第 11 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 11, No. 3
1985 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1985

关于一类分布参数系统的快速控制问题[1)]

欧 阳 亮
(山 东 大 学)

摘　　要

本文研究了某类分布参数系统快速控制表达式．用一种新方法证明了快速控制属于允许控制集合的边界，并求出了最速时间应满足的方程，因此可由计算机求出最速时间的数值．最后举出了计算实例，说明本文方法可用于计算受控弹性梁的快速镇定等问题．

一、引　言

本文的物理背景是研究用何种外力控制或者消除振动系统的振动的问题．以两端固定的均匀弹性弦线的振动为例，如果在弦上不加外力，则弦上因有初始位移和初始速度而作自由振动．弦的位移 $Y(x, t)$ 满足下面的始值边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ 0 < t < t_1, \\ Y(0, t) = Y(l, t) = 0,\ 0 < t < t_1, \\ Y(x, 0) = \phi(x),\ \dfrac{\partial Y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{I}$$

其中 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$；T 表示张力；ρ 表示线密度；$\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别表示弦的初始位移和初始速度．为使弦在指定的 T_0 时刻停振并保持稳定，必须在 $0 < t < T_0$ 时间内在弦上加控制力 $u(x, t)$．如果只要将弦镇定，则只需选取控制力 $u(x, t)$ 使弦在 T_0 时刻的位移和速度均恒等于零．由于在 T_0 时刻弦上的总能量

$$E(T_0) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2\right]\Big|_{t=T_0} dx \equiv 0,$$

所以弦在 $t > T_0$ 时不再振动．求上述 T_0 与 $u(x, t)$ 相当于选 $T_0 > 0$ 和 $u(x, t)$ 使下列始值边值问题 (II) 有唯一解 $Y(x, t)$ 存在．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + u(x, t),\ \text{当}\ 0 < x < l,\ 0 < t < T_0, \\ Y(0, t) = Y(l, t) = 0,\ \text{当}\ 0 < t < T_0, \\ Y(x, 0) = \phi(x),\ \dfrac{\partial Y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ Y(x, T_0) = 0,\ \dfrac{\partial Y}{\partial t}\Big|_{t=T_0} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{II}$$

本文于 1982 年 8 月 4 日收到．
1) 中国科学院科学基金资助的课题．

由此可见，停振时间 T_0 与所选控制外力 $u(x, t)$ 有关，是函数 u 的泛函，记为 $T_0[u]$. 在实际问题中控制外力都带有物理约束(例如它能将弦绷紧但又不致折断)，因而必须认为 u 应属于某个允许控制集合 U. 所谓快速控制问题，就是要在允许集合 U 内取一控制外力 $u^*(x, t)$ 使它所对应的停振时间为最小，$T_0[u^*] = \operatorname*{Min}_{u \in U} T_0[u]$.

这类问题广泛地出现于机械的(例如弦、梁板、壳的振动)电的(传输线，电磁波)和声的振动系统中. 本文首先对一般二阶分布参数控制系统建立了统一的状态空间模型，用一种与前人不同的方法求出了快速控制的表达式和计算最速时间的方程[1,2,3].

二、状态空间模型与快速控制问题

对一维扩散(传热)系统，R. N. P Singh 在文 [4] 中提出了建立状态空间模型的统一方法. 从实质看，状态空间模型就是对所考虑的分布参数系统用固有函数展开方法求出的广义解[5,6]. 这种模型具有两大优点:

(1) 由于广义解是联系控制函数与状态函数间的表达式，因此可用它直接研究各种控制问题(例如能控能观性、快速控制问题、平方指标极小问题).

(2) 关于广义解的存在性、唯一性及可微性，在数学研究中已日趋完备[5,6]，可用广义函数论证明广义解按某种特定意义满足泛定方程、边值条件和初值条件. 从计算数学和控制工程角度看，对广义解进行理论分析，能对实际问题起检验作用，例如对前述问题 (II)，按文 [5] 可取其广义解

$$Y(x, t) = \Phi_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \int_0^l \frac{l}{n\pi a} u(\xi, \tau) \sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau) \sin\frac{n\pi\xi}{l} d\xi d\tau\right] \sin\frac{n\pi x}{l}$$

作为它的状态空间模型. 这里，

$$\Phi_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + \frac{l}{n\pi a} b_n \sin\frac{n\pi a}{l} t\right] \sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

由初始函数 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 决定.

本文研究由下列状态空间模型决定的分布参数系统:

$$Y(p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \int_\Omega g_i(t, \tau) u(q, \tau) \phi_i(q) dq d\tau\right] \phi_i(p) + F(p, t) \tag{1}$$

这里，Ω 为 n 维欧氏空间中的有界开域；p, q 为 Ω 中的点；$\{\phi_i(p)\}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的完备标准正交系，$g_i(t, \tau)$ 当 $i = 1, 2, 3, \cdots$；$F(p, t)$ 为已知函数. 研究模型 (1) 是有理论和实际背景的，例如当 $\Omega = (0, l)$，$\phi_i(p) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{i\pi x}{l}$,

$$g_i(t, \tau) = \frac{1}{2i\pi a} \sin\frac{i\pi a}{l}(t-\tau), \quad i = 1, 2, 3, \cdots,$$

而且 $F(x, t) = \Phi_0(x, t)$ 时，式 (1) 就是问题 (II) 的广义解表达式. 如果

$$g_i(t,\tau)=\frac{1}{\lambda_i}\sin\lambda_i(t-\tau),$$

$$\phi_i(p)=v_i(p),\ i=1,2,3,\cdots;\ F(p,t)=\sum_{s=1}^{\infty}[a_s\cos\lambda_s t+b_s\sin\lambda_s t]v_s(p)$$

时，式 (1) 就是文 [6] 第二章所讨论过的线性双曲型方程混合问题的广义解（见文 [6] (14)式)。

因此，对模型 (1) 进行研究，就可以统一处理一维、二维、三维空间中可用固有函数展开法求解的分布参数系统的控制问题. 现引入下面的定义，并提出需要解决的问题.

定义 1. 对给定的常数 $M>0$，在受控时间内，称一切满足于约束条件

$$\int_0^t\int_\Omega |u(q,\tau)|^2 dqd\leqslant M,\ t\in(0,T]$$

的平方可积函数 $u(q,\tau)$（等价类）为系统(1)的允许控制函数，所有允许控制函数组成允许控制集合 $\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}$.

定义 2. 如将定义 1 中的约束条件修改为

$$\int_0^t\int_\Omega |u(q,\tau)|^2 dqd\tau\leqslant Mt,\ t\in(0,T],$$

则允许控制集合为 $\mathfrak{U}_{ad}^{(II)}$. 这种约束的实际意义是对控制函数 $u(q,\tau)$ 附加了功率约束. 现提出

问题 I. 是否存在一允许控制 $u(q,\tau)\in\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}$，使系统 (1) 的输出函数 $Y(p,t)$ 对于某个不是预先给的 $T_0(0<T_0<\infty)$ 满足

$$Y(p,T_0)\overset{a.\,e}{=\!=}Y_1(p),\ p\subset\Omega, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial t}\bigg|_{t=T_0}\right]\overset{a.\,e}{=\!=}Y_2(p),\ p\subset\Omega. \tag{3}$$

因为由式 (1),(2),(3) 所确定的 T_0 是控制 u 的泛函，并记为 $T_0[u]$，系统 (1) 的快速控制问题，就是求出 $u^*\in\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}$，使 $T^*=T_0[u^*]=\underset{u\in\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}}{\mathrm{Min}}\ T_0[u]$. 称 u^* 为系统 (1) 的快速控制，T^* 为最速时间.

问题 II. 与问题 I 相同，但将允许控制集合 $\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}$ 改为 $\mathfrak{U}_{ad}^{(II)}$.

三、主要引理和定理

为叙述简洁起见，令 (1) 式中 $F(p,t)\equiv 0$.

引理 1. 假设系统 (1) 满足下列条件:

(1) 在区域 $[0<\tau\leqslant T,\ 0<t\leqslant T]$ 上函数 $g_i(t,\tau)$, $\frac{\partial g_i}{\partial t}$, $i=1,2,3,\cdots$ 均为连续函数，并存在与 i 无关的常数 $N>0$，使 $|g_i(t,\tau)|\leqslant N$,

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial t}\right|\leqslant N,\ i=1,2,3,\cdots,$$

再设 $g_i(t,t)\equiv 0,\ i=1,2,3,\cdots,\ 0<t\leqslant T$;

(2) 控制函数 $u(q,\tau)\in L^2(\Omega\times(0,T])$，则系统 (1) 的输出函数 $Y(p,t)$ 具有下列性质：

1) $\forall t:(0<t\leqslant T)$，$Y(p,t)\in L^2(\Omega)$. 若将 $Y(p,t)$ 视为 $t\to L^2(\Omega)$ 的抽象函数，则它在 $(0,T]$ 上对 t 连续.

2) $Y(p,t)\in L^2(\Omega\times(0,T])$；$Y(p,t)$ 在 $\Omega\times(0,T]$ 上具有索波列夫定义的广义微商 $\left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]$[6]，当 $0<t\leqslant T_0\leqslant T$ 时

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial g_i(t,\tau)}{\partial t}\phi_i(p)\phi_i(q)u(q,\tau)dqd\tau \tag{4}$$

满足 $\left\|\left[\frac{\partial Y}{\partial t}\right]\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant N\left[\int_0^{T_0}\int_\Omega|u(q,\tau)|^2dqd\tau\right]^{\frac{1}{2}}$.

为了在 $\mathfrak{U}_{ad}^{(\mathrm{I})}$ (或 $\mathfrak{U}_{ad}^{(\mathrm{II})}$) 内求控制函数 $u(q,\tau)$，使式 (1)—(3) 有解，先将 $Y_1(p)$，$Y_2(p)$ 按 $\{\phi_i(p)\}$ 展开为 $Y_1(p)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega_i\phi_i(p)$，$Y_2(p)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{\omega}_i\phi_i(p)$，$p\in\Omega$. 此时

$$\omega_i=\int_\Omega Y_1(p)\phi_i(p)dp;\ \tilde{\omega}_i=\int_\Omega Y_2(p)\phi_i(p)dp,\ i=1,2,3,\cdots.$$

取

$$u(q,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}U_i(\tau)\phi_i(q). \tag{5}$$

因已设 $\{\phi_i(p)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 内的完备标准正交系，由引理 1，式 (5) 满足式 (1)—(3) 只须下式成立：

$$\begin{cases}\int_0^{T_0}g_i(T_0,\tau)U_i(\tau)d\tau=\omega_i,\\ \int_0^{T_0}h_i(T_0,\tau)U_i(\tau)d\tau=\tilde{\omega}_i.\end{cases} \tag{6}$$

此时 $h_i(T_0,\tau)=\frac{\partial g_i}{\partial t}$，$i=1,2,3,\cdots$，由式 (5),(6) 所确定的 $u(q,\tau)\in\mathfrak{U}_{ad}^{(\mathrm{I})}$ (或 $\mathfrak{U}_{ad}^{(\mathrm{II})}$) 只须 (7) 式(或 (8) 式)成立：

$$\|u(q,\tau)\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_0])}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{T_0}U_i^2(\tau)d\tau\leqslant M \tag{7}$$

$$\|u(q,\tau)\|^2_{L^2(\Omega\times 0\times,t_0])}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t}U_i^2(\tau)d\tau\leqslant Mt,\ (0<t\leqslant T_0). \tag{8}$$

为了从 (6) 式中解出 $U_i(t)$，只须利用引理 2 (只要直接验证就能证明引理 2).

引理 2. 用 k 表示某一自然数，$i=k$ 时方程 (6) 可按下列几种情形求解：

(a) 若 $g_k(T_0,t)=h_k(T_0,t)\equiv 0$，则只须 $\omega_k=\tilde{\omega}_k=0$，方程 (6) 必定有解，$U_k(t)$ 可取为任意函数.

(b) 若 $g_k(T_0,t)\equiv 0$，但 $h_k(T_0,t)\not\equiv 0$，则只须 $\omega_k=0$，解

$$U_k(t)=\frac{\tilde{\omega}_kh_k(T_0,t)}{\int_0^{T_0}h_k^2(T_0,t)dt},\ 0<t\leqslant T_0.$$

(c) 若 $g_k(T_0, t) \not\equiv 0$，但 $h_k(T_0, t) \equiv 0$，则只须 $\tilde{\omega}_k = 0$，解

$$U_k(t) = \frac{\omega_k g_k(T_0, t)}{\int_0^{T_0} g_k^2(T_0, t)dt}, \quad 0 < t \leqslant T_0.$$

(d) 若 $g_k(T_0, t) \not\equiv 0$，$h_k(T_0, t) \not\equiv 0$，$0 < t \leqslant T_0$. 但存在常数 $R_0 \neq 0$，使

$$g_k(T_0, t) = R_0 h_k(T_0, t), \quad 0 < t \leqslant T_0,$$

则只须 $\omega_k = R_0 \tilde{\omega}_k$，其解 $U_k(t) = \dfrac{\omega_k g_k(T_0, t)}{\int_0^{T_0} g_k^2(T_0, t)dt}$.

(e) 若 $g_k(T_0, t) \not\equiv 0$，$h_k(T_0, t) \not\equiv 0$，$0 < t \leqslant T_0$，且对任何常数 $R = 0$ 均有

$$g_k(T_0, t) \not\equiv R h_k(T_0, t), \quad 0 < t \leqslant T_0,$$

则方程 (6) 的解为

$$U_k(t) = a_k g_k(T_0, t) + b_k h_k(T_0, t). \tag{9}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\Delta_k(T_0)} \left[\omega_k \int_0^{T_0} h_k^2(T_0, t)dt - \tilde{\omega}_k \int_0^{T_0} g_k(T_0, t) h_k(T_0, t)dt\right];$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_k(T_0, t)} \left[\tilde{\omega}_k \int_0^{T_0} g_k^2(T_0, t)dt - \omega_k \int_0^{T_0} g_k(T_0, t) h_k(T_0, t)dt\right].$$

由 Schwarz 不等式及本情形的条件可知常数

$$\Delta_k(T_0) = \int_0^{T_0} g_k^2(T_0, t)dt \int_0^{T_0} h_k(T_0, t)dt - \left[\int_0^{T_0} g_k(T_0, t) h_k(T_0, t)dt\right]^2 > 0,$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} a_k\omega_k + b_k\tilde{\omega}_k &= \int_0^{T_0} [a_k g_k(T_0, t) + b_k h_k(T_0, t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{\Delta_k(T_0)} \int_0^{T_0} [\omega_k h_k(T_0, t) - \tilde{\omega}_k g_k(T_0, t)]^2 dt. \end{aligned} \tag{10}$$

由此得到下面的三个定理：

定理 1. 对受控系统 (1) 假设引理 1 中条件 (1) 与 (2) 均成立，再设 $F(p, t) \equiv 0$，又满足条件

(3) $Y_1(p) \in L^2(\Omega)$，$Y_2(p) \subset L^2(\Omega)$. 它们的福氏系数分别记为

$$\omega_i = \int_\Omega Y_1(p)\phi_i(p)dp, \quad \tilde{\omega}_i = \int_\Omega Y_2(p)\phi_i(p)dp, \quad i = 1, 2, 3\cdots;$$

(4) 设 $g_i(T_0, t) \not\equiv 0$，$h_i(T_0, t) \not\equiv 0$，$0 < t \leqslant T_0$，对任何常数 $R \neq 0$ 均有

$$g_i(T_0, t) \not\equiv R h_i(T_0, t), \quad 0 < t \leqslant T_0, \quad i = 1, 2, 3, \cdots$$

(T_0 由下列条件 (5) 决定)；

(5) 存在 $T_0 > 0$，使

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_i(T_0)} \int_0^{T_0} [\omega_i h_i(T_0, t) - \tilde{\omega}_i g_i(T_0, t)]^2 dt \leqslant M, \tag{11}$$

则控制函数

$$u(q, \tau) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} [a_i g_i(T_0, \tau) + b_i h_i(T_0, \tau)]\phi_i(q), & t \in (0, T_0), q \in \Omega \\ 0, & t \in [T_0, T], q \in \Omega \end{cases} \tag{12}$$

就属于 $\mathfrak{U}_{ad}^{(I)}$，且使系统 (1) 的输出满足式 (2) 和 (3). 在 (12) 式中

$$a_i=\frac{1}{\Delta_i(T_0)}\left[\omega_i\int_0^{T_0}h_i^2(T_0,t)dt-\tilde{\omega}_i\int_0^{T_0}g_i(T_0,t)h_i(T_0,t)dt\right];$$

$$b_i=\frac{1}{\Delta_i(T_0)}\left[\tilde{\omega}_i\int_0^{T_0}g_i^2(T_0,t)dt-\omega_i\int_0^{T_0}g_i(T_0,t)h_i(T_0,t)dt\right];$$

$$\Delta_i(T_0)=\int_0^{T_0}g_i^2(T_0,t)dt\int_0^{T_0}h_i^2(T_0,t)dt-\left[\int_0^{T_0}g_i(T_0,t)h_i(T_0,t)dt\right]^2>0,$$

$$i=1,2,3,\cdots.$$

定理 2. 假设定理 1 中的条件 (1)—(4) 均成立，但将条件 (5) 中的 (11) 式改为存在 $T_0>0$，使

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_i(T_0)}\int_0^{T_0}[\omega_i h_i(T_0,t)-\tilde{\omega}_i g_i(T_0,t)]^2dt\leqslant MT_0,\tag{13}$$

并设所有函数 $\sigma_i(t)=\int_0^t[a_ig_i(T_0,\tau)+b_ih_i(T_0,\tau)]d\tau$，$i=1,2,3,\cdots$，均为$(0,T_0]$上的下凸函数，则由 (12) 式确定的控制 $u(q,\tau)\in\mathfrak{U}_{ad}^{(II)}$，且系统 (1) 的输出函数 $Y(p,t)$ 满足 (2) 式和 (3) 式.

定理 3. 对系统 (1) 假设下列条件均成立：

1) $g_i(t,\tau)$, $\dfrac{\partial g_i(t,\tau)}{\partial t}\in c[0<t\leqslant T,\ 0<\tau\leqslant T]$, $i=1,2,3,\cdots$, $g_i(t,t)\equiv0$, $t\in(0,T]$, $i=1,2,3,\cdots$, $F(p,t)\equiv0$，并对所有的 $t\in(0,T]$ 均有

$$g_i(t,\tau)\not\equiv Rh_i(T,\tau).$$

这里 $0<\tau\leqslant t\leqslant T$, $i=1,2,3,\cdots$, $R\neq0$ 为任意常数；

2) $Y_1(p)\in L^2(\Omega)$, $Y_2(p)\in L^2(\Omega)$. 它们的福里哀系数分别记为 $\{\omega_i\}$, $\{\tilde{\omega}_i\}$；

3) $\sigma_i(t)=\dfrac{1}{\Delta_i(t)}\displaystyle\int_0^t[\omega_ih_i(t,\tau)-\tilde{\omega}_ig_i(t,\tau)]^2d\tau\in c(0,T]$，并设

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(t)\in c(0,T];$$

4) 方程 $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(t)-M=0$ 在区间 $(0,T]$ 上存在最小正根 $T^*>0$，并设

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(0+)>M,$$

则问题 I 的快速控制可以表示为

$$u^*(q,\tau)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{\infty}[a_i^*g_i(T^*,\tau)+b_i^*h_i(T^*,\tau)]\phi_i(q), & 0<\tau<T^*,\ q\subset\Omega\\ 0, & T^*\leqslant\tau\leqslant T,\ q\in\Omega.\end{cases}\tag{14}$$

其中 $a_i^*=\dfrac{1}{\Delta_i(T^*)}\left[\omega_i\displaystyle\int_0^{T^*}h_i^2(T^*,\tau)d\tau-\tilde{\omega}_i\int_0^{T^*}g_i(T^*,\tau)h_i(T^*,\tau)d\tau\right]$;

$$b_i^*=\frac{1}{\Delta_i(T^*)}\left[\tilde{\omega}_i\int_0^{T^*}g_i^2(T^*,\tau)d\tau-\omega_i\int_0^{T^*}g_i(T^*,\tau)h_i(T^*,\tau)d\tau\right];$$

$$\Delta_i(t)=\int_0^t g_i^2(t,\tau)d\tau\int_0^t h_i^2(t,\tau)-\left[\int_0^t g_i(t,\tau)h_i(t,\tau)d\tau\right]^2>0,$$

$i=1,2,3,\cdots,\ 0<t\leqslant T$. 这时由条件 4) 决定的最小正根 T^* 就是问题 I 的最速时间. 对问题 II 同样可以得到与定理 3 相类似的定理,从略.

四、应用与计算实例

兹以文 [3] p.861 所考虑的受控系统作为应用与计算实例.

例. 求控制 $u(x,t)\in\mathfrak{U}_{ad}^{(1)}(u\in L^2([0,1]\times(0,T_0],\|u\|_{L^2}^2\leqslant M)$, 使对某一 $T_0>0$, 下述受控系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+u(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t\leqslant T_0\\ Y(0,t)=0,\ \left.\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ 0<t\leqslant T_0\\ Y(x,0)=0,\ \left.\dfrac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{15}$$

的解 $Y(x,t)$ 满足 $Y(x,T_0)=Y_1(x)$, $\left.\dfrac{\partial Y}{\partial t}\right|_{t=T_0}=Y_2(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 这里 $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ 均为已知函数.

解. 选取 $L^2[0,1]$ 内的完备标准正交函数系 $\phi_n(x)=\sin\lambda_n x$. 这里

$$\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2},\ n=1,2,3,\cdots,$$

设

$$Y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(t)\phi_n(x),\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\phi_n(x),\tag{16}$$

将 (16) 式代入 (15) 式中,利用 $\{\phi_n(x)\}$ 的完备标准正交性,本问题有解只须存在

$$\{U_n(t)\},$$

使

$$\begin{cases}\ddot{Y}_n(t)+\lambda_n^2 Y_n(t)=U_n(t) & (17)\\ Y_n(0)=\dot{Y}_n(0)=0 & (18)\end{cases}$$

有解 $Y_n(t)$, $n=1,2,3,\cdots$, 且满足

$$Y_n(T_0)=\omega_n=\int_0^1 Y_1(x)\phi_n(x)dx,\ \dot{Y}_n(T_0)=\tilde{\omega}_n=\int_0^1 Y_2(x)\phi_n(x)dx,\tag{19}$$

并能使

$$\int_0^{T_0}\int_0^1 u^2(x,t)dxdt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0}U_n^2(\tau)d\tau\leqslant M.\tag{20}$$

先用冲量法求出 (17),(18) 式的解

$$Y_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t U_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau.\tag{21}$$

为使 (21) 式满足 (19) 式,只须 $\{U_n(t)\}$ 满足

$$\begin{cases}\int_0^{T_0} U_n(\tau)\sin\lambda_n(T_0-\tau)d\tau=\lambda_n\omega_n,\\ \int_0^{T_0} U_n(\tau)\cos\lambda_n(T_0-\tau)d\tau=\tilde{\omega}_n,\quad n=1,2,3,\cdots\end{cases}\tag{22}$$

为此取 $U_n(t)=a_n\sin\lambda_n(T_0-t)+b_n\cos\lambda_n(T_0-t)$, $n=1,2,3\cdots$, 代入 (22) 式, 得到下列线性代数方程组:

$$\begin{cases}a_n\int_0^{T_0}\sin^2\lambda_n(T_0-\tau)d\tau+b_n\int_0^{T_0}\sin\lambda_n(T_0-\tau)\cos\lambda_n(T_0-\tau)d\tau=\lambda_n\omega_n,\\ a_n\int_0^{T_0}\sin\lambda_n(T_0-\tau)\cos\lambda_n(T_0-\tau)d\tau+b_n\int_0^{T}\cos^2\lambda_n(T_0-\tau)d\tau=\tilde{\omega}_n.\end{cases}\tag{23}$$

计算 (23) 式的系数行列式 $\Delta_n(T_0)$, $n=1,2,3,\cdots$,得到

$$\Delta_n(T_0)=\begin{vmatrix}\frac{T_0^2}{2}-\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT_0 & \frac{1}{4\lambda_n}(1-\cos 2\lambda_nT_0)\\ \frac{1}{4\lambda_n}(1-\cos 2\lambda_nT_0) & \frac{T_0}{2}+\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT_0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{T_0^2}{4}-\frac{\sin^2\lambda_nT_0}{4\lambda_n^2}>\frac{T_0^2}{4}-\frac{(\lambda_nT_0)^2}{4\lambda_n^2}=0,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

方程组 (23) 存在唯一解组 (a_n,b_n), 且

$$a_n=\frac{2T_0\omega_n\lambda_n^3+\lambda_n^2\omega_n\sin 2\lambda_nT_0-2\tilde{\omega}_n\lambda_n\sin\lambda_nT_0}{\lambda_n^2T_0^2-\sin^2\lambda_nT_0}=a_n(T_0),\tag{24}$$

$$b_n=\frac{2\tilde{\omega}_nT_0\lambda_n^2-2\lambda_n^2\sin^2\lambda_nT_0-\lambda_n\sin 2\lambda_nT_0}{\lambda_n^2T_0^2-\sin^2\lambda_nT_0}=b_n(T_0).\tag{25}$$

因此,本例可用控制表达式是

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(T_0)\sin\lambda_n(T_0-t)+b_n(T_0)\cos\lambda_n(T_0-t)]\phi_n(x),\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<t\leqslant T_0,\\ 0,\ T_0<t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{26}$$

这时停振时间 T_0 应满足约束条件

$$\|u\|_{L^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(T_0)\lambda_n\omega_n+b_n(T_0)\tilde{\omega}_n]\leqslant M.\tag{27}$$

当 (26),(27) 式中的 $a_n(T_0)$, $b_n(T_0)$ 分别由 (24),(25) 式确定, 而且 T_0 选得使 (27) 式成立时, 显见, $u(x,t)\in\mathfrak{U}_{ad}^{(1)}$. 再注意函数 $g_n(t,\tau)=\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)$ 满足了本文定理 3 中的一切条件,按照定理 3, 如果选取 T^* 为方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(T^*)\lambda_n\omega_n+b_n(T^*)\tilde{\omega}_n]=M\tag{28}$$

的最小正根,则 T^* 就是本例的最速时间,只要在 (26) 式中用求出的 T^* 代替 T_0, 就可得到快速控制的表达式. 本文方法曾用于空气弹性力学中弹性梁镇定问题的实际计算.

参 考 文 献

[1] 欧阳亮，关于分布参数系统快速控制问题，科学通报，No. 7, 1975, p. 313—317.
[2] Бутковский А. Г., Полтавский Л. Н., Оптимальные управление распределенном колебательной систем, Автом. И. Теле., Том. XXV, No. 1, 1965, 1900—1914.
[3] Herget C. J., On the Controllablility of diftributed parameter System, Int. J. Control, 11 (1970), No. 5, 827—833.
[4] Singh R. N. P., A unified approach to a state-space model for Linear distributed system, Int. J. Control, 11(1970), No. 3, 471—478.
[5] Courant R. and Hilbert D, Method of Mathmatical physics, V. I. Inter. pub. V. II. (1953), Inter. pub. 1962.
[6] Ладжеиская О. А., Смещанная Задача для Гиперболического уравнения, Госу. изд. Тех. -теоре. Лит. Москва 1953.

TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF A SPECIFIC CLASS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

OUYANG LIANG
(Shandong University)

ABSTRACT

In this paper, a representation for time optimal control of a specific class of distributed parameter systems is studied. A new method is used to prove the fact that time optimal control settles on the boundary of the admissible set. An equation wrich the optimal time should satisfy is derived. Therefore, numerical value of the optimal time can be acquired via a computer. Finally, a computation example is also given, which indicates that the method can be used in the computation of rapid stabilization of controlled elastic beams.