

# 非平稳 ARMA 模型自校正预报器及其应用

马 润 津

(北京冶金机电学院)

## 摘 要

本文介绍了在具有时变均值和时变方差的随机干扰序列作用下, ARMA 模型的在线辨识与自校正预报。用简单的 ELS 方法实现模型的在线辨识。对指数平滑预报器一步预报误差序列进行实时建模和实时修正的基础上,实现对未来值的自校正预报。

应用于雷达测量飞机低空飞行数据的短期预报,仿真和对实测数据的处理结果表明,此方法简单且精度较高,适用于微型机对一类非平稳过程的实时建模和短期预报。

## 一、问题的提法

ARMA (自回归滑动平均)模型在平稳时间序列的建模、分析和预报中得到广泛的应用。该模型为

$$A(q^{-1})x(k) = C(q^{-1})\varepsilon(k). \quad (1)$$

式中  $\{\varepsilon(k)\}$  为零均值平稳白噪声序列,即有

$$E[\varepsilon(k)] = 0$$

和

$$E[\varepsilon(k)\varepsilon(j)] = \begin{cases} \sigma^2, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

$A(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  为时间移位算子  $q^{-1}$  的多项式,有

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_nq^{-n}, \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots + c_rq^{-r}. \end{aligned}$$

对于 ARMA 模型的在线辨识,简单而实用的方法是递推增广最小二乘法 (ELS 法)。通过引入遗忘因子  $\beta$ ,可以在线辨识时变的 ARMA 过程。

Wittenmark 于 1974 年提出了描述式 (1) 的平稳时间序列的自校正预报器<sup>[1]</sup> (Self-Tuning Predictor)。黑龙江大学的邓自立同志将前者的一些结论推广到多变量的情况<sup>[2]</sup>。Keyser 于 1981 年发表了关于高炉生铁含矽量的自校正预报器<sup>[3]</sup>。可以预见,应用微型计算机后自校正预报技术将得到更大的发展和更为引人注目的成果。

问题在于工程实际往往需要对非零均值非平稳的时间序列进行建模和预报。如用式 (1) 的平稳模型对非平稳时间序列建模,得到的自回归算子多项式  $A(q^{-1})$  不是渐近稳定

的,而且参数估计的精度也很差.为了能将适用于平稳时间序列的建模、分析和预报的一般方法用于非平稳序列,Box 和 Jenkins 以及吴贤铭 (S. M. Wu) 和 Pandit<sup>[4,5]</sup> 的方法是用差分运算将非平稳序列平稳化,即所谓的积分型 ARMA 模型 (ARIMA):

$$(1 - q^{-1})^d A(q^{-1})x(k) = C(q^{-1})\varepsilon(k)$$

和季节性 ARMA 模型:

$$(1 - q^{-s})^{d'} A(q^{-1})x(q^{-1}) = C(q^{-1})\varepsilon(k),$$

以及它们的混合型(以上两式中的  $A(q^{-1})$  为稳定的算子多项式). 上述方法计算量大,不适于在线辨识. 多重差分的处理方法将损失信息,对它的合理性也是有争议的.

## 二、一类非平稳 ARMA 模型及其辨识

本文用下式近似表示一类非平稳的噪声干扰:

$$e(k) = \alpha(k)\varepsilon(k) + \mu(k). \quad (2)$$

其中  $\{\varepsilon(k)\}$  为零均值单位方差的平稳白噪声序列;  $\alpha(k)$  表示噪声方差的时变性;  $\mu(k)$  表示时变的非零均值.

将式 (2) 的非平稳噪声  $\{e(k)\}$  代换式 (1) 中的  $\{\varepsilon(k)\}$ , 得出一类非平稳的 ARMA 模型

$$A(q^{-1})y(k) = \alpha(k)C(q^{-1})\varepsilon(k) + C(q^{-1})\mu(k). \quad (3)$$

鉴于目前对快时变参数的估计还没有很好的方法,这里限定参数  $a_i, c_i$  和  $\mu(k)$  是慢时变的,由此可将式 (3) 近似表示成

$$A(q^{-1})y(k) = \alpha(k)c(q^{-1})\varepsilon(k) + m(k). \quad (4)$$

其中  $m(k) \approx c(q^{-1})\mu(k)$  亦为慢时变参数.

由于最小二乘估计对噪声的方差没有要求,因此  $\alpha(k)$  的大小并不影响最小二乘方法的使用,以下将不再考虑  $\alpha(k)$ . 但是,时变的非零均值项 ( $m(k) \neq 0$ ) 将导致估计量的系统性偏差,为克服  $m(k)$  的影响,可将它视为系数是  $m(k)$  (未知)而采样值为 1 的确定性输入项. 因此,式 (4) 实质上是将不平稳的 ARMA 模型化成具有未知时变参数的确定性输入项的 CARMA 模型.

用下列递推算式可同时在线辨识参数  $a_i, c_i$  和  $m$ :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + k(k)\hat{\varepsilon}(k), \quad (5)$$

$$k(k) = P(k-1)\eta(k)/[\beta + \eta^T(k)P(k-1)\eta(k)], \quad (6)$$

$$P(k) = \left[ P(k-1) - \frac{P(k-1)\eta(k)\eta^T(k)P(k-1)}{\beta + \eta^T(k)P(k-1)\eta(k)} \right] \frac{1}{\beta}. \quad (7)$$

其中  $\hat{\theta} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_r, m]^T$ ;

$$\hat{\varepsilon}(k) = x(k) - \eta^T(k)\hat{\theta}(k-1); \quad (8)$$

$$\eta(k) = [x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-n), \hat{\varepsilon}(k-1), \hat{\varepsilon}(k-2), \dots, \hat{\varepsilon}(k-r), 1]^T. \quad (9)$$

以上即 ELS 法. 递推初值选择为:

$$\hat{\theta}(0) = \mathbf{0},$$

$$P(0) = 10^6 I$$

和

$$\hat{\varepsilon}(0) = \hat{\varepsilon}(-1) = \dots = \hat{\varepsilon}(1-r) = 0.$$

( $I$  为单位阵), 遗忘因子  $\beta$  取为 0.95—0.995.

表 1 给出了如式 (10) 模型在线辨识的数字仿真结果.

$$y(k) = 1.2y(k-1) - 0.7y(k-2) + \varepsilon(k) + 0.9\varepsilon(k-1) + 0.6\varepsilon(k-2) + m(k). \tag{10}$$

其中  $\{\varepsilon(k)\}$  为正态零均值单位方差伪随机数. 表 1 中括号里的数值为未考虑  $m(k)$  影响的参数估计结果, 显然有很大的估计偏差.

表 1 模型式 (10) 在线辨识的仿真结果

参数真值	1.2	-0.7	0.9	0.6	1.0
估计值	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{m}$
400	1.240 (0.919)	-0.731 (-0.258)	0.743 (1.237)	0.429 (0.861)	1.001
800	1.237 (0.922)	-0.721 (-0.257)	0.823 (1.267)	0.478 (0.948)	0.994
1200	1.197 (0.964)	-0.690 (-0.306)	0.882 (1.222)	0.570 (0.914)	1.007
1600	1.119 (0.989)	-0.694 (-0.318)	0.910 (1.195)	0.597 (0.884)	1.007
2000	1.197 (0.981)	-0.695 (-0.306)	0.907 (1.209)	0.592 (0.901)	1.014

图 1 示出了对时变的  $m(k)$  在线辨识的仿真结果, 其中虚线表示设定值(真值), 实线为估计值,  $\beta = 0.99$ , 可以从图中看出估计值  $\hat{m}(k)$  追踪时变真值  $m(k)$  的情况.

用式 (5) 到 (9) 对模型式 (4) 进行辨识时, 要求式 (4) 中的确定性量  $m(k)$  与噪声项  $\alpha(k)c(q^{-1})\varepsilon(k)$  两者在数量上不能相差太大. 如果

$$|m(k)| \gg |\alpha(k)c(q^{-1})\varepsilon(k)|,$$

则将使随机模型参数估计的精度很差. 然而在对非平稳时间序列的辨识和预报时往往会出现上述情况, 例如雷达测量飞机斜距离的数值一般为几公里, 而随机测距误差通常为十几米, 只有前者的百分之几.

为了解决上述问题, 笔者不直接辨识非平稳序列本身的模型, 而是在指数平滑预报器的基础上, 对它的向前一步预报误差序列的模型进行在线辨识. 我们用以下的例子来说

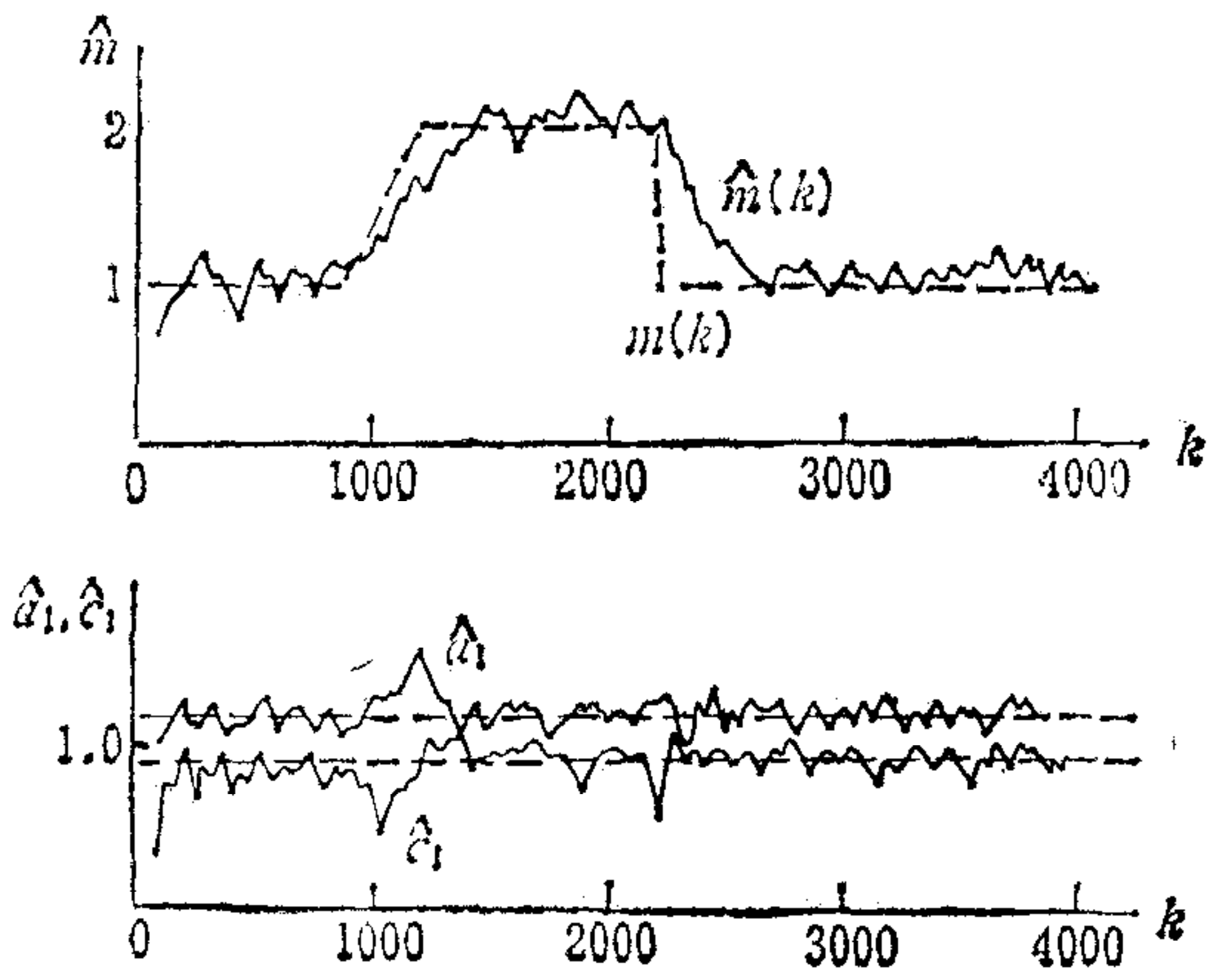


图 1

明。图 2 为由式 (11) 描述的非平稳时间序列  $\{x(k)\}$  的仿真结果。

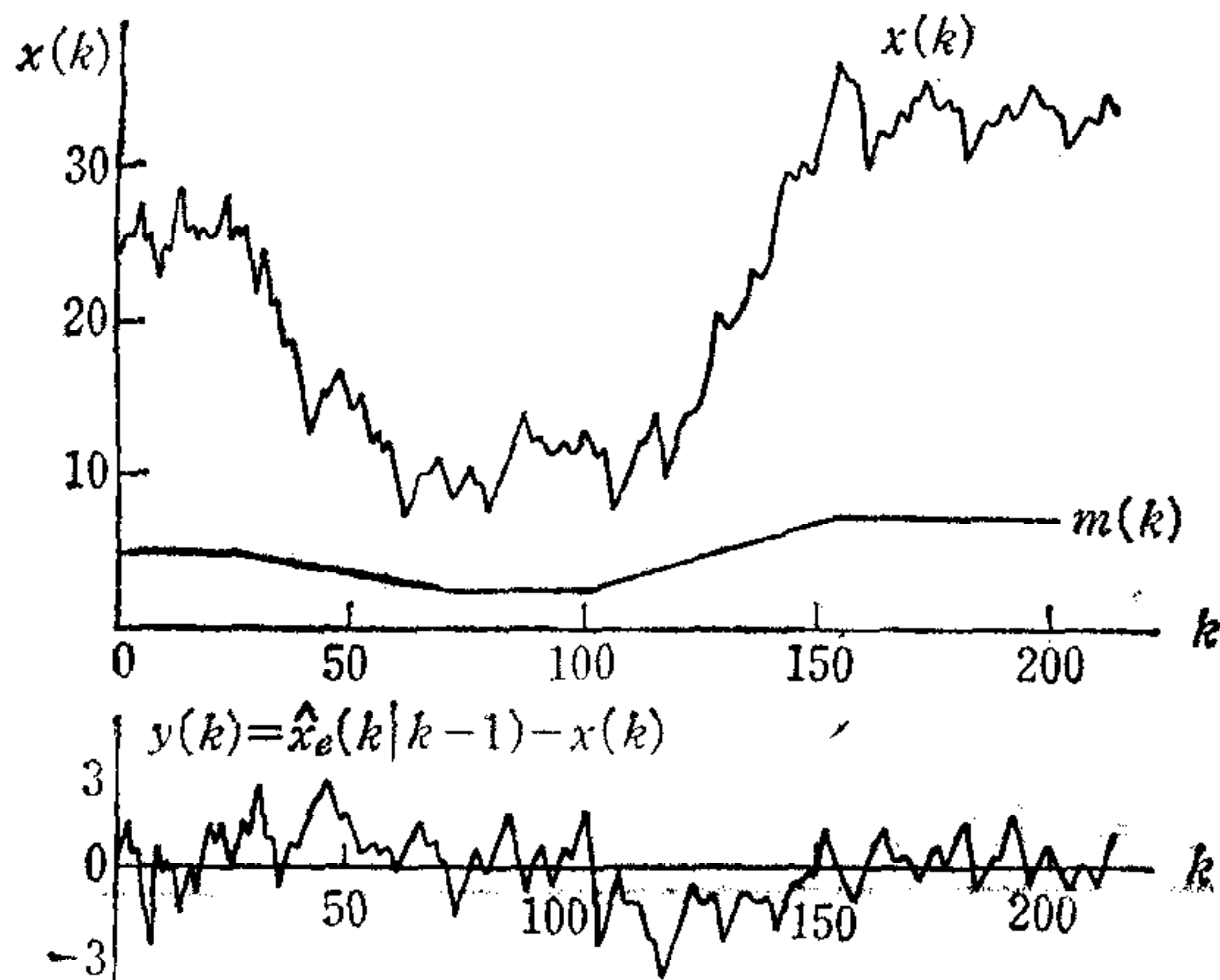


图 2

$$x(k) = 1.5x(k-1) - 0.7x(k-2) + \varepsilon(k) + 0.8\varepsilon(k-1) + m(k). \quad (11)$$

显然,图 2 中  $\{x(k)\}$  的确定性成分较之随机成分大得多。用  $\hat{x}_e(k+1|k)$  表示指数平滑方法在  $k$  时刻对  $x(k+1)$  的预报值,它由下式递推得出:

$$\hat{x}_e(k+1|k) = \lambda x(k) + (1-\lambda)\hat{x}_e(k|k-1). \quad (12)$$

其中  $\lambda$  为小于 1 的正数。用  $y(k+1)$  表示指数平滑法  $k$  时刻的一步预报误差,有

$$y(k+1) = \hat{x}_e(k+1|k) - x(k+1). \quad (13)$$

由于指数平滑法本质上是低通滤波器, $m(k)$  时变情况下  $\{y(k)\}$  也是不平稳的,但是它的确定性成分已较之  $\{x(k)\}$  要小得多(图 2)。

### 三、预报方法及其在雷达测距中的应用

用上述方法探讨雷达测量飞机(低空飞行)斜距离的短期预报问题。低空飞行的测量存在较强烈的随机干扰,而且有明显的非平稳和时变性。由于过程快,较为复杂算法的使用(如“卡尔曼滤波器”)受到计算机运算速度的限制。为此,希望得到一种简单实用的,可以用小型或微型机实现的自校正预报器,在对随机模型在线辨识的基础上预报数据的未来值。

用  $D_r(k)$  表示  $k$  时刻雷达对飞机斜距离的测量结果,  $\hat{D}_e(k|k-1)$  表示指数平滑方法在  $(k-1)$  时刻对  $D_r(k)$  的一步预报值,

$$\hat{D}_e(k|k-1) = \lambda D_r(k-1) + (1-\lambda)\hat{D}_e(k-1|k-2). \quad (14)$$

这里的  $\lambda$  值选择为 0.8—0.85。

用  $y(k)$  表示指数平滑法的预报误差,

$$y(k) = \hat{D}_e(k|k-1) - D_r(k). \quad (15)$$

选择描述  $\{y(k)\}$  的动态模型为

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \varepsilon(k) + c_1 \varepsilon(k-1) + m(k). \quad (16)$$

其中  $\{\varepsilon(k)\}$  为零均值(方差可为时变的)白噪声序列。

用 ELS 法估计  $\hat{\theta} = [-a_1, -a_2, \hat{c}_1, \hat{m}]^T$  (参见式 (5) 到式 (9)), 在此基础上得到对  $y$  的一步预报:

$$\hat{y}_i(k+1|k) = \hat{a}_1 y(k) + \hat{a}_2 y(k-1) + \hat{c}_1 \hat{\varepsilon}(k) + \hat{m}. \quad (17)$$

式中的  $\hat{\varepsilon}(k)$  是由式(8)递推得出的。由  $\hat{y}_i$  进而得出对斜距离的一步预报:

$$\hat{D}_i(k+1|k) = \hat{D}_e(k+1|k) - \hat{\rho}_i(k+1|k). \quad (18)$$

图 3 为该自校正预报器的计算框图。

图 4 为对一个实际样本的辨识和预报结果。该样本以 8.6 公里的距离开始测量，斜距离的最小值为 1.2 公里，采样间隔

$$\Delta T = 0.1 \text{ 秒,}$$

测量时间共 64 秒。

下面对三种预报方法进行比较。这三种方法是在线辨识的自校正预报器、指数平滑预报方法和按等速直线规律进行预报的一种

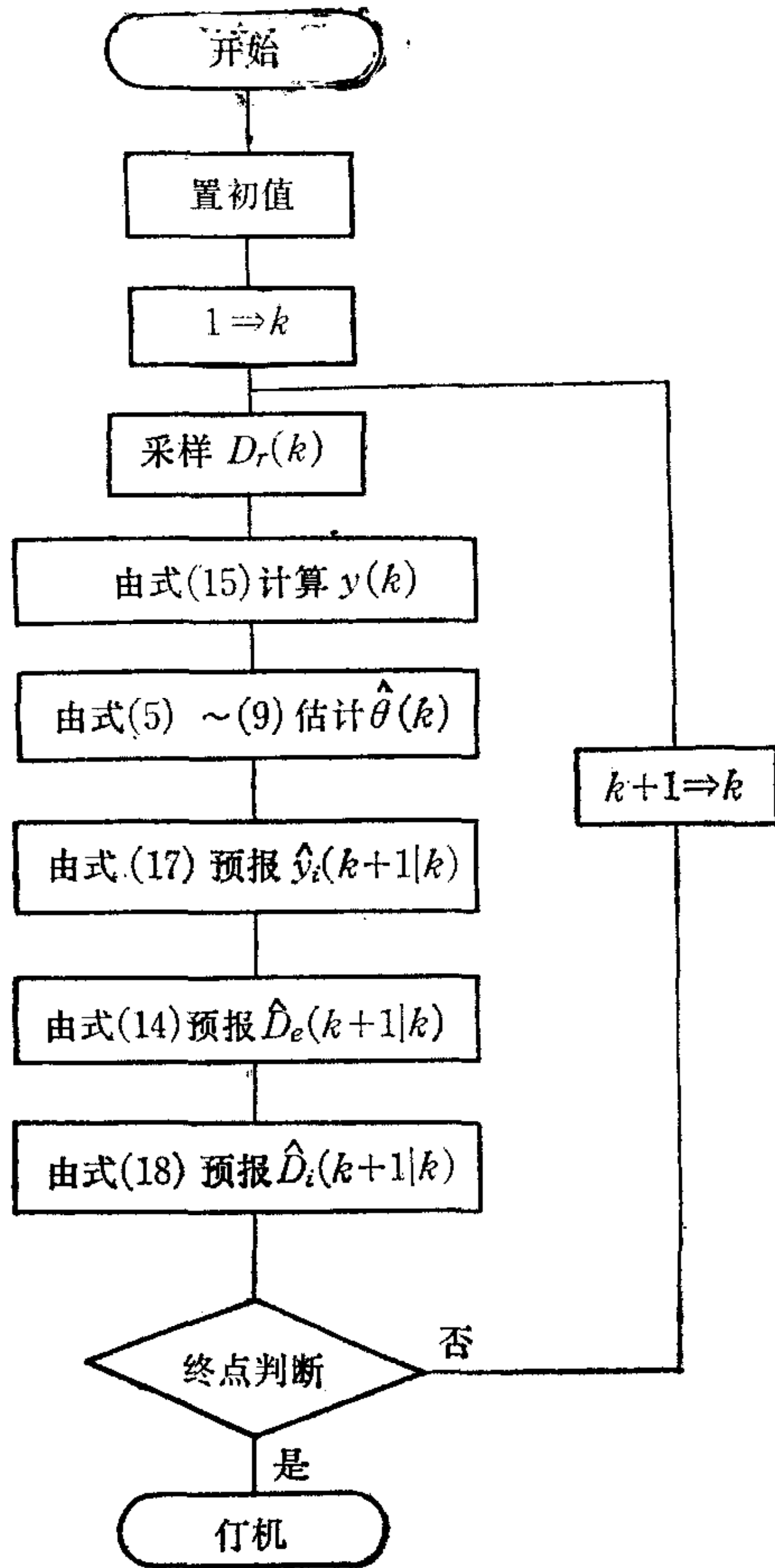


图 3

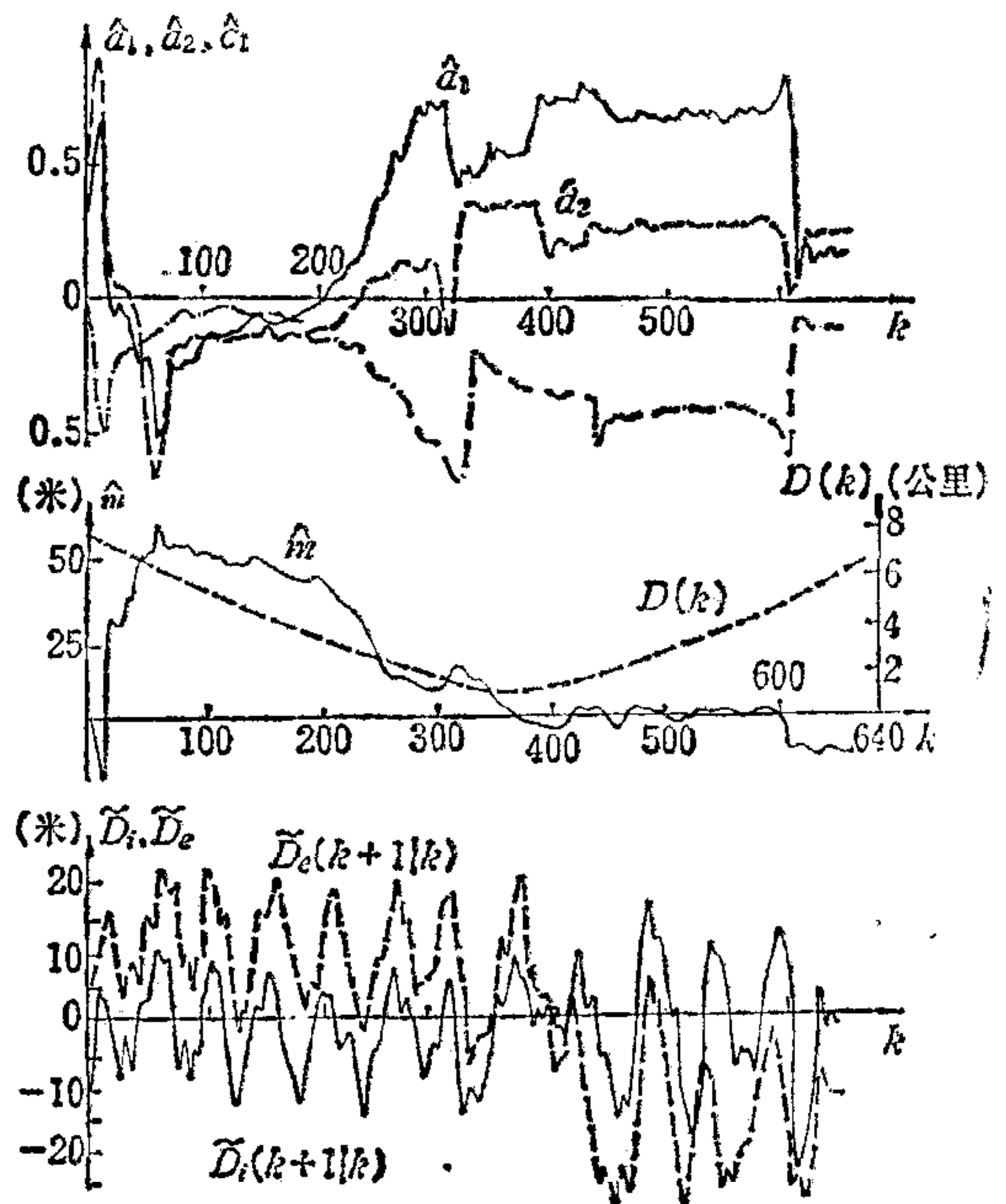


图 4

简单的确定性预报方法。后者用  $\tilde{D}_i(k+1|k)$  表示,有

$$\tilde{D}_i(k+1|k) = 2D_r(k) - D_r(k-1). \quad (19)$$

为了比较不同方法的预报精度,本文使用了斜距离的真值  $\{D(k)\}$ ,它由比雷达测距精度高得多的光学测距机测得。由于光学测距机只能在能见度很好的条件下使用,一般情况下  $\{D(k)\}$  是未知的,故在上述辨识和预报过程中并不使用  $D(k)$ ,而只用于评价预报方法的精度。

定义自校正预报器的一步预报误差为

$$\tilde{D}_i(k+1|k) \triangleq \hat{D}_i(k+1|k) - D(k+1),$$

指数平滑法的一步预报误差为

$$\tilde{D}_e(k+1|k) \triangleq \hat{D}_e(k+1|k) - D(k+1),$$

按直线规律的一步预报误差为

$$\hat{D}_i(k+1|k) \triangleq \hat{D}_i(k+1|k) - D(k+1).$$

三种方法一步预报误差的均方差值(从  $k=40$  步开始计算, 共计 600 步)分别为  $J_i$ ,  $J_c$ ,  $J_l$ :

$$J_i = \sqrt{\frac{1}{600} \sum_{k=40}^{639} \hat{D}_i^2(k+1|k)} = 19.19 \text{ 米},$$

$$J_c = \sqrt{\frac{1}{600} \sum_{k=40}^{639} \hat{D}_c^2(k+1|k)} = 29.88 \text{ 米},$$

$$J_l = \sqrt{\frac{1}{600} \sum_{k=40}^{639} \hat{D}_l^2(k+1|k)} = 26.33 \text{ 米}.$$

而雷达实际的测量误差均方差为

$$J_r = \sqrt{\frac{1}{600} \sum_{k=40}^{639} [D_r(k+1) - D(k+1)]^2} = 16.17 \text{ 米}$$

以上结果表明,  $J_i$  与  $J_r$  相接近, 与其他两种方法相比有显著改善.

在上述向前一步预报的基础上, 如果用  $\hat{y}_i(k+1|k)$  代替  $y(k+1)$ , 由式(8)和(17)可得到向前两步预报  $\hat{y}_i(k+2|k)$ . 以此类推, 可得向前三步, 直至  $m$  步的预报. 也可以如 Wittenmark 的方法一样<sup>[1]</sup>, 通过辨识向前  $m$  步的预报方程而直接得到向前  $m$  步的自校正预报器.

## 四、结 论

(1) 本文提出了适用于一类非平稳过程的一种简单实用的自校正预报方法. 这种基于在线辨识的自校正预报方法在线计算量小, 能够用小型或微型机完成.

(2) 用上述方法对雷达测量低空飞行飞机斜距离的一个实际样本进行自校正预报, 得到了较高的预报精度.

(3) 该方法可用于对飞机、船舶等活动物体未来位置的预报以及其他具有非平稳的动态过程(如某些生产过程), 且要求迅速做出短期预报的场合.

此项工作是作者在北京工业学院自动控制系工作期间进行的, 得到了张志方副教授的指导、支持和冯雅君同志的大力协助, 特此致谢.

## 参 考 文 献

- [1] Wittenmark B., A Self-Tuning Predictor, IEEE Tran. Automatic Control, 19 (1974), p. 848—851.
- [2] 邓自立, 多维自校正预报器, 中国自动化学会第三届控制理论及应用学术报告会论文(1982年峨眉).
- [3] Keyser R., A Self-Tuning Multistep Predictor Application, Automatica, 17 (1981), p. 167—174.
- [4] 中国科学院应用数学研究所, 时间序列的分析和应用, 概率统计讲义(二), 1982.
- [5] Wu S. M. and Pandit S. M., Time Series and System Analysis, Modeling and Applications, 北京工业学院译(1979).

## A SELF-TUNING PREDICTOR OF NON-STATIONARY ARMA MODEL AND ITS APPLICATION

MA RUNJIN

*(Beijing Institute of Metallurgical, Mechanical and Electrical Technology)*

### ABSTRACT

On-line identification and self-tuning prediction of the ARMA under the influence of stochastic distribution sequence with time varying mean and time varying variance have been studied. The on-line identification of the model can be achieved by a simple ELS method. The self-tuning prediction of the future value can be achieved on the basis of real time model-building and modification to the one-step predicting errors sequence in the exponential smooth predictor.

It can be used for short period prediction of low altitude flight data by means of Rader measuring. Simulation and processed results of the measuring data show that the method is simple and can acquire high precision. It can be used for real time model building and short period prediction to some kind of non-stationary process via micro-computer.