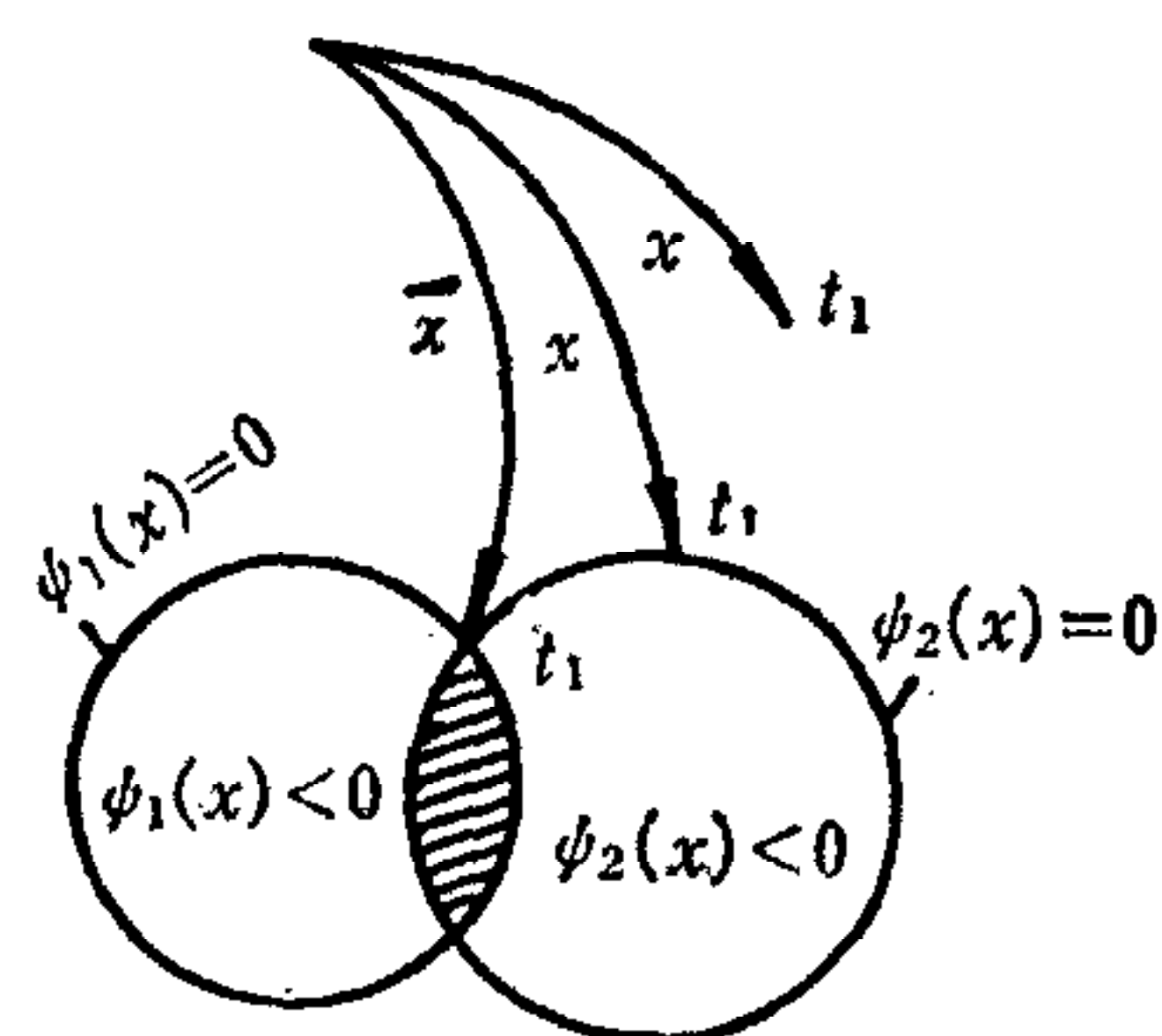


图 2.1

$(H = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)$ , 且伴随方程

$$\dot{\lambda}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

的边界条件为

$$\lambda_i(t_1) = - \sum_{l=1}^2 \nu_l \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \Big|_{t_1}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

其中  $\nu_l$  等为正的乘子.

证明. 可用文 [1] 或 [2] 中所述的方法, 得出处理快速最优控制问题的那类泛函改变量公式. 据此式可证: 若不满足极大值条件, 必导致  $\sum_l \nu_l \psi_l(\mathbf{x}(t_1)) < 0$ , 于是至少有一个  $\psi_l(\mathbf{x}(t_1)) < 0$ , 这将与式 (2.5) 相矛盾. 细节不赘述.

(2.6) 式的几何意义是向量  $\boldsymbol{\lambda}(t_1)$  是向量  $-\nu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t_1}$  与  $-\nu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t_1}$  之和, 并指向每个  $\psi_l(\mathbf{x}) < 0$  的那一边.

### 2. 集合覆盖法

定理的几何解释可参看图 2.1, 从中可看到轨线  $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$  的分布和各集合与目标集之间的关系, 由此得到一种使用此定理以确定边界条件的方法. 说明如下: 对于每一具体问题, 目标集是给定的, 最后一段最优轨线  $\bar{\mathbf{x}}$  (指  $\bar{\mathbf{u}}$  不变号并达到目标集的最后那一段) 和  $\mathbf{x}$  的分布也是一定的. 根据这种分布, 选取适当形式和数目的集合  $\psi_l(\mathbf{x}) (l = 1, \dots, p)$ , 使其交为给定的目标集, 而它们的“并”将  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{x}$  达不到其内部的那个区域覆盖. 这样选



取的各  $\phi_i(\mathbf{x})$  满足定理中的条件,从而可应用定理的结论,亦即可根据所选定的各  $\phi_i(\mathbf{x})$  和定理中的 (2.6) 式定出边界条件  $\lambda(t_1)$ .

由于  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{x}$  的分布是一定的,故  $\phi_i(\mathbf{x})$  等的选择将不是任意的.

### 3. 例

#### 例 1<sup>[5]</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 &= -bu, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$b > 0$  为常数. 设目标集为  $x_1$  轴的正半轴, 状态空间限于上半平面, 求解快速最优控制问题.

对此问题,有

$$H = \lambda_1(x_2 + 1) + \lambda_2(-bu), \quad \bar{u} = -\text{sign } \lambda_2.$$

$\bar{u} = +1$  的  $\oplus$  轨将为顶点在直线  $x_2 = -1$  上的抛物线族, 过原点的  $\oplus$  轨将为开关曲线. 今据上法定出原点处的  $\lambda(t_1)$ , 并对开关规律给出解释.

分析最后一段  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{x}$  的分布, 将如图 2.2(b).

取如下三个集

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{x}) &= x_2 \leq 0, \\ \phi_2(\mathbf{x}) &= x_2^2 - ax_1 \leq 0, \quad (a > 0) \\ \phi_3(\mathbf{x}) &= x_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

对此作些说明. 若取

$$\phi_1(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = x_2 = 0.$$

虽然其形式较 (2.8) 更为简单, 且可更为直观地看出其交也是  $x_1$  的正半轴, 为目标集, 但是  $\mathbf{x}$  却能达到

$$-x_1 < 0$$

的区域 (参看图 2.2(b)). 这不满足条件 (2.5), 故上面的两个集不能采用.

(2.8) 式中的  $a$  值可适当选取, 例如当取  $a$  充分小, 则抛物线将充分靠近  $x_1$  轴.

据 (2.6) 式, 在终点处将有

$$\lambda_1(t_1) = a\nu_2, \quad \lambda_2(t_1) = -\nu_1 - \nu_3.$$

由于  $\nu_i$  等的值可任意取 (见下面的讨论), 故上式可简化为 (两式均表示  $\lambda(t_1)$  在同一范围内变化)

$$\lambda_1(t_1) = \nu_2, \quad \lambda_2(t_1) = -\nu_1, \quad (2.9)$$

如图 2.2(c) 所示.

据 (2.9) 式解倒转时间的伴随方程 ( $t_1$  时  $\tau = 0$ ), 得

$$\lambda_1(\tau) \equiv \nu_2, \quad \lambda_2(\tau) = \nu_2\tau - \nu_1. \quad (2.10)$$

于是

$$\bar{u} = -\text{sign}(\nu_2\tau - \nu_1). \quad (2.11)$$

由此可见:

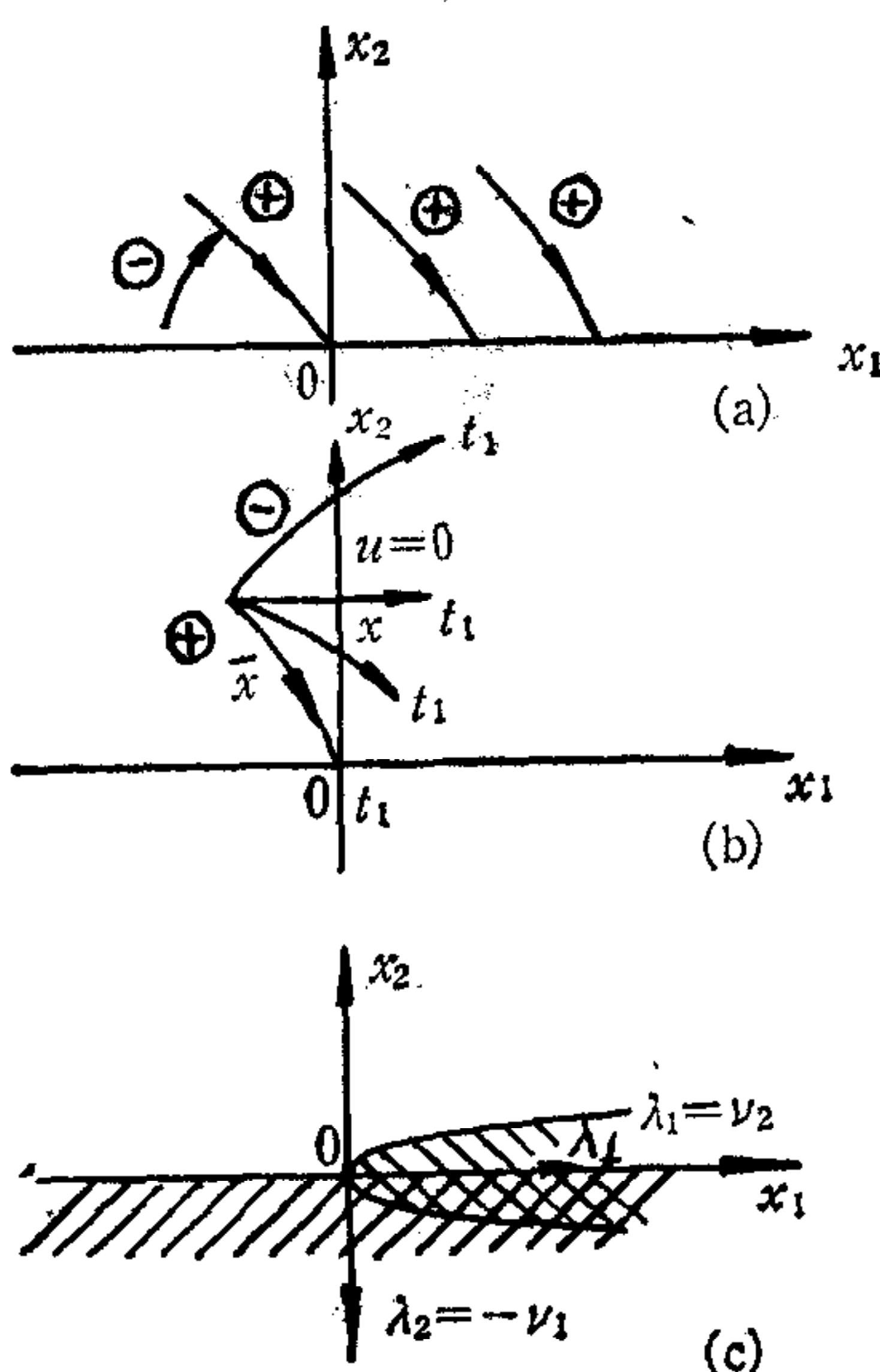


图 2.2

1) 当  $\tau = 0$  时,  $\bar{u} = -\text{sign}(-\nu_1) = +1$ , 即最后到达原点的那段轨线为  $\oplus$  轨.

2) 当  $\nu_2\tau - \nu_1 = 0$ , 或  $\tau = \nu_1/\nu_2$  时,  $\lambda_2 = 0$ , 自此以后,  $\lambda_2$  为正, 且不再变号, 故最优轨最线多可开关 ( $\bar{u}$  变符号) 一次.

3)  $\tau = \nu_1/\nu_2$  时为开关点 (换轨点).  $\nu_1, \nu_2$  的值可任意取, 这对应于解  $\lambda_2$  的不唯一性, 或奇异情况, 故  $\nu_1/\nu_2$  可为任意值. 因此, 过原点并延伸到无穷远处的  $\oplus$  轨, 在其上任意点处均可进行开关, 这就是开关曲线.

这样, 由定出  $\lambda_1(t_1)$  和  $\lambda_2(t_1)$  后所得到的  $\lambda_2(\tau)$  的解, 可得出开关曲线的全部性质, 亦即给出了开关规律的理论解释.

**例 2<sup>[5]</sup>**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 &= -bu, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

其他同例 1.

类似于上例进行分析, 在 origin 仍有 (2.9) 和 (2.10) 式形式的解.

对于到达  $x_1$  正半轴上除原点外的其他最优轨线 ( $\oplus$  轨), 目标集就是简单的  $x_1$  轴, 且容易定出

$$\lambda_1 \equiv 0, \quad \lambda_2 \equiv -\nu_1.$$

这样, 过原点的  $\oplus$  轨, 将状态空间划分为对应于  $\lambda_2 = \nu_2\tau - \nu_1$  及  $\lambda_2 \equiv -\nu_1$  的两个区域, 前者中的最优轨线为  $\ominus$  轨, 后者中为  $\oplus$  轨 (见图 2.3(b)).

记  $p$  点为  $x_2 = +1$  时  $\oplus$  轨的顶点 (图 2.3(b)), 则  $op$  段不能作为开关曲线. 这是因为, 如以  $op$  上的  $Q$  点为开关点, 则  $\ominus$  轨将进入  $\lambda_2 \equiv -\nu_1$  的区域, 在此区域中,  $\ominus$  轨不是最优的.

根据以上分析, 又据  $\lambda_2(\tau)$  的分析, 可得出开关规律.

**例 3<sup>[5]</sup>**

仍考虑系统 (2.12), 但状态空间为整个平面, 且要求除原点外, 所有轨线均须在上半平面到达  $x_1$  正半轴.

类似于上例的分析, 上半平面最优轨线的分布及所对应的  $\lambda_2$  的区域仍如图 2.3. 今之问题只须考虑  $x_1$  轴之下和过原点的  $\ominus$  轨之上的那部分区域, 并求出对应的  $\lambda_2$ .

据题的要求, 自此区域出发的轨线, 只能到达原点, 于是化为目标集为原点的问题.

分析  $\bar{x}$  和  $\mathbf{x}$  的分布, 并取下列三个集

$$\phi_1(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = x_2^2 - ax_1 \leq 0, \quad \phi_3(\mathbf{x}) = x_2^2 + ax_1 \leq 0, \tag{2.13}$$

其交为原点. 并可得出原点处的边界条件

$$\lambda_1(t_1) = \nu_2 - \nu_3, \quad \lambda_2(t_1) = \nu_1. \tag{2.14}$$

由此解得

$$\lambda_2(\tau) = (\nu_2 - \nu_3)\tau + \nu_1. \tag{2.15}$$

$(\nu_2 - \nu_3)$  可正可负. 据上式得出开关规律:

1) 当  $\nu_2 - \nu_3$  为正值, 则  $\lambda_2$  总为正, 即  $\bar{u} = -1$ ,  $\ominus$  轨可无限延伸.

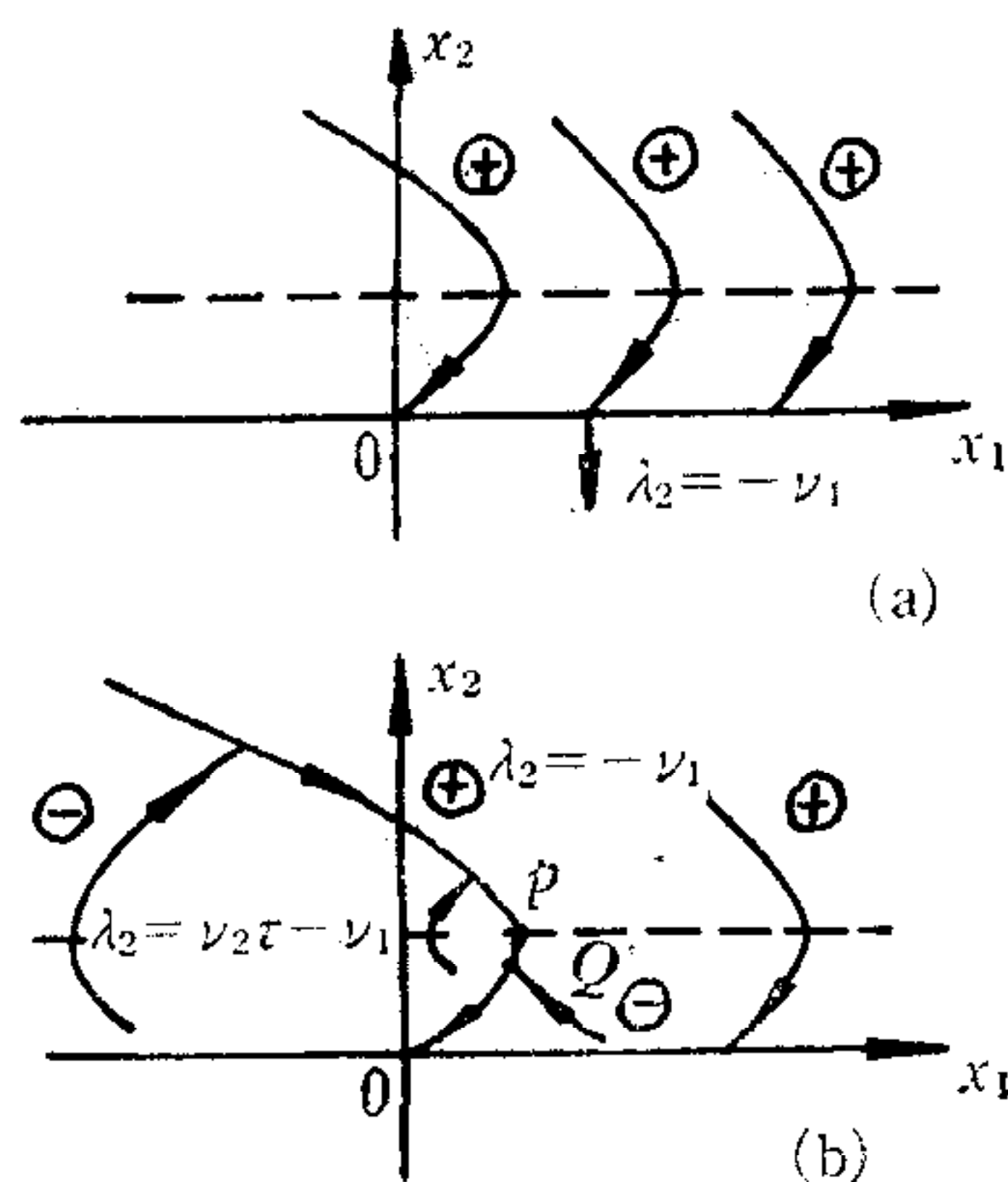


图 2.3



2) 当  $\nu_2 - \nu_3$  为负值, 则在  $\tau = \nu_1 / (\nu_3 - \nu_2)$  时将换轨,  $\tau$  可为任意值, 故过原点的  $\ominus$  轨即为开关曲线, 且只进行一次开关.

**例 4.** Bushaw 问题<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\zeta x_2 + u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\zeta$  为参数, 目标集为原点.

只讨论  $-1 < \zeta < 0$  的情况, 其他情况也可完全得出关于开关规律的结论.

当  $\bar{u} = +1$  或  $-1$  时, (2.16) 式的解是以  $(+1, 0)$  或  $(-1, 0)$  为焦点的发散螺线.

分析到达原点的最后一段  $\ominus$  轨, 由  $\bar{x}$  和  $x$  的分布, 并类似于例 3, 可得

$$\lambda_1(t_1) = \nu_2 - \nu_3, \quad \lambda_2(t_1) = -\nu_1. \quad (2.17)$$

倒转时间, 解  $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)$ , 得到以原点为焦点的发散螺线.  $\lambda_2(\tau)$  为正或负的周期为  $\pi$ . 由初始条件 (2.17), 可得出如下开关规律:

1) 当  $\lambda_2 = -\nu_1, \lambda_1 = \nu_2 - \nu_3 \geq 0$ , 如图 2.4(b) 中的  $a, b$  点,  $\lambda_2$  为负值的时间的极限为  $\pi$ , 这与到达原点的最后一段  $\ominus$  轨相对应.

2) 当  $\lambda_2 = -\nu_1, \lambda_1 = \nu_2 - \nu_3$  可正可负, 如图 2.4(b)

中的  $b, c$  点等, 则  $\lambda_2$  变号(即进行开关)的时间, 可为  $0 - \pi$  间的任意值.

3)  $\lambda_2$  变号后, 保持正值的时间为  $\pi$ .

用此法还能解出综合函数  $\bar{u}(x)$ , 并曾得出了 Apollo 登月舱姿态控制中<sup>[7]</sup>的综合函数, 限于篇幅, 这里略去.

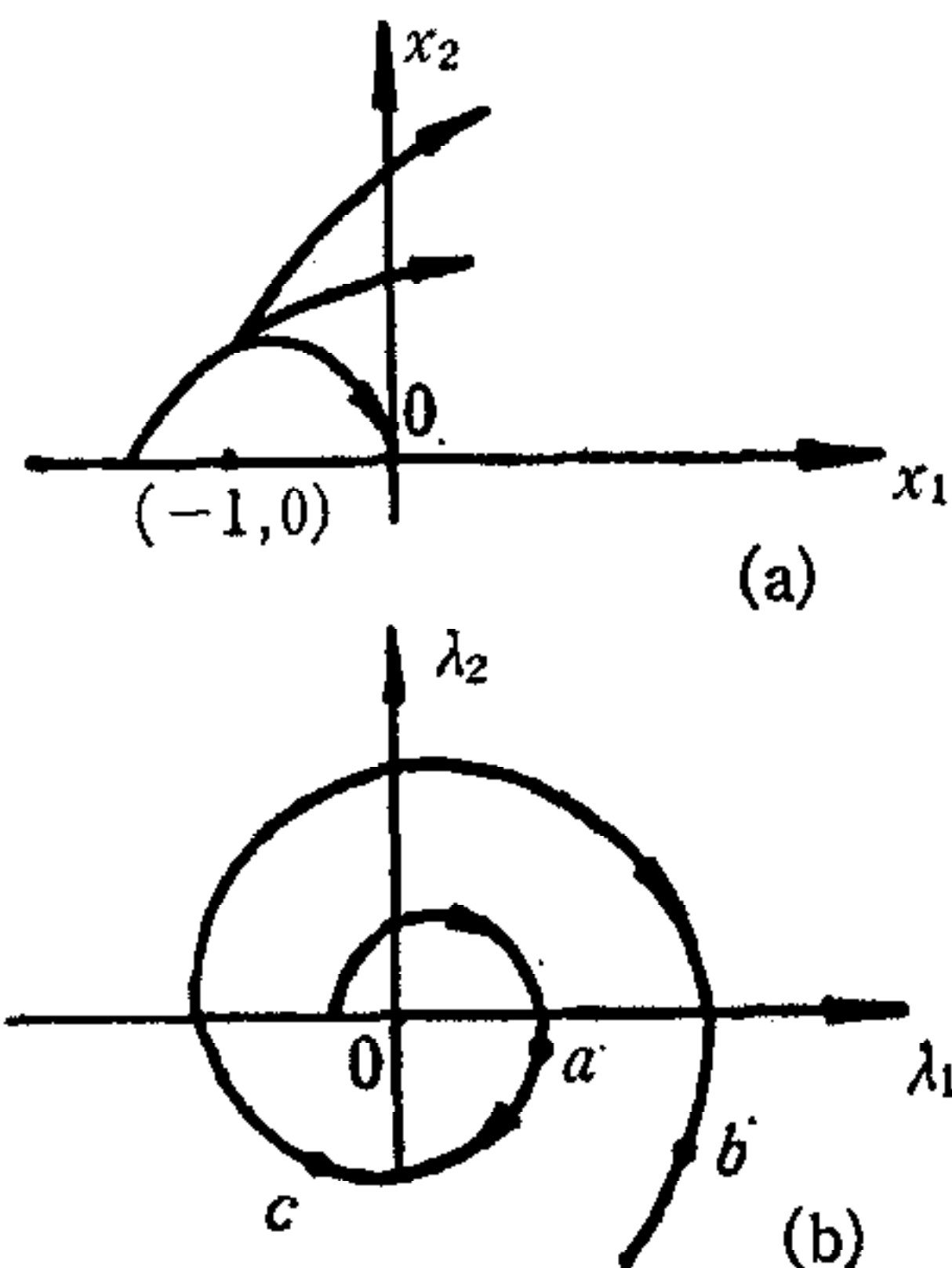


图 2.4

### 三、能控性问题

#### 1. 问题

对于系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad (3.1)$$

问对于给定的目标集是否有能控区.

这类问题是定性微分对策的特例, 且可用定性极值原理进行研究<sup>[1,2,5]</sup>. 并知能控区边界将由最优轨线  $\bar{x}$  组成, 与  $\bar{x}$  相对应的  $\bar{u}$  必须满足极大值条件 ( $\bar{u}$  使  $H(\lambda, \bar{x}, u) = (\lambda, f)$  有极大值), 且对于右端不显然含  $t$  的系统 (3.1), 对于一切  $t$

$$H(\lambda, \bar{x}, \bar{u}) = (\lambda, f) \equiv 0. \quad (3.2)$$

其中  $\lambda$  是能控区边界的法线.

若目标集为下面二集之交(一般可为  $p$  个集)

$$\phi_1(x) \leq 0, \quad \phi_2(x) \leq 0. \quad (3.3)$$

则本文中的定理仍成立(证明可参看文 [1, 2]), 只是其中的  $\bar{x}$  表示能控区边界上的轨

线. 另外要多一个附加条件 (3.2). 且允许轨线只能落在  $\bar{x}$  的一侧, 即“不能控区”那一侧.

## 2. 例

### 例 1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -u, \quad |u| \leq 1.\end{aligned}\quad (3.4)$$

设目标集为原点, 对以下三种情况求能控区: 1) 状态空间只限于上半平面; 2) 只限于下半平面; 3) 为全部平面.

1) 若有能控区边界, 则与其上  $\bar{x}$  相对应的  $\bar{u}$  应满足

$$\bar{u} = -\text{sign } \lambda_2$$

在上半平面, 只有  $\oplus$  轨能到达原点. 分析  $\bar{x}$  和  $x$  的分布, 取

$$\phi_1(x) = x_2^2 - ax_1 \leq 0, \quad \phi_2(x) = x_2^2 + ax_1 \leq 0,$$

可得

$$\lambda_1(t_1) = \pm \nu_1, \quad \lambda_2(t_1) = 0.\quad (3.5)$$

对于能控区边界, 还应有  $H \equiv 0$ . 在原点, 据此可解出  $\lambda_2 = 0$ . 解倒转时间的伴随方程, 对于  $\oplus$  轨, 应取

$$\lambda_1(t_1) = -\nu_1, \quad \lambda_2(t_1) = 0.\quad (3.6)$$

并得

$$\lambda_1(\tau) \equiv -\nu_1, \quad \lambda_2(\tau) = -\nu_1\tau.\quad (3.7)$$

这使对于一切  $\tau$  有  $H \equiv 0$ , 且  $\lambda_2$  总为负, 故  $\oplus$  轨可无限延伸. 它将上半平面分开为两部份, 其左侧为能控区,  $\oplus$  轨即能控区边界.

上述定理及覆盖法的意义是: 能控区所要求(或对应)的  $\lambda(t_1)$  ((3.6) 式), 确实可由用此法所定出的 (3.5) 式中找到. 这类似于快速最优控制问题中所定出的  $\lambda(t_1)$  所对应的开关曲线. 此法加  $H \equiv 0$  所定出的 (3.6) 式与能控区边界相对应.

2) 类似于上面的分析, 在下半平面, 到达原点的只有  $\ominus$  轨, 再加上条件  $H \equiv 0$ , 可得

$$\lambda_1(t_1) = \nu_1, \quad \lambda_2(t_1) = 0,\quad (3.8)$$

$$\lambda_1(\tau) \equiv \nu_1, \quad \lambda_2(\tau) = \nu_1\tau.\quad (3.9)$$

它所对应的  $\ominus$  轨即能控区边界.

3) 对于整个平面, 由于在上半平面  $\oplus$  轨的左侧为能控区, 在下半平面  $\ominus$  轨的右侧为能控区, 故合在一起已不能划分能控区与不能控区, 即整个平面均能控.

### 例 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 &= -bu, \quad |u| \leq 1, \quad b > 0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

目标集为原点. 分析 1) 上半平面, 2) 下半平面 3) 整个平面的能控区.

1) 上半平面只有  $\oplus$  轨到达原点. 分析轨线分布, 并取

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= x_2^2 - ax_1 \leq 0, \\ \phi_2(x) &= x_2^2 + ax_1 \leq 0, \quad \phi_3(x) = x_2 \leq 0,\end{aligned}$$



可得

$$\lambda_1(t_1) = \pm v_1, \lambda_2(t_1) = -v_2. \quad (3.11)$$

据  $H \equiv 0$ , 在 原点 将有

$$H = \pm v_1(0 - 1) + bv_2 = 0.$$

故 应 取  $\lambda_1 = +v_1$ , 且  $v_1/v_2 = b$ . 由 此 又 可 取

$$\lambda_2(t_1) = -1, \lambda_1(t_1) = b. \quad (3.12)$$

据 此 解 出

$$\lambda_2(\tau) = b\tau - 1, \lambda_1(\tau) \equiv b. \quad (3.13)$$

可 见 当  $b\tau - 1 = 0$  或  $\tau = 1/b$  时 (对 应 于  $x_2 = 1$ ),  $\lambda_2$  将 变 号, 故 换 为  $\ominus$  轨.  $\ominus$  轨 将 回 折 (见 图 3.1). 如 同 在 微 分 对 策 中 那 样: 界 栅 若 回 折 将 不 再 起 界 栅 的 作 用. 这 里, 自 0 点 到  $\tau = 1/b$  时 的 那 段  $\oplus$  轨, 也 不 再 是 能 控 区 边 界 的 组 成 部 份, 因 为 它 左 右 两 侧 的 点 都 能 控 制 到 原 点. 上 半 平 面 也 不 再 存 在 不 能 控 区. 事 实 上, 将 有 一 条  $\oplus$ 、 $\ominus$  轨 相 连 接 的 曲 线

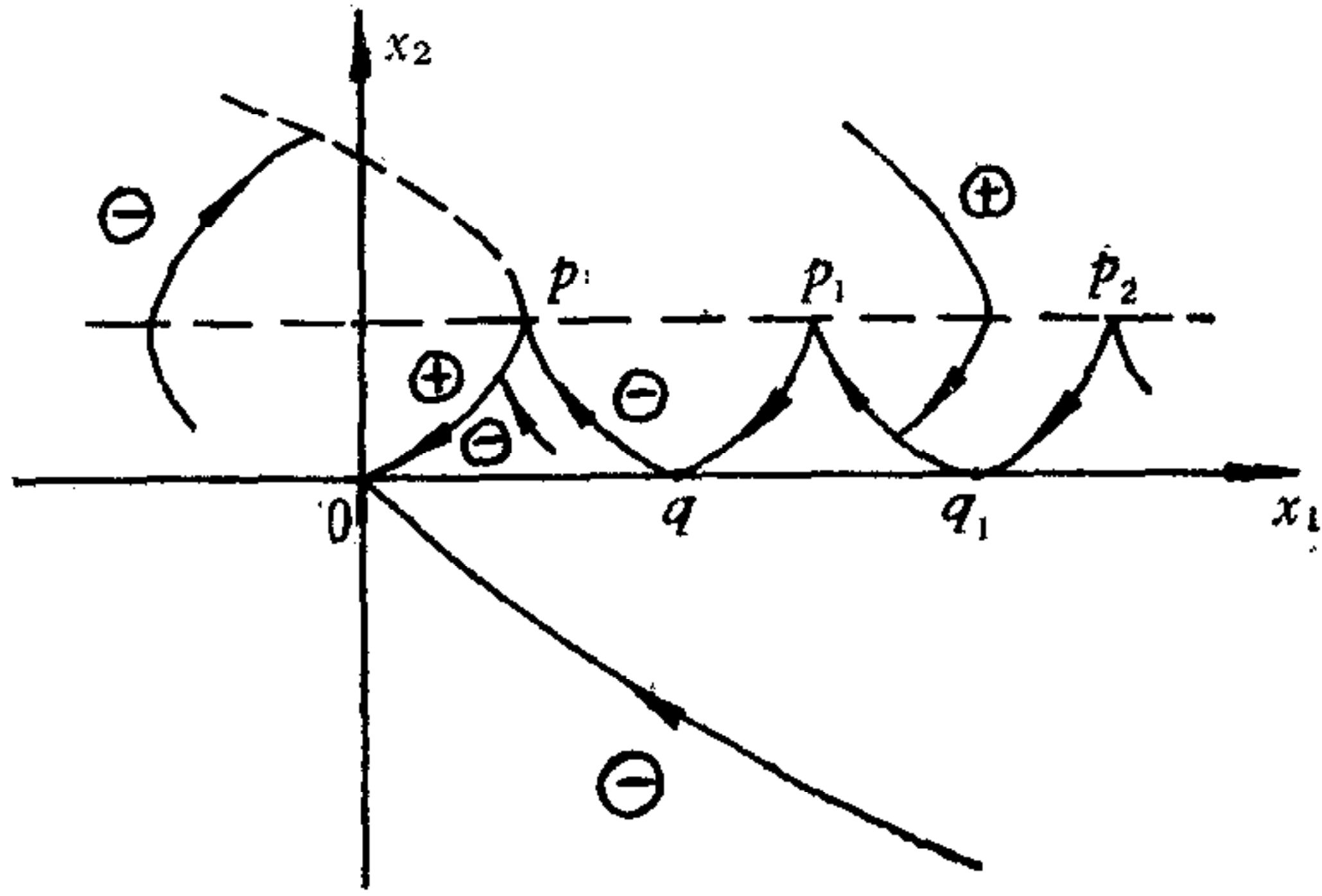


图 3.1

$opqp_1q_1 \dots$ , 它 可 无 限 延 伸 (见 图 3.1), 自 任 何 点 出 发, 都 可 通 过 相 应 的  $\oplus$  或  $\ominus$  轨 到 达 此 曲 线, 然 后 沿 此 曲 线 到 达 原 点.

由 以 上 可 见, 用 此 法 所 解 出 的 (3.13) 式 说 明 了 能 控 区 边 界 的 性 质.

2) 对 于 下 半 平 面, 作 类 似 分 析, 可 知  $\ominus$  轨 为 能 控 区 边 界.

3) 对 于 整 个 平 面, 已 无 能 控 区 边 界 (无 连 续 曲 线 将 平 面 划 分 开 为 能 控 区 和 不 能 控 区).

### 参 考 文 献

- [1] 张嗣瀛, 关于定量与定性微分对策, 自动化学报, 第6卷 (1980), 第2期.
- [2] 张嗣瀛, A New Approach of Solving Qualitative Differential Games and Determining the Boundary of Controllable Region, 第八届 IFAC 世界会议文集. Preprints, V. IX(1981), pp 128—133.
- [3] 张嗣瀛, Some Applications of Qualitative Maximum Principle, Recent Developments in Control Theory and its Applications. Proceedings of the Bilateral Meeting on Control Systems, pp 492—498, Science Press, Gordon and Breach, Science Publishers, (1982).
- [4] 张嗣瀛, 轨线末端受限制时的最优控制问题, 自动化学报, 第1卷(1963), 第2期.
- [5] Isaacs R., Differential Games, John Wiley and Sons (1965).
- [6] 钱学森, 宋健, 工程控制论(增订版), 上册, 科学出版社 (1980).
- [7] Widnall W. S., The Minimum-Time Thrust Vector Control Law in the Apollo Lunar-Module Autopilot, *Automatics*, 6(1970).

# A METHOD FOR DETERMINING BOUNDARY CONDITIONS OF THE ADJOINT EQUATIONS FOR TIME OPTIMAL AND CONTROLLABILITY PROBLEMS—THE SETS COVERING METHOD\*

ZHANG SIYING

*(Dongbei Polytechnic Institute)*

## ABSTRACT

Both the time optimal and controllability problems can be investigated by different Maximum Principles and both have adjoint equations. When the target sets are origin, terminal point, or the intersection of smooth surfaces, the boundary conditions of the adjoint equations are not easy to determine. These places are often to be the cruxes for solving the problems. In this paper, a general method for determining the boundary conditions is presented. It can be called "The Sets Covering Method" which is the further development of the method in [1, 2, 4].

The determination of boundary conditions at the above mentioned special points is very useful for both problems. For instance, it may be used to explain the "switch law" theoretically, to find the synthesis functions and to determine the boundary of controllable region, etc.. Several examples are given.

This method can also be extended to solve problems of differential games.

---

\* This work was supported by the Science Foundation of Academia Sinica.